Dorothea Bahns
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen

# Aufgabenblatt 4

**Aufgabe 1 * 10.12.08**

Zu Lemma 2.2.2 der Vorlesung.

1. Sei $(V, \rho)$ eine endlich-dimensionale Darstellung einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Zeige: Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$ und $V$ ein nilpotenter $\mathfrak{a}$-Modul, dann ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}^\perp$ (wobei das orthogonale Komplement bzgl. $\kappa_\rho$ gebildet wird).

2. Folgere: Ist $\mathfrak{g}$ endlich-dimensional und $\mathfrak{a}$ ein nilpotentes Ideal von $\mathfrak{g}$, so gilt für die Cartan-Killing-Form $\kappa$, dass $\kappa(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = 0$.

**Aufgabe 2 * 10.12.08**

Berechne das Casimir-Element $C_{\beta,\rho}$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ zur nicht-ausgearteten Bilinearform $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to K$ ($\mathrm{char} K = 0$) und den Lie-Algebren-Homomorphismus $\rho : \mathfrak{g} \to A_L$, $A$ eine assoziative Algebra, (Notationen wie in der Vorlesung) für:

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, K)$ (siehe erste Vorlesung) als Teilmenge der $3 \times 3$-Matrizen über $K$ (also $\rho(x) = x$ für alle $x \in \mathfrak{g}$) und $\beta(x, y) = \mathrm{tr}(xy)$.

2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, K)$, $\rho = \mathrm{ad}$ und $\beta = \kappa$ (Cartan-Killing-Form).

3. $\mathfrak{g}$ die Oszillatoralgebra (siehe Vorlesung vom 3. Dezember) als Teilmenge der Endomorphismen von $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (also $\rho(x) = x$ für alle $x \in \mathfrak{g}$) und $\beta$ wie in der Vorlesung angegeben.

**Lösungshinweis**

1. Zunächst überlegt man sich, dass $\dim \mathfrak{so}(3, K) = 3$ ist, da $3 \times 3$-Matrizen 3 Einträge oberhalb der Diagonalen besitzen. Dann findet man sofort, dass

$$l_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad l_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad l_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, K)$ bilden.

Die bezüglich $\beta(x, y) = \mathrm{tr}(xy)$ duale Basis ist

$$k_1 = -\tfrac{1}{2}\, l_1 , \quad k_2 = -\tfrac{1}{2}\, l_2 , \quad k_3 = -\tfrac{1}{2}\, l_3$$

Das rät man entweder (und überprüft es dann) oder man berechnet ausführlich für $a, b, c \in K$ die Matrixprodukte der $l_i$ für $i = 1, 2, 3$ mit $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ und liest die entsprechenden Spuren ab.

Somit gilt für das Casimir-Element $C_\beta \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, K)$

$$C_\beta = -\tfrac{1}{2}\ (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)$$

also $C_\beta$ ist gleich der Einheitsmatrix in $\mathrm{Mat}(3 \times 3, K)$. Die Studierenden der Physik sollten dieses Casimir-Element kennen – und bereits wissen, dass es mit allen $l_i$ vertauscht.

Beachte: wählt man $\beta(x, y) = -\mathrm{tr}(xy)$ (die üblichere Konvention), ändert sich das Vorzeichen von $C$, da in diesem Fall $k_i = \frac{1}{2}\, l_i$ für $i = 1, 2, 3$ ist.

**Bemerkung:** Der verwendete Lie-Algebren-Homomorphismus $\rho$ definiert eine Darstellung von $\mathfrak{so}(3, K)$ auf $K^3$ (die sogenannte Fundamentaldarstellung). In dieser Darstellung gilt also: $C_\beta$ ist gleich der Einheitsmatrix.

Betrachte nun allgemein einen Lie-Algebren-Homomorphismus $\rho : \mathfrak{g} \to A_L$ ($A$ eine Matrix-Algebra) und $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to K$ mit $\beta(x, y) = -\mathrm{tr}(xy)$. Dann ist das zugehörige Casimir-Element in $A$

$$C_\beta = \tfrac{1}{2}\ (\rho(l_1)^2 + \rho(l_2)^2 + \rho(l_3)^2)$$

**Wichtig:** Überlegen Sie sich, dass dieses Casimir-Element $C_\beta$ proportional zur Einheitsmatrix ist, wenn $\rho$ eine *irreduzible* Matrix-Darstellung über $\mathbb{C}$ ist (Stichwort: Lemma von Schur).

2. Durch Raten und Überprüfen (oder durch Nachrechnen) findet man:

   Die zu $(\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_h, \mathrm{ad}_y)$,

$$\mathrm{ad}_x = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \mathrm{ad}_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\ ,\ \mathrm{ad}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   (siehe Lösungen zu Aufgabenblatt 1) duale Basis bezüglich der Cartan-Killing-Form ist $(\frac{1}{4}\,\mathrm{ad}_y, \frac{1}{8}\,\mathrm{ad}_h, \frac{1}{4}\,\mathrm{ad}_x)$, denn $\mathrm{ad}_x\ \mathrm{ad}_y = \mathrm{diag}(2, 2, 0)$, $\mathrm{ad}_h\ \mathrm{ad}_h = \mathrm{diag}(4, 0, 4)$ und $\mathrm{ad}_y\ \mathrm{ad}_x = \mathrm{diag}(0, 2, 2)$.

   Also ist das gesuchte Casimir-Element in $\mathrm{Mat}(3 \times 3, K)$

$$C_\kappa = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y + \tfrac{1}{8}\,\mathrm{ad}_h\,\mathrm{ad}_h + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x = \text{ die Einheitsmatrix}$$

3. In den Notationen der Vorlesung gilt: Die duale Basis zu $(P, Q, id, H)$ ist $(P, Q, H, id)$, was man direkt an der Definition von $\beta$ abliest.

   Somit gilt für das Casimir-Element

$$C_\beta = P^2 + Q^2 + 2\,H = 0$$

## Aufgabe 3

Zeige: Ist $\mathfrak{g}$ endlich-dimensionale, halbeinfache Lie-Algebra, so sind alle Derivationen von $\mathfrak{g}$ innere, d.h. $Der(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$.

Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu beweisen ist: Zeigen Sie zunächst, dass die Cartan-Killing-Form $\kappa_{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}}$ von $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ nicht ausgeartet ist. Zeigen Sie dann, dass $\kappa_{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}}$ die Einschränkung der Cartan-Killing-Form $\kappa$ von $Der(\mathfrak{g})$ auf $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} \times \mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ ist. Zeigen Sie dann, dass das orthogonale Komplement (bzgl. $\kappa$) von $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ in $Der(\mathfrak{g})$ gleich 0 ist und folgern Sie die Behauptung.

**Lösungshinweis**

$\mathfrak{g}$ ist halbeinfach, also ist $Z(\mathfrak{g}) = 0$. Somit ist $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{ad}_\mathfrak{g}$, $\mathrm{ad} : x \mapsto \mathrm{ad}_x$, ein Isomorphismus von Lie-Algebren. Somit ist auch die Cartan-Killing-Form $\kappa_{\mathrm{ad}_\mathfrak{g}}$ nicht ausgeartet.
Außerdem ist $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ Ideal in $Der(\mathfrak{g})$, da für alle $\partial \in Der(\mathfrak{g})$ und alle $x \in \mathfrak{g}$ gilt:

$$[\partial, \mathrm{ad}_x] = \mathrm{ad}_{\partial(x)} \tag{1}$$

(vgl. Vorlesung Lemma 2.2.3). Es gilt also $[Der(\mathfrak{g}), \mathrm{ad}_\mathfrak{g}] \subseteq \mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ und somit ist die Cartan-Killing-Form $\kappa_{\mathrm{ad}_\mathfrak{g}}$ von $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ gleich der Einschränkung der Cartan-Killing-Form $\kappa$ von $Der(\mathfrak{g})$ auf $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} \times \mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ (Lemma 2.2.5).
Insbesondere folgt somit aus der Nicht-Ausgeartetheit der Killing-Form für das orthogonale Komplement $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp$ (bzgl. $\kappa$) von $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ in $Der(\mathfrak{g})$: $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp \cap \mathrm{ad}_\mathfrak{g} = 0$.
Da für zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gilt $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, folgt also speziell $[\mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp, \mathrm{ad}_\mathfrak{g}] = 0$ (Lemma 2.2.4).
Somit folgt für $\partial \in \mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp \subset \mathfrak{g}$ unter Verwendung von (1), dass $\mathrm{ad}_{\partial(x)} = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Da ad ein Isomorphismus ist, folgt daraus $\partial(x) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$, also ist $\partial = 0$, somit ist $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}^\perp = 0$ und daher $Der(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}_\mathfrak{g}$.