Lie-Algebren
Wintersemester 2008/09

Dorothea Bahns
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen

Aufgabenblatt 1

Die meisten aufgeführten Aufgaben sollen lediglich als Anhaltspunkt zur Nachbreitung der Vorlesung dienen und Rechnungen, die ich nicht ausführlich vorführe, vervollständigen. Die mit * gekennzeichneten Aufgaben können Sie, wenn Sie möchten, zum angegebenen Termin vor der Vorlesung bei mir abgeben. Die Lösungen aller Aufgaben stelle ich online auf der Homepage zur Vorlesung `www.uni-math.gwdg.de/bahns/lieAlg0809.html` zum angegebenen Termin zur Verfügung.

Aufgabe 1

Zeigen Sie: Die zu einer assoziativen Algebra A assoziierte Lie-Algebra A_L (also A mit der Klammer $[x, y] := xy - yx$ für alle $x, y \in A$, siehe Vorlesung) ist tatsächlich eine Lie-Algebra. Machen Sie sich klar, wo die Assoziativität eingeht.

Aufgabe 2

Zeige, dass die Menge aller Derivationen einer (nicht notwendig assoziativen) Algebra eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(A)$ ist.

Aufgabe 3

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Zeige: $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{ad} : x \mapsto \mathrm{ad}_x$ ist eine Darstellung von $\mathfrak{g}$. Hinweis: Es ist zu zeigen, dass $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$ für alle $x, y \in \mathfrak{g}$. Bestimme Kern und Bild von ad.

Aufgabe 4

Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Lie-Algebra, sei $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ eine geordnete Basis von $\mathfrak{g}$, seien die Strukturkonstanten von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathcal{B}$ mit a_{ij}^k, $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichnet. Zeige, dass sich für alle $x \in \mathfrak{g}$ die Matrix-Darstellung der Abbildung $\mathrm{ad}_x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ mithilfe der Strukturkonstanten berechnen läßt, wobei gilt

$$(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, \mathrm{ad}_{x_i})_{jk} = a_{ik}^j \tag{1}$$

Berechnen Sie die Strukturkonstanten von $\mathfrak{sl}(2, K)$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B} = (x, h, y)$ und wenden Sie (1) auf diesen konkreten Fall an. Ist die Darstellung treu (also injektiv)?

Aufgabe 5 * 5.11.08

i) Zeige: Für jede Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}\mathfrak{g}$ halbeinfach.

ii) Eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist auflösbar $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}\mathfrak{g} = 0$

Aufgabe 6 * 29.10.08

Beweisen Sie Lemma 1.2.3. i) aus der Vorlesung: Ist $\mathfrak{g}$ nilpotent, so auch alle Unter-Lie-Algebren von $\mathfrak{g}$ und alle Bilder von Lie-Algebren-Homomorphismen $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$.