

## Aufgabenblatt 2

### Aufgabe 1

Zeige: Quotienten halbeinfacher Moduln sind halbeinfach (Lemma 1.3.4. aus der Vorlesung).

### Aufgabe 2 \* 12.11.08

Beispiel zu Bem. 1.3.3.iv) aus der Vorlesung (siehe auch Ergänzungen und Korrekturen zur Vorlesung).

Bezeichne  $\mathfrak{a}$  die Abelsche  $\mathbb{R}$ -Lie-Algebra  $\mathbb{R}$ . Zeige, dass die Abbildung

$$\rho : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^2), \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Darstellung von  $\mathfrak{a}$  auf  $\mathbb{R}^2$  definiert. Zeige, dass diese Darstellung nicht halbeinfach ist, dass also  $\mathbb{R}^2$  mit der durch  $\rho$  gegebenen  $\mathfrak{a}$ -Modulstruktur kein halbeinfacher  $\mathfrak{a}$ -Modul ist.

### Aufgabe 3 \* 12.11.08

Sei  $V$  halbeinfacher  $\mathfrak{g}$ -Modul einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Zeige, dass sich  $V$  zerlegen läßt als eine direkte Summe  $V \simeq V_0 \oplus V_{\mathfrak{g}}$  von  $\mathfrak{g}$ -Untermoduln

$$V_0 := \{v \in V \mid x.v = 0 \text{ für alle } x \in \mathfrak{g}\}, \quad V_{\mathfrak{g}} := \text{span} \{x.v \mid v \in V, x \in \mathfrak{g}\}$$

Finden Sie ein Beispiel für eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  und einen (nicht halbeinfachen)  $\mathfrak{g}$ -Modul  $V$ , der sich nicht wie oben zerlegen läßt.