Lie-Algebren
Wintersemester 2008/09

Dorothea Bahns
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen

# Aufgabenblatt 3

### Aufgabe 1

Rekapitulieren Sie den Beweis von Satz 1.4.3 (Jordan-Zerlegung) anhand einer Beispiel-Matrix über $\mathbb{C}$. [Tipp: Betrachten Sie eine Matrix, die bereits in Jordan-Form vorliegt mit mindestens 2 Jordan-Kästchen verschiedener Größe. Aufwendig kann das Bestimmen der Polynome $r_i$ (Notation wie in der Vorlesung) sein.]

### Aufgabe 2

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul. Machen Sie sich klar, wie die Existenz einer Fahne $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ in $V$ mit $\dim V_i = i$ und $\mathfrak{g}.V_i \subseteq V_i$ bzw. $\mathfrak{g}.V_i \subseteq V_{i-1}$ mit der Existenz einer Basis von $V$ zusammenhängt, bezüglich der sich die Elemente von $\rho_V(\mathfrak{g})$ als (echte) obere Dreiecksmatrizen schreiben lassen. [Hinweis: Beachten Sie Abschnitt 1.1 der Vorlesung.]

### Aufgabe 3 [ab 26.11.08]

Berechne die Cartan-Killing-Form von $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, K)$. Ist $\mathfrak{sl}(2, K)$ auflösbar?

### Lösungshinweis

Man berechnet die Werte der Cartan-Killing-Form $\kappa(x_i, x_j)$ für $i \leq j \in \{1, 2, 3\}$ (das genügt, da $\kappa$ symmetrisch ist) mit $x_1 = x$, $x_2 = h$, $x_3 = y$ als Basis der $\mathfrak{sl}(2, K)$ (Notation wie Vorlesung bzw. Blatt 1, Aufgabe 4) und erhält

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt $\det \kappa = -128 \neq 0$ für $\mathrm{char} K \neq 2$, also ist die Cartan-Killing-Form von $\mathfrak{sl}(2, K)$ genau dann nicht ausgeartet, wenn $\mathrm{char} K \neq 2$.

Man liest an den Lie-Klammern der obigen Basis von $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, K)$ sofort ab, dass für $\mathrm{char} K \neq 2$ gilt $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, und kann direkt schlussfolgern, dass $\mathfrak{sl}(2, K)$ für $\mathrm{char} K \neq 2$ nicht auflösbar ist.
Ist $\mathrm{char} K = 2$, so ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathrm{span}_K\{h\}$, und $h$ ist die $2 \times 2$-Einheitsmatrix. Somit ist $\mathfrak{sl}(2, K)$ im Fall $\mathrm{char} K = 2$ auflösbar.

Dies ist natürlich konsistent mit dem Cartan-Kriterium (Satz 2.2.6), das für den Fall $\mathrm{char} K = 0$ besagt, dass $\mathfrak{g}$ genau dann auflösbar ist, wenn $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp = \mathfrak{g}$. Sei also $\mathrm{char} K = 0$ dann ist, wie oben bemerkt, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ und $\kappa$ nicht ausgeartet. Also folgt $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp = \mathfrak{g}^\perp = 0 \neq \mathfrak{g}$.

**Beachte:** Da wir schon wissen, dass $\mathfrak{sl}(2, K)$ für $\mathrm{char} K \neq 2$ einfach ist (also insbesondere halbeinfach), hätten wir die Nichtausgeartetheit der Cartan-Killing-Form $\kappa$ auch direkt aus Satz 2.3.2 folgern können, ohne sie zu berechnen.

**Aufgabe 4**

Wir haben in der Vorlesung gesehen (Satz von Engel), dass eine endlich-dimensionale Lie-Algebra genau dann nilpotent ist, wenn alle Elemente ad-nilpotent sind. Überlegen Sie sich ein Beispiel für eine Matrix-Lie-Algebra $\subset \mathfrak{gl}(V)$, $V$ endlich-dimensionaler Vektorraum, die nilpotent ist, aber nicht nur nilpotente Endomorphismen enthält.

**Lösungshinweis**

Sei $x \in \mathrm{Mat}(n, K)$ eine Diagonalmatrix ungleich 0. Sei $\mathfrak{g}$ von $x$ erzeugt. Dann ist $\mathfrak{g}$ Abelsche Unter-Lie-Algebra von von $\mathrm{Mat}(n, K)_L$. Also sind alle $x \in \mathfrak{g}$ ad-nilpotent, d.h. es gilt $\mathrm{ad}_x = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$, also ist $\mathfrak{g}$ nilpotent. Aber nicht alle Elemente von $\mathfrak{g}$ sind nilpotent.

**Aufgabe 5 * 3.12.08**

Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ linearer Unterraum. Zeige, dass Normalisator $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ und Zentralisator $Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$ (Definition 2.1.1. der Vorlesung) Unteralgebren von $\mathfrak{g}$ sind. Zeige außerdem, dass $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ ist, falls $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ Unter-Lie-Algebra ist.

**Lösungshinweis**

Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ linearer Unterraum.
Der Normalisator $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ ist linearer Unterraum von $\mathfrak{g}$: Seien $x_1, x_2 \in N_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$, dann gilt für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K$

$$[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \mathfrak{a}] = \lambda_1 \underbrace{[x_1, \mathfrak{a}]}_{\subseteq \mathfrak{a}} + \lambda_2 \underbrace{[x_2, \mathfrak{a}]}_{\subseteq \mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{a}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $\mathfrak{a}$ linearer Unterraum ist. $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ ist außerdem abgeschlossen unter Lie-Klammer-Bildung (also Unter-Lie-Algebra von $\mathfrak{g}$): Seien $x_1, x_2 \in N_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$, dann gilt wegen der Jacobi-Identität:

$$[[x_1, x_2], \mathfrak{a}] = -[[\mathfrak{a}, x_1], x_2] - [[x_2, \mathfrak{a}], x_1] \subseteq [\mathfrak{a}, x_2] + [\mathfrak{a}, x_1] \subseteq \mathfrak{a}$$

wobei wir wieder verwendet haben, dass $\mathfrak{a}$ linearer Unterraum ist.
Ebenso: Der Zentralisator $Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ ist linearer Unterraum von $\mathfrak{g}$, denn seien $x_1, x_2 \in Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$, dann gilt für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, dass $[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \mathfrak{a}] = \lambda_1[x_1, \mathfrak{a}] + \lambda_2[x_2, \mathfrak{a}] = 0$. Der Zentralisator $Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ ist außerdem abgeschlossen unter Lie-Klammer-Bildung (also Unter-Lie-Algebra von $\mathfrak{g}$): Seien $x_1, x_2 \in Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$, dann gilt wegen der Jacobi-Identität:

$$[[x_1, x_2], \mathfrak{a}] = -[[\mathfrak{a}, x_1], x_2] - [[x_2, \mathfrak{a}], x_1] = 0$$

Nach Definition des Normalisators gilt außerdem: $[x, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$ für alle $x \in N_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$, also ist $\mathfrak{a}$ ein $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$-Modul unter der adjungierten Wirkung ad.

**Beachte:** Wir haben bisher lediglich verwendet, dass $\mathfrak{a}$ linearer Unterraum ist!

Sei nun $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ Unter-Lie-Algebra, gelte also zusätzlich $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$. Dann ist $\mathfrak{a} \subseteq N_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ und somit ist $\mathfrak{a}$ Unter-Lie-Algebra von $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$. Also ist wegen $[x, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$ für alle $x \in N_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ in diesem Fall $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$.

**Aufgabe 6 * 3.12.08**

Sei $K$ ein Körper der Charakteristik $p$ (Primzahl). Betrachte die Matrizen $x, y \in M_p(K)$,

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & . & . & . & \dots & 1 \\ 1 & 0 & . & . & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad y = \mathrm{diag}(0, 1, 2, \dots, p-1)$$

Zeige: $x$ und $y$ spannen eine 2-dimensionale *auflösbare* Liealgebra $\subset \mathfrak{g}l(K^p)$ auf (Hinweis: Berechne den Kommutator $[x, y]$). Zeige nun: $x$ und $y$ besitzen keinen gemeinsamen Eigenvektor.

**Wichtige Folgerung:** Der Satz von Lie gilt nicht über Körpern endlicher Charakteristik!

**Lösungshinweis**

Man berechnet

$$[x, y] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & . & . & . & \dots & p-1 \\ 0 & 0 & . & . & \dots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & . & . & . & \dots & p-2 \\ p-1 & 0 & . & . & \dots & 0 \end{pmatrix} = x$$

wobei wir verwendet haben, dass $\mathrm{char} K = p$ ist, so dass $-(p-1) = 1$.

Also ist $\mathfrak{g} = \mathrm{span}_K\{x, y\}$ eine Unter-Liealgebra von $\mathfrak{gl}(K^p)$. Es folgt auch sofort, dass $\mathfrak{g}$ auflösbar ist, denn $[x, x] = 0$ also ist $\mathfrak{g}^{(2)} = 0$.

Die Eigenvektoren von $y$ zu den Eigenwerten $0, 1, 2, \dots, p-1$ sind die kanonischen Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_p$. Man sieht sofort, dass keiner von diesen ein Eigenvektor von $x$ ist.