Dorothea Bahns
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1

Beweisen Sie Satz 3.2.2 der Vorlesung: Sei V endlich-dimensionaler $\mathfrak{sl}(2,K)$-Modul, K ein Körper der Charakteristik 0. Sei $v_0 \in V$ mit $x.v_0 = 0$ und $h.v_0 = \lambda v_0$ mit $\lambda \in K$. Dann ist

1. $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und
2. für den von v_0 erzeugten $\mathfrak{sl}(2,K)$-Untermodul $U \subseteq V$ gilt $U \simeq U(\lambda)$ (mit $U(\lambda)$ wie in Beispiel 3.2.1).

Hinweis:
zu 1. Zeigen Sie, dass $U = \mathrm{Spann}\{y^k v_0 | k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ ist (dazu verwendet man unter anderem Hilfslemma 3.2.3). Folgern Sie aus der Tatsache, dass V endlich-dimensional ist, dass es ein minimales $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gibt mit $y^{m+1}.v_0 = 0$, und daraus, dass $\lambda = m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
zu 2. Betrachten Sie die Basis $\{v_k | k \in \{0, 1, \ldots, \lambda\}\}$ mit $v_k := \frac{(\lambda-k)!}{\lambda!}\, y^k.v_0$ von U und berechnen Sie die Wirkung von x, y und h auf diese Basis.

Aufgabe 2 Ein unendlich-dimensionaler $\mathfrak{sl}(2,K)$-Modul

Sei K ein Körper der Charakteristik 0, sei $V := \{f : \mathbb{R}^n \to K \,|f \text{ polynomiale Funktion}\}$, bezeichne $\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ den Laplace-Operator $\in \mathrm{End}(V)$, bezeichne M_{r^2} den Multiplikations-Operator $\in \mathrm{End}(V)$ mit $r^2 := \sum_{i=1}^n x_i^2$ und bezeichne $N := \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ den Euler-Operator $\in \mathrm{End}(V)$.
Zeigen Sie, dass $\rho : \mathfrak{sl}(2,K) \to \mathrm{End}(V)$ mit $\rho(x) := \frac{1}{2}\Delta$, $\rho(y) := \frac{1}{2}M_{r^2}$ und $\rho(h) := N + \frac{n}{2}\,\mathrm{id}$ eine Darstellung von $\mathfrak{sl}(2,K)$ definiert.