Lie-Algebren
Wintersemester 2008/09

Dorothea Bahns
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1

Betrachte die spezielle lineare Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, K)$ über einem Körper K der Charakteristik 0. Bezeichne wie immer x, h, y die Standardbasis von $\mathfrak{sl}(2, K)$ (siehe Aufgabenblatt 1).

Zeige: $\mathfrak{sl}(2, K) = K\,h \oplus K\,x \oplus K\,y$ ist Wurzelzerlegung von $\mathfrak{sl}(2, K)$ bezüglich der toralen Lie-Algebra $K\,h$.

Lösungshinweis

$\mathfrak{h} := K\,h$ ist Abelsch und mit $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ definiert über $\alpha(h) := 2$ gilt $[z, x] = \alpha(z)x$ und $[z, y] = -\alpha(z)y$ für alle $z \in \mathfrak{h}$. Also ist $\mathfrak{h}$ torale Cartan-Unteralgebra und $\mathfrak{sl}(2, K) = \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$ mit $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}^\alpha = K\,x$ und $\mathfrak{g}^{-\alpha} = K\,y$.

Aufgabe 2 Die Witt-Algebra

Betrachte die (assoziative) Algebra $V := K[t, t^{-1}]$ der Laurentpolynome über einem Körper K der Charakteristik 0. Zu $f \in V$ definiere $\tilde{\partial}_f := f\frac{d}{dt} \in Der(V)$. Man kann zeigen, dass jede Derivation von V von dieser Form ist und dass $B := \{\partial_k := \tilde{\partial}_{-t^{k+1}} = -t^{k+1}\frac{d}{dt} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ eine Basis von $Der(V)$ ist.

1. Zeige: Die Lie-Klammer auf $\mathfrak{g} = Der(V)$ ist

$$[\tilde{\partial}_f, \tilde{\partial}_g] = \tilde{\partial}_{fg'-f'g} \qquad \text{für alle } f, g \in V$$

mit der (formalen) Ableitung f' von $f \in V$. Speziell für die Elemente der Basis B gilt

$$[\partial_k, \partial_l] = (k - l)\,\partial_{k+l} \qquad \text{für alle } k, l \in \mathbb{Z}$$

Lösungshinweis

Wir müssen nur die Wirkung von $[\tilde{\partial}_f, \tilde{\partial}_g]$ auf ein Element $h \in V$ berechnen:

$$\tilde{\partial}_f\,\tilde{\partial}_g(h) - \tilde{\partial}_g\,\tilde{\partial}_f(h) = f\tfrac{d}{dt}(gh') - g\tfrac{d}{dt}(fh') = fg'h' + fgh'' - gf'h' - gfh'' = (fg' - gf')h'$$

Daraus folgt die Behauptung.

2. Bezeichne $\mathfrak{h} := K\partial_0 \subset Der(V)$. Zeige:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\beta \in R} \mathfrak{g}^\beta$$

mit $R := \{k\alpha \mid k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$, wobei $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ mit $\alpha(\partial_0) := -1$, ist eine Wurzelzerlegung von $\mathfrak{g} = Der(V)$ bezüglich $\mathfrak{h}$. Hinweis: Denken Sie an Bemerkung 3.1.11.iii) der Vorlesung.

Lösungshinweis

Zunächst stellen wir fest, dass $G := \{0\} \cup R \subseteq \mathfrak{h}^*$ Abelsche Gruppe (bezüglich der Addition) ist. Aus 1. folgt sofort, dass für $\mathfrak{g}^{k\alpha} := K\partial_k$, $k \in \mathbb{Z}$, gilt, dass $[\mathfrak{g}^{k\alpha}, \mathfrak{g}^{l\alpha}] \subseteq \mathfrak{g}^{(k+l)\alpha}$ für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ ist, und dass $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$ Abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist. Insbesondere folgt auch auch $[y, x] = k\alpha(y)x$ für alle $y \in \mathfrak{g}^0$ und $x \in \mathfrak{g}^{k\alpha}$, $k \in \mathbb{Z}$, so dass die Behauptung aus Bemerkung 3.1.11.iii folgt.

Bemerkung Die Virasoro-Algebra, die in der konformen Feldtheorie und der Stringtheorie eine grosse Rolle spielt, ist eine sogenannte zentrale Erweiterung der Witt-Algebra. Mehr dazu als Ergänzung zur Vorlesung.

Aufgabe 3 Die Oszillatoralgebra (Erzeuger/Vernichter-Formalismus)

Betrachte die (assoziative) Algebra $V := K[t]$ der Polynome über einem Körper K der Charakteristik 0. Zu $f \in V$ definiere Abbildungen M_f und $P_f \in \mathrm{End}(V)$ über $M_f(g) := fg$ und $P_f(g) := f\frac{d}{dt}g$ (vgl. letzteres mit der Definition von $\tilde{\partial}_f$ in Aufgabe 2).

1. Zeige: Für die Lieklammer auf $\mathrm{End}(V)_L$ (also den Kommutator) gilt:

$$[P_g, M_f] = M_{gf'} \qquad \text{für alle } f, g \in V$$

und speziell $[P_1, M_t] = \mathbf{1}$. Wir benennen im folgenden

$$A := P_1 \;\text{ und }\; A^+ := M_t \;\text{ sowie }\; N := P_t = t\,\tfrac{d}{dt} = A^+A\ .$$

N wird Euler-Operator oder Besetzungszahl-Operator genannt. Berechne die Kommutatoren $[N, A]$ und $[N, A^+]$ und folgere:

$$\mathfrak{g} := \mathrm{Spann}_K\{\mathbf{1}, A^+, A, N\} \subset \mathrm{End}(V)_L$$

ist eine Lie-Unteralgebra von $\mathrm{End}(V)_L$. Sie wird auch als Oszillatoralgebra bezeichnet. Folgere außerdem $\mathfrak{h} := \mathrm{Spann}_K\{\mathbf{1}, N\}$ ist Abelsche Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.

Lösungshinweis

$[P_g, M_f] = M_{gf'}$ für alle $f, g \in V$ folgt sofort aus der Produktregel (vgl. Aufgabe 2).

Um die Kommutatoren mit N zu berechnen, ist die Formel

$$[a, bc] = [a, b]c + b[a, c]$$

hilfreich, die allgemein in assoziativen Algebren $\mathfrak{A}$ gilt: für $a \in \mathfrak{A}$ ist ad_a nicht nur eine Derivation der Lie-Klammer (also hier des Kommutators) sondern auch der assoziativen Struktur, also $\mathrm{ad}_a(bc) = \mathrm{ad}_a(b)\,c + b\,\mathrm{ad}_a(c)$ für $a, b, c \in \mathfrak{A}$ (siehe Kapitel 1 der Vorlesung oder per Nachrechnen direkt: $[a, bc] = abc - bca = abc - bac + bac - bca = [a, b]c + b[a, c]$).

Es gilt also

$$[A, A^+] = \mathbf{1}\ , \qquad [A, N] = [A, A^+]A = A\ , \qquad [A^+, N] = A^+[A^+, A] = -A^+$$

also ist $\mathfrak{g}$ Lie-Unteralgebra. Dass $\mathfrak{h}$ Abelsche Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist, ist klar.

2. Zeige, dass mit $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, wobei $\alpha(\mathbf{1}) := 0$ und $\alpha(N) := 1$,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$$

eine Wurzelzerlegung von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$ ist. Bestimme hierzu auch $\mathfrak{g}^\alpha$ und $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ explizit.

Lösungshinweis

Entweder mithilfe von Bemerkung 3.1.11.iii) oder direkt:

Mithilfe der Kommutator-Relationen aus 1. zeigt man leicht, dass $\mathfrak{h}$ torale Cartan-Unteralgebra ist und $R = \{\pm\alpha\}$, wobei für die zugehörigen Wurzelräume gilt $\mathfrak{g}^\alpha = KA^+$ und $\mathfrak{g}^{-\alpha} = KA$.

3. Vor allem für Studierende der Physik:

(a) Es ist offensichtlich $Z(\mathfrak{g}) = K\,\mathbf{1}$. Zeige, dass $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathrm{Spann}_K\{1, A^+, A\} = Z(\mathfrak{g}) + \mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha}$ ist (Heisenberg-Algebra).

Lösungshinweis

$Z(\mathfrak{g}) = K\,\mathbf{1}$ folgt sofort aus den Kommutatorrelationen aus 1. Wegen

$$\begin{aligned} & [\lambda_1 A + \mu_1 A^+ + \rho_1 N + \sigma_1 \mathbf{1}\ ,\ \lambda_2 A + \mu_2 A^+ + \rho_2 N + \sigma_2 \mathbf{1}] \\ = \ & (\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)\,\mathbf{1} + \lambda_1\rho_2 A - \mu_1\rho_2 A^+ \qquad \text{für alle } \lambda_i, \mu_i, \rho_i, \sigma_i \in K \end{aligned}$$

folgt die erste Gleichheit für $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Die zweite folgt dann mit 2. und $K\,\mathbf{1} = Z(\mathfrak{g})$. Dies ist in der Tat die Heisenberg-Algebra, denn für alle $z \in \mathbb{Z}(\mathfrak{g})$, $x \in \mathfrak{g}^\alpha$, $y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ gibt es $\lambda, \rho, \mu \in K$, so dass $z = \lambda\mathbf{1}$, $x = \rho A^+$ und $y = \mu A$, und es gilt

$$[\mathbf{1}, A^+] = 0 = [\mathbf{1}, A]\ , \qquad [A, A^+] = \mathbf{1}$$

was die Relationen der (3-dimensionalen) Heisenberg-Algebra sind.

(b) Klar ist, dass die Menge $B := \{t^k \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ eine Basis der Polynomalgebra V ist. Zeige, dass alle Elemente dieser Basis Eigenvektoren von N sind.

Bestimme mithilfe von $\mu \in \mathfrak{h}^*$, wobei $\mu(\mathbf{1}) := 1$, $\mu(N) := 0$, die $\mathfrak{h}$-Gewichte auf V, also die Gewichte $\in P_V(\mathfrak{h})$.

Lösungshinweis

Es ist $N\,t^k = k\,t^k$, also ist B eine Basis von V aus Eigenvektoren von N. Sei $y = \lambda\mathbf{1} + \rho N \in \mathfrak{h}$, also $\lambda, \rho \in K$, dann ist also $y\,t^k = (\mu(y) + k\,\alpha(y))t^k$ mit μ wie oben und α wie in 2. Also ist $P_V(\mathfrak{h}) = \mu + \mathbb{Z}_{\geq 0}\,\alpha$.

(c) Betrachte $H := -\frac{1}{4}\,[(A^+)^2, A^2] \in \mathrm{End}(V)$ (Achtung: Vorzeichen in der ursprünglichen Aufgabenstellung war falsch) und bestimme die Eigenwerte von H bezüglich der Basis B. Vereinfache den Ausdruck für H.

Lösungshinweis

Es ist $At^k = k\,t^{k-1}$ und $A^+t^k = t^{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, woraus sich ergibt:

$$\begin{aligned} Ht^k &= -\tfrac{1}{4}\,(\,(A^+)^2\,A^2\,t^k - A^2\,(A^+)^2\,t^k\,) \;=\; -\tfrac{1}{4}\,(\,k(k-1)-(k+2)(k+1)\,)\,t^k \\ &= (k+\tfrac{1}{2})\,t^k \end{aligned}$$

also ist $\mathbb{Z}_{\geq 0} + \frac{1}{2}$ die Menge der Eigenwerte von H bezüglich der Basis B.
Alternativ vereinfacht man H zunächst mithilfe von

$$\begin{aligned} [(A^+)^2, A^2] &= A^+[A^+, A^2] + [A^+, A^2]A^+ \\ &= A^+A[A^+, A] + A^+[A^+, A]A + A[A^+, A]A^+ + [A^+, A]AA^+ \\ &= -2\,A^+A - 2\,AA^+ \;=\; -4\,A^+A - 2\,\mathbf{1} \end{aligned}$$

also

$$H = A^+A + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{1}$$

woraus sich die Eigenwerte bezüglich B direkt ergeben.

Kennen Sie H und N aus der Quantenmechanik-Vorlesung?

Hinweis Es ist insbesondere $t^k = (A^+)^k t^0$ (mit $t^0 = 1 \in K$), also kann man alle Elemente der Basis B durch die Wirkung von A^+ erzeugen. Daher wird A^+ auch **Erzeugungsoperator** genannt und man interpretiert t^k auch als k-Teilchen-Zustand. In diesem Bild „zählt“ also N, aus wie vielen Teilchen ein betrachteter Zustand besteht, daher heißt N auch Besetzungszahl-Operator. A verringert die Potenz von t^k um 1, daher wird A auch **Vernichtungsoperator** genannt.

Man sieht nun auch: H ist der Hamilton-Operator des **harmonischen Oszillators** im Fockraum-Bild.