

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1

Zeige: Quotienten halbeinfacher Moduln sind halbeinfach (Lemma 1.3.4. aus der Vorlesung).

Aufgabe 2 * 12.11.08

Beispiel zu Bem. 1.3.3.iv) aus der Vorlesung (siehe auch Ergänzungen und Korrekturen zur Vorlesung).

Bezeichne \mathfrak{a} die Abelsche \mathbb{R} -Lie-Algebra \mathbb{R} . Zeige, dass die Abbildung

$$\rho : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^2), \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Darstellung von \mathfrak{a} auf \mathbb{R}^2 definiert. Zeige, dass diese Darstellung nicht halbeinfach ist, dass also \mathbb{R}^2 mit der durch ρ gegebenen \mathfrak{a} -Modulstruktur kein halbeinfacher \mathfrak{a} -Modul ist.

Aufgabe 3 * 12.11.08

Sei V halbeinfacher \mathfrak{g} -Modul einer Lie-Algebra \mathfrak{g} . Zeige, dass sich V zerlegen läßt als eine direkte Summe $V \simeq V_0 \oplus V_{\mathfrak{g}}$ von \mathfrak{g} -Untermoduln

$$V_0 := \{v \in V \mid x.v = 0 \text{ für alle } x \in \mathfrak{g}\}, \quad V_{\mathfrak{g}} := \text{span} \{x.v \mid v \in V, x \in \mathfrak{g}\}$$

Finden Sie ein Beispiel für eine Lie-Algebra \mathfrak{g} und einen (nicht halbeinfachen) \mathfrak{g} -Modul V , der sich nicht wie oben zerlegen läßt.