Lie-Algebren
Wintersemester 2008/09

Dorothea Bahns
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen

Aufgabenblatt 5

Aufgabe zur absoluten (abstrakten) Jordan-Zerlegung [17.12.08]

Beweisen Sie Hilfslemma 2.4.3 aus der Vorlesung:

Sei V endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum, sei $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ halbeinfache Unter-Liealgebra. Sei $x \in \mathfrak{g}$. Für die Jordan-Zerlegung $x = x_s + x_n$ von x in $\mathrm{End}(V)$ gilt $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$.

Bemerkung: Dass dies eine nicht-triviale Aussage ist, für die die Halbeinfachheit von $\mathfrak{g}$ wichtig ist, habe ich Ihnen in der Vorlesung gezeigt (Gegenbeispiel).

Hinweise zu einem möglichen Beweis

a) Zunächst zeigt man: $\mathfrak{g} = N$, wobei

$$N := N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) \ \cap \bigcap_{\substack{U \subseteq V \\ U\ \mathfrak{g}\text{-Untermodul}}} M_{\mathfrak{gl}(V)}(U)$$

mit $N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}\}$ der Normalisator von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{gl}(V)$ und

$$M_{\mathfrak{gl}(V)}(U) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid xU \subseteq U \text{ und } \mathrm{tr}|_U\, x = 0\}$$

für ein $\mathfrak{g}$-Untermodul $U \subseteq V$.

Achtung: In der Definition von $M_{\mathfrak{gl}(V)}(U)$ ist die Bedingung $xU \subseteq U$ nicht-trivial, da U nicht notwendig ein $\mathfrak{gl}(V)$-Untermodul ist.

Hinweis zu „$\subseteq$“: Für die Inklusion $\mathfrak{g} \subseteq N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ siehe Übungsblatt 3, für die Inklusion $\mathfrak{g} \subseteq M_{\mathfrak{gl}(V)}(U)$ verwende $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (Halbeinfachheit!).

Hinweis zu „$\supseteq$“: Verwenden Sie Hilfslemma 2.4.2 um N in $N = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}$ zu zerlegen. Überlegen Sie sich, dass für alle $x \in \mathfrak{a}$ und alle $\mathfrak{g}$-Untermoduln U gilt: $x|_U \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(U)$ und folgern Sie, dass in dem Fall, in dem U einfach ist, das Lemma von Schur (wir arbeiten über $\mathbb{C}$) zusammen mit der Spur-Bedingung in der Definition von $M_{\mathfrak{gl}(V)}(U)$ liefert, dass $x|_U = 0$ gilt. Wenden Sie nun den Satz von Weyl an (Halbeinfachheit von $\mathfrak{g}$ impliziert die Existenz einer Zerlegung von V in eine Summe einfacher $\mathfrak{g}$-Moduln) und folgern Sie $\mathfrak{a} = 0$.

Lösungshinweis

„$\subseteq$“: $\mathfrak{g} \subseteq N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ ist klar, denn $\mathfrak{g}$ ist Lie-Algebra. Da U nach Voraussetzung $\mathfrak{g}$-Untermodul ist, gilt $\mathfrak{g}U \subseteq U$, und wegen $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ läßt sich jedes $x \in \mathfrak{g}$ zerlegen in eine Summe von Lie-Klammern (Kommutatoren),

$$x = \sum_i [y_i, z_i]\ , \qquad y_i, z_i \in \mathfrak{g}$$

also verschwindet $\operatorname{tr}|_U x = 0$.

„$\supseteq$“: Nach Hilfslemma 2.4.2 gibt es ein Ideal $\mathfrak{a}$, so dass $N = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}$. Insbesondere ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = 0$, also gilt für alle $x \in \mathfrak{a}$ und alle $\mathfrak{g}$-Untermoduln U: $x|_U \in \operatorname{End}_{\mathfrak{g}}(U)$. Ist U einfach, wirkt x also nach dem Lemma von Schur als Vielfaches der Identität, so dass $\operatorname{tr}|_U x = 0$ impliziert, dass $x|_U = 0$. Wegen des Satzes von Weyl ist V direkte Summe einfacher $\mathfrak{g}$-Moduln, also ist $x = 0$. Damit ist $\mathfrak{a} = 0$.

b) Zeigen Sie: $x \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ impliziert $x_s \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ und $x_n \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$. Hinweis: $x \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ genau dann, wenn $\operatorname{ad}_x(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$.

Lösungshinweis

Es ist $x \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ genau dann, wenn $\operatorname{ad}_x(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$. Da sich nach dem Satz über die Jordan-Zerlegung von Endomorphismen (Satz 1.4.3) $(\operatorname{ad}_x)_s$ und $(\operatorname{ad}_x)_n$ als Polynome in ad_x ohne konstanten Term schreiben lassen, impliziert $\operatorname{ad}_x(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$, dass $(\operatorname{ad}_x)_s(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$ und $(\operatorname{ad}_x)_n(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$. Wegen Korollar 1.4.5 ist $(\operatorname{ad}_x)_s = \operatorname{ad}_{x_s}$, also gilt $\operatorname{ad}_{x_s}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$, also $x_s \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ (ebenso für den nilpotenten Anteil).

c) Zeigen Sie: $x \in M_{\mathfrak{gl}(V)}(U)$ impliziert $x_s \in M_{\mathfrak{gl}(V)}(U)$ und $x_n \in M_{\mathfrak{gl}(V)}(U)$.

Lösungshinweis

Sei also $x \in M_{\mathfrak{gl}(V)}(U)$. Nach dem Satz über die Jordan-Zerlegung von Endomorphismen (Satz 1.4.3) lassen sich x_s und x_n als Polynome in x ohne konstanten Term schreiben. Somit ist $x_s U \subseteq U$ und $x_n U \subseteq U$. Die Spur $\operatorname{tr} x_n$ verschwindet, somit ist $\operatorname{tr} x_s = \operatorname{tr}(x - x_n) = 0$.

Mit a) folgt also aus b) und c), dass $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$.