Dorothea Bahns
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1

Rekapitulieren Sie den Beweis von Satz 1.4.3 (Jordan-Zerlegung) anhand einer Beispiel-Matrix über $\mathbb{C}$. [Tipp: Betrachten Sie eine Matrix, die bereits in Jordan-Form vorliegt mit mindestens 2 Jordan-Kästchen verschiedener Größe. Aufwendig kann das Bestimmen der Polynome r_i (Notation wie in der Vorlesung) sein.]

Aufgabe 2

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul. Machen Sie sich klar, wie die Existenz einer Fahne $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ in V mit $\dim V_i = i$ und $\mathfrak{g}.V_i \subseteq V_i$ bzw. $\mathfrak{g}.V_i \subseteq V_{i-1}$ mit der Existenz einer Basis von V zusammenhängt, bezüglich der sich die Elemente von $\rho_V(\mathfrak{g})$ als (echte) obere Dreiecksmatrizen schreiben lassen. [Hinweis: Beachten Sie Abschnitt 1.1 der Vorlesung.]

Aufgabe 3 [ab 26.11.08]

Berechne die Cartan-Killing-Form von $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, K)$. Ist $\mathfrak{sl}(2, K)$ auflösbar?

Aufgabe 4

Wir haben in der Vorlesung gesehen (Satz von Engel), dass eine endlich-dimensionale Lie-Algebra genau dann nilpotent ist, wenn alle Elemente ad-nilpotent sind. Überlegen Sie sich ein Beispiel für eine Matrix-Lie-Algebra $\subset \mathfrak{gl}(V)$, V endlich-dimensionaler Vektorraum, die nilpotent ist, aber nicht nur nilpotente Endomorphismen enthält.

Aufgabe 5 * 3.12.08

Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ linearer Unterraum. Zeige, dass Normalisator $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ und Zentralisator $Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ (Definition 2.1.1. der Vorlesung) von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$ Unteralgebren von $\mathfrak{g}$ sind. Zeige außerdem, dass $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ ist, falls $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ Unter-Lie-Algebra ist.

Aufgabe 6 * 3.12.08

Sei K ein Körper der Charakteristik p (Primzahl). Betrachte die Matrizen $x, y \in M_p(K)$,

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & . & . & . & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & . & . & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad y = \operatorname{diag}(0, 1, 2, \ldots, p-1)$$

Zeige: x und y spannen eine 2-dimensionale *auflösbare* Liealgebra $\subset \mathfrak{g}l(K^p)$ auf (Hinweis: Berechne den Kommutator $[x, y]$). Zeige nun: x und y besitzen keinen gemeinsamen Eigenvektor.

Wichtige Folgerung: Der Satz von Lie gilt nicht über Körpern endlicher Charakteristik!