Dorothea Bahns
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1 * 10.12.08

Zu Lemma 2.2.2 der Vorlesung.

1. Sei (V, ρ) eine endlich-dimensionale Darstellung einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Zeige: Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$ und V ein nilpotenter $\mathfrak{a}$-Modul, dann ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}^\perp$ (wobei das orthogonale Komplement bzgl. κ_ρ gebildet wird).

2. Folgere: Ist $\mathfrak{g}$ endlich-dimensional und $\mathfrak{a}$ ein nilpotentes Ideal von $\mathfrak{g}$, so gilt für die Cartan-Killing-Form κ, dass $\kappa(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = 0$.

Aufgabe 2 * 10.12.08

Berechne das Casimir-Element $C_{\beta,\rho}$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ zur nicht-ausgearteten Bilinearform β auf $\mathfrak{g}$ und den Lie-Algebren-Homomorphismus $\rho : \mathfrak{g} \to A_L$, A eine assoziative Algebra, (Notationen wie in der Vorlesung) für:

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, K)$ (siehe erste Vorlesung) als Teilmenge der 3×3-Matrizen über K (also $\rho(x) = x$ für alle $x \in \mathfrak{g}$) und $\beta(x, y) = \mathrm{tr}(xy)$.

2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, K)$, $\rho = \mathrm{ad}$ und $\beta = \kappa$ (Cartan-Killing-Form).

3. $\mathfrak{g}$ die Oszillatoralgebra (siehe Vorlesung vom 3. Dezember) als Teilmenge der Endomorphismen von $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (also $\rho(x) = x$ für alle $x \in \mathfrak{g}$) und β wie in der Vorlesung angegeben.

Aufgabe 3

Zeige: Ist $\mathfrak{g}$ endlich-dimensionale, halbeinfache Lie-Algebra, so sind alle Derivationen von $\mathfrak{g}$ innere, d.h. $Der(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}_\mathfrak{g}$.

Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu beweisen ist: Zeigen Sie zunächst, dass die Cartan-Killing-Form $\kappa_{\mathrm{ad}_\mathfrak{g}}$ von $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ nicht ausgeartet ist. Zeigen Sie dann, dass $\kappa_{\mathrm{ad}_\mathfrak{g}}$ die Einschränkung der Cartan-Killing-Form κ von $Der(\mathfrak{g})$ auf $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} \times \mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ ist. Zeigen Sie dann, dass das orthogonale Komplement (bzgl. κ) von $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ in $Der(\mathfrak{g})$ gleich 0 ist und folgern Sie die Behauptung.