Dorothea Bahns
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen

Aufgabenblatt 1

Die meisten aufgeführten Aufgaben sollen lediglich als Anhaltspunkt zur Nachbreitung der Vorlesung dienen und Rechnungen, die ich nicht ausführlich vorführe, vervollständigen. Die mit * gekennzeichneten Aufgaben können Sie, wenn Sie möchten, zum angegebenen Termin vor der Vorlesung bei mir abgeben. Die Lösungen aller Aufgaben stelle ich online auf der Homepage zur Vorlesung `www.uni-math.gwdg.de/bahns/lieAlg0809.html` zum angegebenen Termin zur Verfügung.

Aufgabe 1

Zeigen Sie: Die zu einer assoziativen Algebra A assoziierte Lie-Algebra A_L (also A mit der Klammer $[x,y] := xy - yx$ für alle $x, y \in A$, siehe Vorlesung) ist tatsächlich eine Lie-Algebra. Machen Sie sich klar, wo die Assoziativität eingeht.

Lösungshinweis

Bilinearität klar.
(L1) (Antisymmetry): $xx - xx = 0$ für alle $x \in A$.
(L2) (Jacobi):

$$\begin{aligned} [x,[y,z]] &= [x,yz] - [x,zy] = x(yz) - (yz)x - x(zy) + (zy)x \\ [z,[x,y]] &= z(xy) - (xy)z - z(yx) + (yx)z \\ [y,[z,x]] &= y(zx) - (zx)y - y(xz) + (xz)y \end{aligned}$$

Ein wichtiges Beispiel für diese Konstruktion aus der Vorlesung ist $\mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}(V)_L$ wobei V einen Vektorraum bezeichnet oder auch eine (nicht unbedingt assoziative!) Algebra (siehe Aufgabe 2).

Aufgabe 2

Zeige, dass die Menge aller Derivationen einer (nicht notwendig assoziativen) Algebra eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(A)$ ist.

Lösungshinweis

Es ist klar, dass die Derivationen einen linearen Unterraum von $\mathfrak{gl}(A)$ bilden. Zu zeigen ist nur noch Abgeschlossenheit unter der Klammerbildung: für δ_1, δ_2 Derivationen ist $\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_1 \circ \delta_2$ wieder eine Derivation (mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Produkt). Dies gilt, da $\delta_1 \circ \delta_2(ab) = \delta_1(a\delta_2(b)) + \delta_1(\delta_2(a)b) = a\delta_1(\delta_2(b)) + \delta_1(a)\delta_2(b) + \delta_2(a)\delta_1(b) + \delta_1(\delta_2(a))b$. Also ist $(\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1)(ab) = a\delta_1(\delta_2(b)) + \delta_1(\delta_2(a))b - a\delta_2(\delta_1(b)) - \delta_2(\delta_1(a))b = a(\delta_1(\delta_2(b) - \delta_2(\delta_1(b))) + (\delta_1(\delta_2(a)) - \delta_2(\delta_1(a)))b$.

Aufgabe 3

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Zeige: $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{ad} : x \mapsto \mathrm{ad}_x$ ist eine Darstellung von $\mathfrak{g}$. Hinweis: Es ist zu zeigen, dass $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$ für alle $x, y \in \mathfrak{g}$. Bestimme Kern und Bild von ad.

Lösungshinweis

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{[x,y]}(z) &= [[x,y],z] \\ [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y](z) &= \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y(z) - \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_x(z) \\ &= [x,[y,z]] - [y,[x,z]] \end{aligned}$$

Die beiden Ausdrücke sind aufgrund der Jacobi-Identität und der Antisymmetrie der Lie-Klammer gleich.
Kern von ad sind diejenigen Elemente von $\mathfrak{g}$, die mit allen anderen Elementen vertauschen, also das Zentrum. Das Bild ist die Kommutatoralgebra.

Aufgabe 4

Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Lie-Algebra, sei $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ eine geordnete Basis von $\mathfrak{g}$, seien die Strukturkonstanten von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathcal{B}$ mit a_{ij}^k, $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichnet. Zeige, dass sich für alle $x \in \mathfrak{g}$ die Matrix-Darstellung der Abbildung $\mathrm{ad}_x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ mithilfe der Strukturkonstanten berechnen läßt, wobei gilt

$$(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\ \mathrm{ad}_{x_i})_{jk} = a_{ik}^j \tag{1}$$

Berechnen Sie die Strukturkonstanten von $\mathfrak{sl}(2,K)$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B} = (x, h, y)$ und wenden Sie (1) auf diesen konkreten Fall an. Ist die Darstellung treu (also injektiv)?

Lösungshinweis

Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt für die Matrix $A := (\mathrm{ad}_{x_i})$

$$\sum_j A_{jk} x_j = \mathrm{ad}_{x_i}(x_k) = [x_i, x_k] = \sum_j a_{ik}^j x_j$$

also $(\mathrm{ad}_{x_i})_{jk} = a_{ik}^j$.

Für die spezielle lineare Liealgebra der Ordnung 2 $\mathfrak{sl}(2,K)$ gilt (Notationen aus der Vorlesung)

$$[x,y] = -[y,x] = h\ , \qquad [x,h] = -[h,x] = -2x\ , \qquad [h,y] = -[y,h] = -2y \tag{2}$$

alle anderen Klammern sind 0, also sind die Strukturkonstanten $a_{12}^1 = -a_{21}^1 = -2$, $a_{13}^2 = -a_{31}^2 = 1$, $a_{23}^3 = -a_{32}^3 = -2$, alle anderen 0. Es folgt

$$\mathrm{ad}_x = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \ \mathrm{ad}_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\ , \ \mathrm{ad}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Für Körper der Charakteristik ungleich 2 ist die Darstellung also offensichtlich treu, da in diesem Fall obige Matrizen linear unabhängig sind. Es gilt allgemeiner: die adjungierte

Darstellung ist treu, falls das Zentrum der Lie-Algebra trivial ist (siehe Aufgabe 3). Dass dies für $\mathfrak{sl}(2, K)$ im Fall $\operatorname{char}(K) \neq 2$ so ist, rechnet man entweder nach oder folgert es daraus, dass wir schon wissen (Vorlesung, Bsp. nach Def. 1.2.1), dass $\mathfrak{sl}(2, K)$ im Fall $\operatorname{char}(K) \neq 2$ einfach ist, also triviales Zentrum besitzen muss (Bem. nach Def. 1.2.1).
Aus (2) folgert man auch direkt: Die Kommutatoralgebra von $\mathfrak{sl}(2, K)$ ist $\mathfrak{sl}(2, K)$. Übrigens werden Lie-Algebren mit dieser Eigenschaft auch **perfekt** genannt. Es folgt, dass $\mathfrak{sl}(2, K)$ weder auflösbar noch nilpotent ist.
Sehen Sie sich zum Vergleich einmal die $\mathfrak{gl}(2, K)$ genauer an. Überzeugen Sie sich davon, dass $\mathfrak{sl}(2, K)$ die Kommutatoralgebra von $\mathfrak{gl}(2, K)$ ist. Überprüfen Sie, dass $\mathfrak{gl}(2, K)$ nichttriviales Zentrum besitzt.

Aufgabe 5 * 5.11.08

i) Zeige: Für jede Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ halbeinfach.

ii) Eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist auflösbar $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g} = 0$

Lösungshinweis

i) Bezeichne $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ die kanonische Surjektion. Sei $\mathfrak{a}$ ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}$. Dann ist $\pi^{-1}(\mathfrak{a})$ auflösbares Ideal in $\mathfrak{g}$, denn:

   Es gilt: $\pi^{-1}(\mathfrak{a})/\operatorname{rad}\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{a}$ (nach Konstruktion des Quotienten, Lemma 1.1.10 ii)), also ist $\pi^{-1}(\mathfrak{a})/\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ auflösbar. Da auch $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ auflösbar ist, folgt nach Lemma 1.2.5.ii), dass auch $\pi^{-1}(\mathfrak{a})$ auflösbar ist.

   Wegen der Maximalität von $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ ist dann aber $\operatorname{rad}\mathfrak{g} = \pi^{-1}(\mathfrak{a})$, also $\mathfrak{a} = 0$ in $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}$. Also ist $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ halbeinfach.

ii) „$\Rightarrow$“ Klar, da in diesem Fall $\mathfrak{g}$ sein eigenes Radikalideal ist, also $\mathfrak{g} = \operatorname{rad}\mathfrak{g}$.

   „$\Leftarrow$“ Ist $\mathfrak{g}$ nicht auflösbar, so ist $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ echt in $\mathfrak{g}$ enthalten, also $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g} \neq 0$.

Aufgabe 6 * 29.10.08

Beweisen Sie Lemma 1.2.3. i) aus der Vorlesung: Ist $\mathfrak{g}$ nilpotent, so auch alle Unter-Lie-Algebren von $\mathfrak{g}$ und alle Bilder von Lie-Algebren-Homomorphismen $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$.

Lösungshinweis

Sei $\mathfrak{g}$ zunächst eine beliebige Lie-Algebra.

Unteralgebren $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. Behauptung: $\mathfrak{h}^i \subseteq \mathfrak{g}^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, denn:
Für $i = 0$ ist die Behauptung richtig. Induktionsschritt: $\mathfrak{h}^{i+1} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^i] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^i] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i] = \mathfrak{g}^{i+1}$, wobei wir bei der zweiten Inklusion die Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{h}^i \subseteq \mathfrak{g}^i$ verwendet haben.

Bilder von Homomorphismen. Behauptung: $\varphi(\mathfrak{g})^i = \varphi(\mathfrak{g}^i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Für $i = 0$ ist die Behauptung sicher richtig. Induktionsschritt: $\varphi(\mathfrak{g})^{i+1} = [\varphi(\mathfrak{g}), \varphi(\mathfrak{g})^i] \overset{IV}{=} [\varphi(\mathfrak{g}), \varphi(\mathfrak{g}^i)] = \varphi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i]) = \varphi(\mathfrak{g}^{i+1})$, wobei wir im vorletzten Schritt verwendet haben, dass φ ein Homomorphismus ist.

Aus den obigen Hilfsüberlegungn folgen die beiden Behauptungen für eine nilpotente Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sofort, da mit $\mathfrak{g}^n = 0$ auch $\mathfrak{h}^n$ und $\varphi(\mathfrak{g})^n$ trivial sind.