Dorothea Bahns
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1

Zeige: Quotienten halbeinfacher Moduln sind halbeinfach (Vorlesung, Lemma 1.3.4.).

Lösungshinweis

Sei V halbeinfach, $U \subseteq V$ ein Untermodul. Dann gibt es ein Modulkomplement $U' \subseteq V$ von U in V. Bezeichne $\pi : V \to V/U$ die kanonische Surjektion. Dann ist $U' \simeq V/U$ (als Moduln) und zwar über die Abbildung $\pi|_{U'}$. Als Untermodul eines halbeinfachen Moduls ist U' halbeinfach, also auch V/U.

Aufgabe 2 * 12.11.08

Beispiel zu Bem. 1.3.3.iv) aus der Vorlesung. **Wichtig:** Siehe auch Ergänzungen und Korrekturen zur Vorlesung (über stud.IP oder www.uni-math.gwdg.de/bahns).

Bezeichne $\mathfrak{a}$ die Abelsche $\mathbb{R}$-Lie-Algebra $\mathbb{R}$. Zeige, dass die Abbildung

$$\rho : \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^2)\ , \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Darstellung von $\mathfrak{a}$ auf $\mathbb{R}^2$ definiert. Zeige, dass diese Darstellung nicht halbeinfach ist, dass also $\mathbb{R}^2$ mit der durch ρ gegebenen $\mathfrak{a}$-Modulstruktur kein halbeinfacher $\mathfrak{a}$-Modul ist.

Lösungshinweis

Die Abbildung $\mathfrak{a} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, v) \mapsto \rho(x)v$ ist offensichtlich bilinear. Sie erfüllt die Darstellungseigenschaft, denn für alle $x, y \in \mathfrak{a}$ ist $[x, y] = 0$ und eine einfache Matrizenmultiplikation zeigt, dass auch $[\rho(x), \rho(y)] = 0$ gilt. Nun ist zu zeigen: $(\mathbb{R}^2, \rho)$ ist kein halbeinfacher $\mathfrak{a}$-Modul. Wir stellen fest:

$$U := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

ist ein $\mathfrak{a}$-Untermodul, denn $\rho(x)v = 0 \in U$ für alle $v \in U$. Jedoch besitzt U kein Modulkomplement in V. Denn: Jedes Vektorraum-Komplement von U in V ist von der Form

$$U_a := \left\{ \lambda \binom{a}{1} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

mit $a \in \mathbb{R}$, da jeder zu $\binom{\lambda}{0}$ mit $\lambda \neq 0$ linear unabhängige Vektor von der Form $\mu \binom{a}{1}$ mit $\mu \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$ beliebig, ist. Somit ist $\mathbb{R}^2 = U \oplus U_a$ als Vektorraum. Keiner dieser Unterräume U_a ist jedoch $\mathfrak{a}$-Untermodul, da für alle $x \in \mathfrak{a}$ und alle $v = (\mu a, \mu)^t \in U_a$ gilt: $\rho(x)v = \binom{x\mu}{0}$ also $\rho(x)v \notin U_a$ für $\mu \neq 0$.

Achtung: Es genügt **nicht**, nur das (bzgl. des kanonischen Skalarprodukts) orthogonale Komplement U_0 anzusehen!

Aufgabe 3 * 12.11.08

Sei V halbeinfacher $\mathfrak{g}$-Modul einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Zeige, dass sich V zerlegen läßt als eine direkte Summe $V \simeq V_0 \oplus V_{\mathfrak{g}}$ von $\mathfrak{g}$-Untermoduln

$$V_0 := \{v \in V \mid x.v = 0 \text{ für alle } x \in \mathfrak{g}\}\ , \qquad V_{\mathfrak{g}} := \text{span}\,\{x.v \mid v \in V\ ,\ x \in \mathfrak{g}\} = \text{span}\ \mathfrak{g}.V$$

Finden Sie ein Beispiel für eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und einen (nicht halbeinfachen) $\mathfrak{g}$-Modul V, der sich nicht wie oben zerlegen läßt.

Lösungshinweis

Klar ist: Für einen beliebigen Modul V ist V_0 Untermodul von V (nach Definition ist $\mathfrak{g}.V_0 = 0$).
Auch $V_{\mathfrak{g}}$ ist Untermodul von V (für V beliebig), denn $V_{\mathfrak{g}}$ ist Untervektorraum, da als Spann definiert, und $V_{\mathfrak{g}}$ ist abgeschlossen unter der Wirkung von $\mathfrak{g}$, da für alle $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ gilt: $x.v \in V_{\mathfrak{g}}$, insbesondere gilt dies also auch für $v \in V_{\mathfrak{g}} \subseteq V$.
Nun ist V nach Voraussetzung halbeinfach, also gibt es ein Modulkomplement U zu $V_{\mathfrak{g}}$ in V. Dieses ist in V_0 enthalten. Denn: $\mathfrak{g}.U \subseteq U \cap V_{\mathfrak{g}}$ (da U als Untermodul unter der Wirkung von $\mathfrak{g}$ invariant ist und für Unterräume U gilt $\mathfrak{g}.U \subseteq V_{\mathfrak{g}}$ nach Definition von $V_{\mathfrak{g}}$). Damit gilt jedoch $\mathfrak{g}.U = 0$, da der Schnitt $U \cap V_{\mathfrak{g}}$ nach Konstruktion trivial ist. Also ist $U \subseteq V_0$ und somit $V = U \oplus V_{\mathfrak{g}} = V_0 + V_{\mathfrak{g}}$.
Also ist nur noch zu zeigen: die Summe $V = V_0 + V_{\mathfrak{g}}$ ist direkt, also $V_0 \cap V_{\mathfrak{g}} = 0$. Sei dazu $W \subseteq V_{\mathfrak{g}}$ ein Modulkomplement zu $V_0 \cap V_{\mathfrak{g}}$ in $V_{\mathfrak{g}}$. Ein solches Komplement existiert, da $V_{\mathfrak{g}}$ als Untermodul eines halbeinfachen Moduls halbeinfach ist. Dann ist also $\mathfrak{g}.V = \mathfrak{g}.V_0 + \mathfrak{g}.V_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}.V_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}.(V_0 \cap V_{\mathfrak{g}}) + \mathfrak{g}.W = \mathfrak{g}.W \subseteq W$. Es folgt also: $V_{\mathfrak{g}} = \text{span}\ \mathfrak{g}.V \subseteq W$ und somit $W = V_{\mathfrak{g}}$, also $V_0 \cap V_{\mathfrak{g}} = 0$.

Obiger Satz liefert also ein (notwendiges) **Kriterium für die Halbeinfachheit** eines Moduls:

Betrachte etwa das Beispiel aus Aufgabe 2 ($V = \mathbb{R}^2$ mit der dort gegebenen Wirkung von $\mathfrak{a}$). Dort findet man schnell: $V_0 = U$ und $V_{\mathfrak{a}} = U$ (Bezeichnungen wie dort). Wegen $V \neq U$ kann V also keine Zerlegung wie im obigen Satz besitzen, also ist V nicht halbeinfach.