Dorothea Bahns
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen

# Aufgabenblatt 6

## Aufgabe 1

Betrachte die spezielle lineare Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, K)$ über einem Körper $K$ der Charakteristik 0. Bezeichne wie immer $x, h, y$ die Standardbasis von $\mathfrak{sl}(2, K)$ (siehe Aufgabenblatt 1).

Zeige: $\mathfrak{sl}(2, K) = K\,h \oplus K\,x \oplus K\,y$ ist Wurzelzerlegung von $\mathfrak{sl}(2, K)$ bezüglich der toralen Lie-Algebra $K\,h$.

## Aufgabe 2 Die Witt-Algebra

Betrachte die (assoziative) Algebra $V := K[t, t^{-1}]$ der Laurentpolynome über einem Körper $K$ der Charakteristik 0. Zu $f \in V$ definiere $\tilde{\partial}_f := f\frac{d}{dt} \in Der(V)$. Man kann zeigen, dass jede Derivation von $V$ von dieser Form ist und dass $B := \{\partial_k := \tilde{\partial}_{-t^{k+1}} = -t^{k+1}\frac{d}{dt} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ eine Basis von $Der(V)$ ist.

1. Zeige: Die Lie-Klammer auf $\mathfrak{g} = Der(V)$ ist

$$[\tilde{\partial}_f, \tilde{\partial}_g] = \tilde{\partial}_{fg'-f'g} \qquad \text{für alle } f, g \in V$$

mit der (formalen) Ableitung $f'$ von $f \in V$, beziehungsweise speziell für die Elemente der Basis $B$,

$$[\partial_k, \partial_l] = (k - l)\,\partial_{k+l} \qquad \text{für alle } k, l \in \mathbb{Z}$$

2. Bezeichne $\mathfrak{h} := K\partial_0 \subset Der(V)$. Zeige:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\beta \in R} \mathfrak{g}^\beta$$

mit $R := \{k\alpha \mid k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$, wobei $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ mit $\alpha(\partial_0) := -1$, ist eine Wurzelzerlegung von $\mathfrak{g} = Der(V)$ bezüglich $\mathfrak{h}$. Hinweis: Denken Sie an Bemerkung 3.1.11.iii) der Vorlesung.

**Bemerkung** Die Virasoro-Algebra, die in der konformen Feldtheorie und der Stringtheorie eine grosse Rolle spielt, ist eine sogenannte zentrale Erweiterung der Witt-Algebra. Mehr dazu in den Lösungshinweisen.

## Aufgabe 3 Die Oszillatoralgebra (Erzeuger/Vernichter-Formalismus)

Betrachte die (assoziative) Algebra $V := K[t]$ der Polynome über einem Körper $K$ der Charakteristik 0. Zu $f \in V$ definiere Abbildungen $M_f$ und $P_f \in \mathrm{End}(V)$ über $M_f(g) := fg$ und $P_f(g) := f\frac{d}{dt}g$ (vgl. letzteres mit der Definition von $\tilde{\partial}_f$ in Aufgabe 2).

1. Zeige: Für die Lieklammer auf $\mathrm{End}(V)_L$ (also den Kommutator) gilt:

$$[P_g, M_f] = M_{gf'} \qquad \text{für alle } f, g \in V$$

und speziell $[P_1, M_t] = 1$. Wir benennen im folgenden

$$A := P_1 \quad \text{und} \quad A^+ := M_t \quad \text{sowie} \quad N := P_t = t\,\tfrac{d}{dt} = A^+A\ .$$

$N$ wird Euler-Operator oder Besetzungszahl-Operator genannt. Berechne die Kommutatoren $[N, A]$ und $[N, A^+]$ und folgere:

$$\mathfrak{g} := \mathrm{Spann}_K\{1, A^+, A, N\} \subset \mathrm{End}(V)_L$$

ist eine Lie-Unteralgebra von $\mathrm{End}(V)_L$. Sie wird auch als Oszillatoralgebra bezeichnet. Folgere außerdem $\mathfrak{h} := \mathrm{Spann}_K\{1, N\}$ ist Abelsche Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.

2. Zeige, dass mit $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, wobei $\alpha(1) := 0$ und $\alpha(N) := 1$,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$$

eine Wurzelzerlegung von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$ ist. Bestimme hierzu auch $\mathfrak{g}^{\alpha}$ und $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ explizit.

3. Vor allem für Studierende der Physik:

   (a) Es ist offensichtlich $Z(\mathfrak{g}) = K\,1$. Zeige, dass $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathrm{Spann}_K\{1, A^+, A\} = Z(\mathfrak{g}) + \mathfrak{g}^{\alpha} + \mathfrak{g}^{-\alpha}$ ist (Heisenberg-Algebra).

   (b) Klar ist, dass die Menge $B := \{t^k \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ eine Basis der Polynomalgebra $V$ ist. Zeige, dass alle Elemente dieser Basis Eigenvektoren von $N$ sind.

   Bestimme mithilfe von $\mu \in \mathfrak{h}^*$, wobei $\mu(1) = 1$, $\mu(N) = 0$, die $\mathfrak{h}$-Gewichte auf $V$, also die Gewichte $\in P_V(\mathfrak{h})$.

   (c) Betrachte $H := \frac{1}{4}\,[(A^+)^2, A^2] \in \mathrm{End}(V)$ und bestimme die Eigenwerte von $H$ bezüglich der Basis $B$. Vereinfache den Ausdruck für $H$.

Kennen Sie $H$ und $N$ aus der Quantenmechanik-Vorlesung?

**Bitte beachten:**

Während der vorlesungsfreien Zeit werde ich Erläuterungen zu zwei ergänzenden Themen im Internet (Homepage zur Vorlesung und StudIP) bereitstellen. Themen: 1) Tensorprodukt von Moduln 2) (nicht klausurrelevant) Lineare Lie-Gruppen und die Exponential-Abbildung.
Bitte beachten Sie auch, dass ich über Weihnachten auch die versprochenen Ergänzungen zur Gültigkeit der Sätze des Abschnitts 3.1 der Vorlesung für unendlich-dimensionale Moduln im Internet bereitstellen werde.