Dorothea Bahns
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen

Ergänzung: Lineare Lie-Gruppen und die Exponentialfunktion

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, versehen mit einer Norm $\|\cdot\|_V$. Bezeichne $\|\cdot\|$ die Operatornorm auf $\mathrm{End}(V)$,

$$\|A\| := \sup_{\substack{v\in V \\ \|v\|_V \leq 1}} \|A.v\|_V \ , \qquad A \in \mathrm{End}(V) \ .$$

Beachte: Die Operatornorm ist eine submultiplikative Norm, d.h. für alle $A, B \in \mathrm{End}(V)$ gilt $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.
Betrachte nun für $A \in \mathrm{End}(V)$ die *Exponentialreihe*

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} A^n$$

Lemma 1 Auf jeder beschränkten Teilmenge $K \subset \mathrm{End}(V)$ konvergiert die Exponentialreihe gleichmäßig. Durch $\exp(A) := e^A$ für $A \in \mathrm{End}(V)$ wird eine stetige Funktion $\exp : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ definiert, die sogenannte *Exponentialfunktion*.

Beweis: Sei $c \in \mathbb{R}$ so dass $\|A\| \leq c$ für alle $A \in K$. Dann ist $e^A \leq \sum \frac{1}{n!} \|A\|^n \leq e^c$, wobei wir für die erste Ungleichheit die Submultiplikativität der Operatornorm verwenden. Also konvergiert die Exponentialreihe gleichmäßig auf K. Da jede Partialsumme eine stetige Funktion definiert, folgt die Stetigkeit der Exponentialfunktion.

Lemma 2 [Rechenregeln] Es gilt

i) $e^0 = 1$

ii) $e^{A+B} = e^A \, e^B$ für alle $A, B \in \mathrm{End}(V)$ mit $AB = BA$.

iii) Bezeichne $GL(V)$ die allgemeine lineare Gruppe (Gruppe der invertierbaren Endomorphismen von V). Für jeden Endomorphismus $A \in \mathrm{End}(A)$ ist die Abbildung $\gamma_A : \mathbb{R} \to GL(V)$, $\gamma_A(t) := e^{tA}$ ein beliebig oft differenzierbarer Gruppenhomomorphismus.

iv) Für alle $g \in GL(V)$ ist $ge^A g^{-1} = e^{gAg^{-1}}$.

v) $\det e^A = e^{\mathrm{tr} A}$ für alle $A \in \mathrm{End}(A)$.

Beweis: i) klar.
ii) Folgt aus der binomischen Formel und der Cauchyschen Produkt-Formel.
iii) Es ist $e^A \in GL(V)$ für alle $A \in \mathrm{End}(V)$, da wegen ii) und i) e^{-A} invers zu e^A ist, und es folgt auch direkt die Homomorphismus-Eigenschaft, $\gamma_A(t+s) = \gamma_A(t)\gamma_A(s)$. Die n-te Ableitung von γ_A ist $\gamma_A(t) \, A^n$, denn

$$\gamma_A'(t) = \lim_{s\searrow 0} \tfrac{1}{s}(\gamma_A(t+s) - \gamma_A(t)) = \gamma_A(t) \lim_{s\searrow 0} \tfrac{1}{s}(e^{sA} - 1) = \gamma_A(t) \, A$$

iv) Folgt wegen $(gAg^{-1})^n = gA^n g^{-1}$ und der Stetigkeit der Abbildung $\mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$, $A \mapsto gAg^{-1}$.
v) Sei $A \in \mathrm{End}(V)$ fest gewählt. Bezeichne $\rho : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R},\cdot)$ den differenzierbaren Gruppen-Homomorphismus $\rho(t) := \det(\gamma_A(t))$, mit $\gamma_A(t) = e^{tA}$ wie in iii). Wir zeigen zunächst $\rho'(0) = \mathrm{tr}A$. Mit $n = \dim V$ ist nämlich

$$\begin{aligned} \rho'(0) &= \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) \sum_i \gamma_A(0)_{1,\pi(1)} \cdots \gamma'_A(0)_{i,\pi(i)} \cdots \gamma_A(0)_{n,\pi(n)} \\ &= \sum_i \gamma'_A(0)_{i,i} = \mathrm{tr}A \end{aligned}$$

Also ist $\rho(t) = e^{t\,\rho'(0)} = e^{t\,\mathrm{tr}A}$, da ρ die eindeutige Lösung von $\rho'(t) = \mathrm{tr}A\ \rho(t)$ zum Anfangswert $\rho(0) = 1$ ist.

Definition 3 Wir versehen $\mathrm{End}(V)$ und somit die allgemeine lineare Gruppe $GL(V)$ mit der Metrik $d(A,B) := \|A - B\|$ und definieren:

i) Eine (bezgl. d) abgeschlossene Untergruppe von $GL(V)$ heißt *lineare Lie-Gruppe.*

ii) Für eine Untergruppe $H \subseteq GL(V)$ bezeichne $L(H)$ die Menge

$$L(H) := \{A \in \mathrm{End}(V) \mid e^{tA} \in H \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\} .$$

Lemma 4 Ist H eine lineare Lie-Gruppe, so ist $L(H)$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathrm{End}(V)_L$. Sie wird als *Lie-Algebra der linearen Lie-Gruppe H* bezeichnet.

zum Beweis: Um zu zeigen, dass $L(H)$ Untervektorraum ist, benötigt man die Trotter-Produkt-Formel

$$e^{A+B} = \lim_{n\to\infty} (e^{\frac{1}{n}A}\ e^{\frac{1}{n}B})^n .$$

Dann folgt die Behauptung direkt aus der Abgeschlossenheit von H. Für den Nachweis, dass $L(H)$ abgeschlossen unter Klammerbildung ist, benötigt man die sogenannte Kommutatorformel

$$e^{t[A,B]} = \lim_{n\to\infty} (e^{\frac{t}{n}A}\ e^{\frac{1}{n}B}\ e^{\frac{t}{n}A}\ e^{\frac{1}{n}B})^{n^2} .$$

Wiederum folgt dann die Behauptung direkt aus der Abgeschlossenheit von H.

Den Beweis von Trotter- und Kommutatorformel führt man mithilfe des folgenden Hilfssatzes: Auf jeder beschränkten Teilmenge in $\mathrm{End}(V)$ konvergiert die Funktionenfolge e_n mit $e_n(A) := (\mathrm{id} + \frac{1}{n}A)^n$ gleichmäßig gegen die Exponentialfunktion. Insbesondere ist für eine Folge $A_n \to A$ in $\mathrm{End}(V)$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(\mathrm{id} + \frac{1}{n}A_n)^n = e^A$

Beispiele

1. Für $H = GL(V)$ ist $L(H) = \mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}(V)_L$. Speziell für $V = \mathbb{R}^n$ erhält man $L(GL(n,\mathbb{R})) = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

2. Betrachte die spezielle lineare Gruppe $SL(n,\mathbb{R}) := \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$. Dies ist eine lineare Lie-Gruppe (da Urbild einer abgeschlossenen Menge unter der stetigen Abbildung det). Wegen Lemma 2 v) ist

$$L(SL(n,\mathbb{R})) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{End}(V) \mid trA = 0\} .$$

Lemma 5 Seien V, W reelle endlichdimensionale Vektorräume, $\beta : V \times V \to W$ eine bilineare Abbildung. Sei $A \in \mathrm{End}(V)$, $B \in \mathrm{End}(W)$. Dann ist

$$\begin{array}{rrcll} & \beta(A.v_1\,,\,v_2) + \beta(v_1\,,\,A.v_2) & = & B.\beta(v_1\,,\,v_2) & \text{für alle } v_1, v_2 \in V \\ \Leftrightarrow & \beta(e^{tA}.v_1\,,\,e^{tA}.v_2) & = & e^{tB}.\beta(v_1\,,\,v_2) & \text{für alle } v_1, v_2 \in V\ ,\ t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Per Induktion folgt $B^n.\beta(v_1\,,\,v_2) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}\ \beta(A^l.v_1\,,\,A^{n-l}.v_2)$ und daraus

$$e^B.\beta(v_1\,,\,v_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\ \beta(\tfrac{1}{n!}\,A^l.v_1\,,\,\tfrac{1}{(n-l)!}\,A^{n-l}.v_2) = \beta(e^A.v_1\,,\,e^A.v_2)\ .$$

"$\Leftarrow$": Die Behauptung folgt durch Ableiten nach t in $t = 0$ mit Lemma 2 iii).

Weitere Beispiele

3. Betrachte $V = \mathbb{C}^n$ mit dem Skalarprodukt $\langle v, u\rangle := \sum_{i=1}^{n} v_i \bar{u}_i$ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$. Die Gruppe der Isometrien von $\mathbb{C}^n$ ist die sogenannte *unitäre Gruppe*

$$\begin{array}{rcl} U(n) & := & \{g \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \|g.v\| = \|v\| \text{ für alle } v \in \mathbb{C}^n\,\} \\ & = & \{g \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \langle g.v, gu\rangle = \langle v, u\rangle \text{ für alle } v, u \in \mathbb{C}^n\} \end{array}$$

   $U(n)$ ist lineare Lie-Gruppe (sogar kompakt, da abgeschlossen *und* beschränkt). Ihre Lie-Algebra ist die Menge der schiefhermiteschen Matrizen,

$$\mathfrak{u}(n) := L(U(n)) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid A^* = -A\,\}$$

   wobei $A^* = \bar{A}^t$, denn nach Lemma 5 (mit $V = \mathbb{C}^n$ und $W = \mathbb{C}$) ist $A \in L(U(n))$ genau dann, wenn $\langle A.v, u\rangle + \langle v, A.u\rangle = 0$ für alle $u, v \in \mathbb{C}^n$.

4. Ebenso findet man für die *orthogonale Gruppe*

$$O(n,\mathbb{R}) \ := \ \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \|g.v\| = \|v\| \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^n\,\}$$

   (mit der Norm $\|\cdot\|$ zum kanonischen Skalarprodukt $\langle v, u\rangle := \sum_{i=1}^{n} v_i u_i$) die Lie-Algebra

$$\mathfrak{so}(n) := L(O(n,\mathbb{R})) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid A^t = -A\,\}\ .$$

   Die Bezeichnungsweise $\mathfrak{so}(n)$ anstelle von $\mathfrak{o}(n)$ ist gerechtfertigt, da die Spur von schiefsymmetrischen Matrizen über beliebigen Körpern der Charakteristik $\neq 2$ stets 0 ist.

Bemerkung [nicht-linearer Fall] Allgemeiner sind Lie-Gruppen Mannigfaltigkeiten, die zusätzlich auf spezifische Art mit einer Gruppenstruktur versehen sind; die zugehörige Lie-Algebra ist der Tangentialraum an die Gruppen-Eins. Siehe zum Beispiel Jean-Pierre Serre, Lie Algebras and Lie Groups, Lecture Notes in Mathematics 1500, Springer 1992.