Dorothea Bahns
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen

Aufgabenblatt 5

Aufgabe zur absoluten (abstrakten) Jordan-Zerlegung [17.12.08]

Beweisen Sie Hilfslemma 2.4.3 aus der Vorlesung:

Sei V endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum, sei $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ halbeinfache Unter-Liealgebra. Sei $x \in \mathfrak{g}$. Für die Jordan-Zerlegung $x = x_s + x_n$ von x in $\mathrm{End}(V)$ gilt $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$.

Bemerkung: Dass dies eine nicht-triviale Aussage ist, für die die Halbeinfachheit von $\mathfrak{g}$ wichtig ist, habe ich Ihnen in der Vorlesung gezeigt (Gegenbeispiel).

Hinweise zu einem möglichen Beweis

a) Zunächst zeigt man: $\mathfrak{g} = N$, wobei

$$N := N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) \ \cap \bigcap_{\substack{U \subseteq V \\ U \ \mathfrak{g}\text{-Untermodul}}} M_{\mathfrak{gl}(V)}(U)$$

mit $N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}\}$ der Normalisator von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{gl}(V)$ und

$$M_{\mathfrak{gl}(V)}(U) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid xU \subseteq U \text{ und } \mathrm{tr}|_U\, x = 0\}$$

für ein $\mathfrak{g}$-Untermodul $U \subseteq V$.

Achtung: In der Definition von $M_{\mathfrak{gl}(V)}(U)$ ist die Bedingung $xU \subseteq U$ nicht-trivial, da U nicht notwendig ein $\mathfrak{gl}(V)$-Untermodul ist.

Hinweis zu "$\subseteq$": für die Inklusion $\mathfrak{g} \subseteq N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ siehe Übungsblatt 3, für die Inklusion $\mathfrak{g} \subseteq M_{\mathfrak{gl}(V)}(U)$ verwende $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (Halbeinfachheit!).

Hinweis zu "$\supseteq$": Verwenden Sie Hilfslemma 2.4.2 um N in $N = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}$ zu zerlegen. Überlegen Sie sich, dass für alle $x \in \mathfrak{a}$ und alle $\mathfrak{g}$-Untermoduln U gilt: $x|_U \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(U)$ und folgern Sie, dass in dem Fall, in dem U einfach ist, das Lemma von Schur (wir arbeiten über $\mathbb{C}$) zusammen mit der Spur-Bedingung in der Definition von $M_{\mathfrak{gl}(V)}(U)$ liefert, dass $x|_U = 0$ gilt. Wenden Sie nun den Satz von Weyl an (Halbeinfachheit von $\mathfrak{g}$ impliziert die Existenz einer Zerlegung von V in eine Summe einfacher $\mathfrak{g}$-Moduln) und folgern Sie $\mathfrak{a} = 0$.

b) Zeigen Sie: $x \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ impliziert $x_s \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ und $x_n \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ (Hinweis: $x \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ genau dann, wenn $\mathrm{ad}_x(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$)

c) Zeigen Sie: $x \in M_{\mathfrak{gl}(V)}(U)$ impliziert $x_s \in M_{\mathfrak{gl}(V)}(U)$ und $x_n \in M_{\mathfrak{gl}(V)}(U)$ (Hinweis für $x_sU \subseteq U$ und $x_nU \subseteq U$: Denken Sie an den Beweis der Jordanzerlegung (Satz 1.4.3) – was galt für die Polynome, mithilfe derer wir den diagonalisierbaren und nilpotenten Anteil eines Endomorphismus konstruierten?)