Dorothea Bahns
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen

Ergänzungen und Korrekturen

29.10.08

• **Korrektur** Beispiel zu Bem. 1.3.3.iv)

Bei der angegebenen Abbildung handelt es sich nicht um eine Darstellung von $\mathfrak{a}$, denn wegen der 1 auf der Diagonalen ist die Abbildung $\mathfrak{a} \times V \to V$, $(x, v) \mapsto \rho(x)v$ natürlich nicht bilinear! Entschuldigung!

Stattdessen ist die angegebene Abbildung eine Darstellung der Translations-*Gruppe*. Für Darstellungen von Gruppen fordert man nämlich lediglich, dass die Zuordnung $\rho : G \to \mathrm{End}(V)$, $g \mapsto \rho(g)$ ein Gruppen-Homomorphismus ist, wobei die Gruppenstruktur auf $\mathrm{End}(V)$ durch die Verknüpfung von Abbildungen gegeben ist. Also muss im Fall der Translationsgruppe $(\mathbb{R}, +)$ erfüllt sein: $\rho(x + y) = \rho(x)\rho(y)$.

Ersetzen Sie also bitte die Darstellung im Beispiel aus der Vorlesung durch die Darstellung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^2)$, $x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Überzeugen Sie sich davon, dass diese Darstellung nicht halbeinfach ist (siehe Übungsblatt 2).

Ganz allgemein ist für einen k-Vektorraum V und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, die Darstellung der abelschen Lie-Algebra k, $k \to \mathfrak{gl}(V)$, wobei $1 \mapsto \varphi$, halbeinfach genau dann, wenn φ über dem algebraischen Abschluss von k diagonalisierbar ist (mehr dazu später in der Vorlesung).

• **Ergänzungen Satz 1.3.5.** Zornsche Argumente

Im Beweis „i) $\Rightarrow$ ii)“
Jeder halbeinfache $\mathfrak{g}$-Modul $U \neq 0$ enthält einen einfachen Untermodul:
Sei $u \in U$, $u \neq 0$. Wir nehmen an, U sei von u erzeugt. Das ist keine Einschränkung, da jeder Untermodul eines halbeinfachen Moduls nach Lemma 1.3.4. halbeinfach ist.
Betrachte nun die Menge $\mathcal{X} := \{W \subseteq U | u \notin W\}$ und ordne $\mathcal{X}$ bezüglich der Inklusion von Mengen. Dann gibt es nach dem Lemma von Zorn eine maximaleas Element $M \in \mathcal{X}$, da $\mathcal{X} \neq \emptyset$ (wegen $0 \in \mathcal{X}$) und jede Kette in $\mathcal{X}$ eine obere Schranke besitzt. Da U halbeinfach ist (Voraussetzung), gibt es einen zu M in U komplementären Untermodul M'. Wir zeigen nun: M' ist einfach. Denn sei $N \subseteq M'$ ein Untermodul, $N \neq 0$, so muss u in $M + N$ liegen (sonst Widerspruch zur Maximalität von M). Also ist $U = M + N$, da U von u erzeugt wird. Wegen $U \simeq M \oplus M'$ (insbesondere auch als Vektorraum) folgt also $N = M'$ also ist M' einfach.

Beweis „ii) $\Rightarrow$ iii)“
Betrachte die Menge $\mathcal{X}$ aller *Mengen* von einfachen Untermoduln von V, deren Summe direkt ist. Ordne $\mathcal{X}$ bezüglich der Inklusion. Dann ist $\mathcal{X}$ nicht leer und jede Kette besitzt eine obere Schranke. Nach Zorn gibt es also ein maximales Element $\{V_i | i \in I\}$ von $\mathcal{X}$. Betrachte also $U := \sum_{i \in I} V_i \simeq \bigoplus_{i \in I} V_i$. Dann ist $U = V$ (also V direkte Summe einfacher Moduln), denn:
Angenommen, die Aussage sei falsch. Dann gibt es einen einfachen Modul $W \subseteq V$ mit $U + W \neq U$. Da W einfach ist und $W \not\subseteq U$ (da sonst $U + W = U$), muss $W \cap U = 0$ gelten (denn $W \cap U$ ist Untermodul von W). Also ist die Summe $W + U$ direkt. Widerspruch zur Maximalität von $\{V_i | i \in I\}$.