

Anschauliche Geometrie

Dr. Christian Böhning

Vorlesung im Sommersemester 2009
an der Georg-August-Universität zu Göttingen

Inhaltsverzeichnis

1 (Tag 1)	3
2 Approximation von Irrationalzahlen durch rationale	6
3 Reguläre Punktsysteme und kristallographische Gruppen	10
3.1 Einteilung der ebenen, diskreten Bewegungen in Klassen	11
3.2 Klassifikation der ebenen, diskontinuierlichen Gruppen	11
4 Klassifikation von Typ II	13
4.1 Gruppen vom Typ II.1	13
4.2 Gruppen vom Typ II.2	13
5 Diophantische Gleichungen und algebraische Kurven	15
5.1 Das Problem der pythagoräischen Tripel	15
5.2 Die Inversion am Kreis	16
5.2.1 Der Inversor von Peaucellier	18
6 Konforme Abbildungen und der Satz von Liouville	19
6.1 Zusammenfassung	22
7 (Tag 7)	23
7.1 Erster Fall: $\sigma \neq 0$	23
7.2 Zweiter Fall: $\sigma = 0$	24
8 Vortrag: Symplektische Geometrie und der Satz von Darboux	25
8.1 Symplektische Vektorräume	25
8.2 Vektorfelder und Flüsse	26
8.3 Symplektische Mannigfaltigkeiten	26
8.4 Kommutatoren und Poissonvektorfelder	27
8.5 Der Satz von Darboux	28
9 Die Geburt des Riemannsches Krümmungstensors	31

10 Vortrag: Steiners Lösung des isoperimetrischen Problems	35
11 Divisionsalgebren und Topologie I	38
11.1 Die Cayley-Algebra der Oktaven	39
12 Divisionsalgebren und Topologie I (Forts.)	41
12.1 Die Cayley-Algebra der Oktaven (Forts.)	41
12.2 Topologie	42
13 Divisionsalgebren und Topologie II	44
14 Divisionsalgebren und Topologie III	47
15 Divisionsalgebren und Topologie IV	50

1 (Tag 1)

Betrachte die Folgen

- $(a_n) = 2^n, n = 1, 2, 3, \dots$,
- (b_n) der Anfangsziffern (im Dezimalsystem) dieser Zahlen (a_n) .

Nun können wir fragen:

1. Kommt jemals die 7 in der Folge (b_n) vor?
2. Was kommt häufiger vor, die 6 oder die 5? Präziser: Betrachte

$$A_6 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{b_k \mid b_k = 6, k \leq n\}}{n},$$

analog A_5 ; existieren diese Limites und wenn ja, ist $A_5 \leq A_6$ oder $A_6 \leq A_5$?

Sei $x \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\left[\frac{x}{10^{\lfloor \log_{10} x \rfloor}} \right]$$

die erste Ziffer im Dezimalsystem von x . Dabei bezeichnet für $a \in \mathbb{R}$ $[a]$ (Gaußklammer) die größte ganze Zahl, die nicht größer als a ist.

Betrachte erst $\xi := \frac{x}{10^{\lfloor \log_{10} x \rfloor}}$. Es gilt $1 \leq \xi < 10$ und $\log \xi = \{\log_{10} x\} := \log_{10} x - \lfloor \log_{10} x \rfloor$. Es ist $0 \leq \log \xi < 1$. Wir haben also eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\rightarrow [0, 1) \\ x &\mapsto \{\log_{10} x\}. \end{aligned}$$

Die erste Ziffer im Dezimalsystem von x ist

$$\left[10^{\{\log_{10} x\}} \right].$$

Wenn man x durch $2x$ ersetzt, geht $\{\log_{10} x\}$ über in $\{\log_{10} x + \log_{10} 2\}$. Das heißt, wenn wir $[0, 1)$ mit \mathbb{R} und 1 identifizieren (also \mathbb{R}/\mathbb{Z}), dann ist die Abbildung, die wir betrachten,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ a &\mapsto a + \log_{10} 2 \pmod{1}. \end{aligned}$$

Wir starten also mit $\alpha_1 = \{\log_{10} 2\}$ und betrachten die Folge (α_n) mit

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \log_{10} 2 \pmod{1}, \quad n \geq 1.$$

Geometrischer: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$ (die Einheitskreislinie).

Besinnen wir uns auf Frage 1 zurück. $\log_{10} 2$ ist irrational. (Wäre $\log_{10} 2 = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$, dann wäre $2^b = 10^a$. In der Primfaktorzerlegung von 2^b kommt die 2 b -mal vor, in 10^a jedoch a -mal, und wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung folgt $a = b$, ein Widerspruch.)

Behauptung 1. Die Folge der Punkte $\eta, 2\eta, 3\eta, \dots$ auf \mathbb{S}^1 ist dicht in \mathbb{S}^1 (in der euklidischen Topologie).

Beweis. Man hat einen Begriff von „Volumen“ auf \mathbb{S}^1 (das heißt, jeder Kreisbogenabschnitt hat eine Länge), und die Abbildung

$$f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \\ y \mapsto y + \eta$$

ist längenerhaltend. Angenommen, die Folge $\eta, 2\eta, \dots$ wäre nicht dicht in \mathbb{S}^1 . Dann gäbe es einen Punkt $y_0 \in \mathbb{S}^1$ und eine Umgebung $U \ni y_0$ (einen offenen Kreisbogen) so, dass U keine Punkte der Folge $\eta, 2\eta, \dots$ enthält. Wähle nun U maximal mit der Eigenschaft, keine Punkte der Folge zu enthalten. Die Translate $f(U), f^2(U), \dots$ enthalten alle keine Punkte der Folge. Aber f ist längenerhaltend und \mathbb{S}^1 hat endliche Länge; das heißt, es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $U \cap f^N(U) \neq \emptyset$. Ist $U = f^N(U)$, dann wäre $\log_{10} 2$ rational ζ . Ist $U \cap f^N(U) \neq \emptyset$ und $U \neq f^N(U)$, dann ist dies ein Widerspruch zur Maximalität von U . \square

Korollar 1.1. Die Zahl 7 kommt in der Folge (b_n) der Anfangsziffern der Zahlen (2^n) vor.

Nun zur zweiten Frage. Gegeben sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0, 1) \rightarrow [0, 1) \\ a \mapsto a + \log_{10} 2 \pmod{1}.$$

Sei $x_0 = \log_{10} 2$. Betrachte die Folge (c_n) mit $c_n = f^n(x_0)$. Wie sind die Werte (c_n) in $[0, 1)$ verteilt?

Behauptung 2. Die Zahlen c_0, c_1, c_2, \dots sind in $[0, 1)$ gleichverteilt.

(Gleichverteilung: Ist $I \in [0, 1)$ ein Teilintervall, dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{c_k \mid c_k \in I, k \leq n\}}{n}$$

die Länge von I .)

Stimmt die Behauptung, dann ist die Antwort auf Frage 2 wie folgt: Die 6 kommt mit Häufigkeit $\log_{10} \frac{7}{6}$ vor, die 5 häufiger mit $\log_{10} \frac{6}{5}$.

Beweis (dass (c_n) gleichverteilt ist). Für alle Riemann-integrierbaren Abbildungen

$$f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C} \tag{*}$$

gilt

$$\int_0^1 f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(c_k).$$

Es folgt die Gleichverteilung. (Denn: Man nehme für f die charakteristische Funktion χ_I eines Teilintervalls $I \subset [0, 1) \implies$ Gleichverteilung.)

Man rechnet nach: (*) gilt für $f \equiv 1$. (*) gilt auch für $f(x) = e^{2\pi i m x}$, $m \in \mathbb{Z}$. Es ist $\int_0^1 f(x) dx = 0$, daher reicht es zu zeigen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i m k \vartheta} = 0$$

mit $\vartheta = \log_{10} 2$. Aber es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n e^{2\pi i m k \vartheta} \right| &= \frac{1}{n} \left| \frac{1 - e^{2\pi i m (n+1) \vartheta}}{1 - e^{2\pi i m \vartheta}} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \frac{2}{\underbrace{|1 - e^{2\pi i m \vartheta}|}_{\neq 0, \text{ weil } \vartheta \text{ irrational ist.}}} \end{aligned}$$

Jede stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ lässt sich gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximieren (Fourierentwicklung):

$$f \sim \sum_{m=0}^N C_m e^{2\pi i m x}.$$

Das heißt, (*) gilt für stetige Funktionen. Jede Treppenfunktion (im Riemannschen Sinne) lässt sich gleichmäßig durch stetige Funktionen approximieren. Es folgt die Behauptung. \square

(Obiges Argument für Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, Riemann-integrierbar, $f(0) = f(1)$.)

(Satz von Poincaré über die ewige Wiederkehr, Hermann Weyl.)

2 Approximation von Irrationalzahlen durch rationale

Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Frage:* Wie gut kann man α approximieren durch rationale Zahlen $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, mit kleinem Nenner n ? Speziell: Kann man eine Folge $\frac{m}{n} \rightarrow \alpha$ finden mit $|\alpha - \frac{m}{n}| \leq \frac{1}{n^2}$?

Das folgt aus:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \text{ gibt es } m, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } \left| \alpha - \frac{m}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{|n|}, \quad |n| \leq \frac{1}{\varepsilon},$$

oder:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \text{ gibt es } m, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } \left| \frac{\alpha n - m}{\varepsilon} \right| \leq 1 \quad \text{und} \quad |\varepsilon n| \leq 1.$$

Im \mathbb{R}^2 betrachten wir ein Gitter

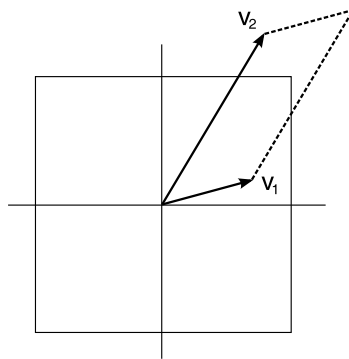
$$\Lambda = \mathbb{Z} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\varepsilon} \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

(das heißt, alle Vektoren

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha n - m}{\varepsilon} \\ n\varepsilon \end{pmatrix} \in \Lambda$$

für $m, n \in \mathbb{Z}$).

Obige Aufgabe bedeutet: Wir suchen einen Gitterpunkt in Λ ($\neq 0$), der im Quadrat mit Kantenlänge 2 und Mittelpunkt 0 liegt. Wir betrachten das von den Vielfachen der Vektoren erzeugte Gitter. Λ ist ein Einheitsgitter, das heißt, v_1 und v_2 spannen ein Parallelogramm der Fläche 1 auf ($|\det(v_1, v_2)| = 1$):



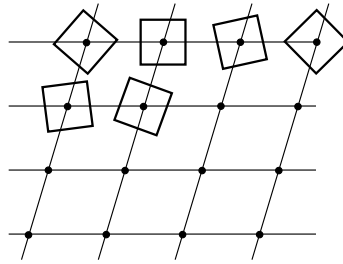
Definition 2.1. Ein Gitter in \mathbb{R}^2 ist allgemein eine Menge

$$\Lambda' = \mathbb{Z} \cdot w_1 + \mathbb{Z} \cdot w_2$$

(mit w_1, w_2 linear unabhängig).

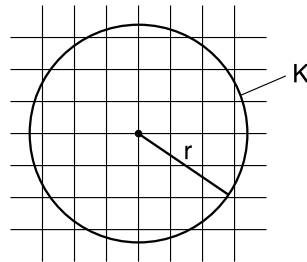
Satz 2.2. Ist $\Lambda \in \mathbb{R}^2$ ein Einheitsgitter und Q ein Quadrat in \mathbb{R}^2 mit Kantenlänge 2 und einem Gitterpunkt P als Mittelpunkt, dann enthält Q mindestens einen weiteren Gitterpunkt $P' \neq P$.

Beweis. Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ ein Gitter (wir sprechen immer von Einheitsgittern). Wir legen um jeden Gitterpunkt als Mittelpunkt ein Quadrat (beliebiger Ausrichtung) mit Kantenlänge s .



Behauptung 3. Wenn diese Quadrate sich nicht überlappen, dann ist $s \leq 1$.

Sei K ein (großer) Kreis vom Radius r um einen Gitterpunkt.



$f(r)$ sei die Anzahl der Gitterpunkte in K (oder auf dem Rand von K). Die Fläche der Quadrate mit Kantenlänge s , die Mittelpunkte in K haben, ist dann $f(r) \cdot s^2$. Alle diese Quadrate liegen aber im zu K konzentrischen Kreis vom Radius $r + 2s$. Es folgt $f(r) \cdot s^2 \leq \pi(r + 2s)^2 \implies \frac{f(r)}{\pi r^2} \cdot s^2 \leq (1 + \frac{2s}{r})^2$. Die Behauptung folgt aus der Tatsache, dass

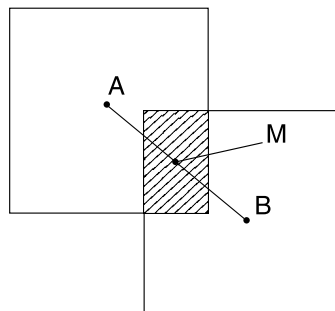
$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r)}{\pi r^2} = 1.$$

Warum ist das so? Sicherlich ist $|f(r) - \pi r^2| \leq F(r)$, wobei $F(r)$ die Fläche aller Gitterparallelogramme ist, die den Kreisrand schneiden. Aber $F(r) \leq C \cdot r$ (C eine Konstante). Denn: Alle Gitterparallelogramme, die zu $F(r)$ beitragen, sind in einem Kreisring vom Durchmesser $2d$ enthalten (mit d als Maximalabstand zweier Punkte in einem Fundamentalparallelogramm des Gitters). Es folgt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{f(r)}{r^2} - \pi \right| = 0. \quad \square$$

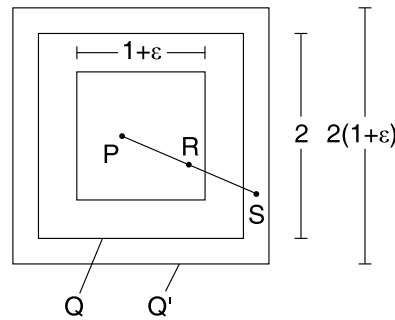
Also: Legt man um jeden Gitterpunkt ein Quadrat der Kantenlänge $1 + \varepsilon$, dann gibt es Überlappungen.

Legen wir jetzt um jeden Gitterpunkt ein Quadrat mit Kantenlänge $1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$; dabei sollen alle Quadrate gleich ausgerichtet sein (jedes geht durch eine Verschiebung in jedes andere über).



M , der Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} , A, B Gitterpunkte zu Quadraten, die sich überlappen, liegt in beiden Quadraten. Also: Legt man in einem Einheitsgitter Λ um einen Gitterpunkt als Mittelpunkt ein Quadrat der Kantenlänge $1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, dann enthält dieses Quadrat immer einen Punkt, der die Verbindungsstrecke zwischen zwei Gitterpunkten halbiert.

Sei jetzt Λ ein Einheitsgitter und Q ein Quadrat der Kantenlänge 2 mit einem Gitterpunkt $P \in \Lambda$, so dass Q keinen weiteren Gitterpunkt außer P enthält (das wollen wir zu einem Widerspruch führen). Dann enthält auch für kleines ε das zu Q konzentrische Quadrat Q' mit Kantenlänge $2(1 + \varepsilon)$ keinen Gitterpunkt.



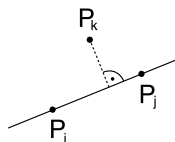
Das Quadrat, das durch Stauchen von Q' um den Faktor $\frac{1}{2}$ entsteht, enthält einen Punkt, der die Verbindungsstrecke zwischen zweier Gitterpunkte halbiert (die Verbindungsstrecke zwischen P und einem weiteren Gitterpunkt). Sei dieser Punkt (der Halbierungspunkt) R . S liegt dann in Q' . Widerspruch.

Das ist ein Spezialfall des Gitterpunktsatzes von Minkowski: Ist $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ ein Einheitsgitter und Q eine konvexe zentralgeometrische Menge um 0 der Fläche ≥ 4 , dann enthält Q außer 0 noch einen weiteren Gitterpunkt.

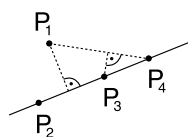
Exkurs (ein Problem von Sylvester): Problem: Gegeben seien endlich viele Punkte P_1, \dots, P_N in der Ebene \mathbb{R}^2 , so dass gilt: Auf jeder Geraden $\overline{P_i P_j}$ durch zwei der Punkte (P_i und P_j) liegt noch ein dritter Punkt P_k ($\neq P_i$ und P_j).

Behauptung 4. Dann liegen alle Punkte auf einer Geraden.

Beweis. Betrachte alle Paare $(\overline{P_i P_j}, P_k)$, $P_k \notin \overline{P_i P_j}$ (bestehend aus einer Geraden $\overline{P_i P_j}$ und einem Punkt $P_k \notin \overline{P_i P_j}$) und wähle eines davon, so dass der Abstand von P_k zu $\overline{P_i P_j}$ minimal wird.

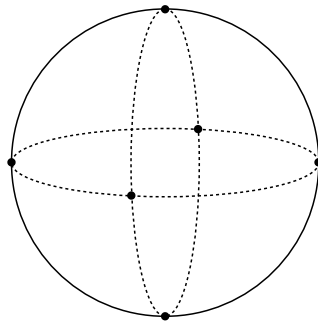


Dann enthält die Gerade durch P_i und P_j keinen weiteren Punkt der Menge. Angenommen, doch: Der Punkt sei $Q \in \overline{P_i P_j}$. Mindestens zwei der Punkte Q, P_i, P_j liegen auf derselben Seite des Lotfußpunktes von P_k auf die Gerade durch P_i und P_j . Also:



P_j hat einen kleineren Abstand von $\overline{P_1 P_4}$ als P_1 von $\overline{P_3 P_4}$. Widerspruch. □

Frage: Welche Eigenschaften der euklidischen Ebene mit den Begriffen „Punkt“/„Gerade“ sind für den Beweis wesentlich? Beispielsweise gilt der Satz für die Kugel oder für $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3)$ nicht.



3 Reguläre Punktsysteme und kristallographische Gruppen

Definition 3.1. Ein reguläres Punktsystem in der Ebene ist eine unendliche Punktmenge, so dass gilt:

1. Für einen Kreis $K(r)$ vom Radius r in der Ebene soll die Anzahl $A(r)$ der in $K(r)$ enthaltenen Punkte von der Ordnung $\mathcal{O}(r^2)$ sein.
2. In jedem endlichen Gebiet sollen nur endlich viele Punkte des Systems liegen.
3. Jeder Punkt des Systems soll in jeden anderen durch eine Bewegung der Ebene überführt werden können, die das System als Ganzes invariant lässt.

(Bewegung: Eine Abbildung der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b$, $A \in SO_2(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^2$.)

Beispiel 1. [hier Bild]

Ein Gitter führt zu einer Symmetriegruppe G eines Punktsystems (Gruppe aller ebenen Bewegungen, die das System invariant lassen). Solche Gruppen G sind *diskontinuierliche Bewegungsgruppen*, das heißt, in jedem endlichen Gebiet von \mathbb{R}^2 gibt es nur endlich viele unter G äquivalente Punkte (also Punkte im selben G -Orbit).

Vorbemerkung:

- Jede ebene Bewegung ist durch die Abbildungsvorschrift zweier verschiedener Punkte eindeutig festgelegt.
- Jede ebene Bewegung ist entweder eine Translation oder eine Drehung um ein Zentrum.

Beweis. Sei $b \neq \text{id}$ eine Bewegung, $A \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, $A' = b(A)$ und B der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AA'}$.

[hier Bild]

Es gibt zwei Fälle:

1. B bleibt unter der Bewegung b fest. $\implies b$ ist eine Drehung um B um π .
2. B bleibt nicht fest.
 - a) $B' = b(B)$ liegt auf der Geraden $\overline{AA'}$.

[hier Bild]

Dann ist B' eindeutig bestimmt:

$$|AB| = |A'B| \implies |A'B'| = |A'B|.$$

Aber $B \neq B'$, $\implies b$ ist eine Translation.

- b) B' ist nicht auf der Geraden $\overline{AA'}$.

[hier Bild]

(M ist der Schnittpunkt der Lote auf $\overline{AA'}$ und $\overline{A'B'}$ in B' .)

Dann ist b eine Drehung mit Mittelpunkt M , die A auf A' abbildet. Denn: Es reicht zu zeigen, dass dann auch B auf B' abgebildet wird. Dies folgt aus der Kongruenz $\triangle ABM \cong \triangle A'B'M$. □

3.1 Einteilung der ebenen, diskreten Bewegungen in Klassen

- I. Gruppen G , in denen alle vorkommenden Translationen dieselbe Richtung haben (oder: es gibt keine Translationen).
- II. Gruppen G , die 2 Translationen mit nichtparallelen Richtungen enthalten.

Weitere Unterteilung:

1. Gruppen G , die keine Drehung enthalten.
2. Gruppen G , die Drehungen enthalten.

Lemma 3.1. *Enthält G eine Drehung d um einen Punkt P um Winkel α und ist der Punkt Q im selben G -Orbit wie P , dann enthält G auch die Drehung um Q um α .*

Beweis. [hier Bild]

Es existiert eine Bewegung b in G mit $b(P) = Q$. $b \circ d \circ b^{-1}$ ist $\in G$ und lässt Q fest. Daher ist $b \circ d \circ b^{-1}$ eine Drehung um Q um den Winkel α (da sich allgemein Drehwinkel bei der Komposition addieren). \square

Lemma 3.2. *Enthält G eine Drehung um einen Winkel α und eine Translation t , dann enthält G auch die Translation t' , deren Richtung mit der von t den Winkel α einschließt und die vom Betrag mit t übereinstimmt.*

Beweis. Sei $d \in G$ eine Drehung um α mit Drehpunkt A .

[hier Bild]

$t' = d \circ t \circ d^{-1}$ führt A in C über und ist Translation (nach Addition der Drehwinkel.) \square

3.2 Klassifikation der ebenen, diskontinuierlichen Gruppen

Typ I. I.1. Sei A ein beliebiger Punkt in \mathbb{R}^2 und A_1 ein zu A unter G äquivalenter Punkt mit minimalem Abstand zu A .

[hier Bild]

t sei die Translation, die A auf A_1 abbildet. Dann ist $G = \langle t \rangle$ (t erzeugt die Gruppe). $\dots, A_{-1}, A, A_1, A_2, \dots$ sind nämlich alle zu A äquivalente Punkte wegen der Minimalität von $|AA_1|$.

I.2. Dies sind alle Gruppen G , die eine Drehung enthalten, aber keine Translation in nicht paralleler Richtung.

I.2.a. G enthält *keine* Translation.

Behauptung 5. Alle Drehungen in G haben denselben Drehpunkt.

Angenommen, das wäre nicht so: Seien a, b Drehungen in G mit Drehpunkten $A \neq B$.

[hier Bild]

Es folgt: $bab^{-1}a^{-1}$ ist nach Addition der Drehwinkel die Identität oder eine Translation. Aber $bab^{-1}a^{-1}(B') = B''$. Es folgt $B'' \neq B'$, ein Widerspruch zur Annahme, G enthalte keine Translationen.

Sei A also einziger Drehpunkt in G und Q ein weiterer Punkt.

[hier Bild]

Q_1 ist ein zu Q nächstliegender Punkt auf der Kreislinie (das ist möglich, da G diskontinuierlich operiert). Auf der Kreislinie liegen nur endlich viele zu Q äquivalente Punkte, zum Beispiel N viele Punkte. Es folgt $\alpha = \frac{2\pi}{N} \implies G = \langle \text{Drehung um } A \text{ mit Winkel } \frac{2\pi}{N} \rangle$. Wir sagen: A ist N -zähliger Drehpunkt.

I.2.b. G enthält eine Drehung d und eine Translation t , und alle weiteren Translationen sind zu t parallel. Aus Lemma 3.2 folgt, dass d den Drehwinkel π hat, und dass alle Drehzentren 2-zählig sind.

Sei A_1 ein 2-zähliger Drehpunkt. Die Untergruppe der Translationen in G ist eine Gruppe von Typ I.1. Der Orbit von A_1 unter dieser Gruppe ist:

[hier Bild]

Aus Lemma 3.1 folgt, dass alle A 's 2-zählige Drehpunkte sind.

Behauptung 6. Die Mittelpunkte B_1, B_2, \dots von $\overline{A_1 A_2}, \overline{A_2 A_3}, \dots$ sind auch 2-zählige Drehpunkte.

Beweis. Sei t eine Translation mit $t(A_1) = A_2$. Sei ferner a_2 eine Drehung um A_2 um π . Dann ist $a_2 \circ t$ eine Drehung B_1 um π . \square

Außer A_n und B_n gibt es keine weiteren Drehpunkte: Sei sonst A einer der Punkte A_i , sei C ein weiterer Drehpunkt. Dann ist C 2-zählig. Die Drehung um A um π sei a , die Drehung um C um π sei c . Wir betrachten $c \circ a$.

[hier Bild]

$c \circ a$ überführt dann A in A' . Also ist $c \circ a$ eine Translation (nach Addition der Drehwinkel), das heißt, A' ist einer der Punkte A_j . Es folgt: C ist gleich A oder gleich B .

Somit ist

$$G = \langle \text{Translation, die } A_1 \text{ in } A_2 \text{ überführt,} \\ \text{Drehung um } \pi \text{ um } A_1, \\ \text{Drehung um } \pi \text{ um } B_1 \rangle.$$

Definition 3.2. Ein Gebiet \mathcal{G} in \mathbb{R}^2 heißt ein *Fundamentbereich* für G , wenn im Inneren von G keine 2 äquivalenten Punkte liegen und jeder Punkt zu einem aus \mathcal{G} äquivalent ist.

[hier Bilder]

4 Klassifikation von Typ II

4.1 Gruppen vom Typ II.1

Gruppen G vom Typ II.1 enthalten zwei nichtparallele Translationen und keine Drehung.

Sei $P \in \mathbb{R}^2$ und $t \in G$ eine Translation minimaler Länge mit $t(P) = Q$.

[hier Bild]

Wähle Punkt R wieder mit minimalem Abstand von P unter der Zusatzvoraussetzung, dass $R \notin \overline{PQ}$ (Gerade durch P), t' Translation mit $t'(P) = R$. Dann ist $G = \langle t, t' \rangle$, denn andernfalls gibt es ein zu $PQRS$ unter G äquivalentes Gitterparallelogramm $P'Q'R'S'$ und einen Punkt U , der zu P äquivalent ist.

[hier Bild]

Es gilt o.B.d.A. $U \in \triangle P'Q'R'$.

Nach unserer Wahl ist $|\overline{P'R'}| \geq |\overline{P'Q'}|$, also ist R' der am weitesten von P' entfernte Punkt in $\triangle P'Q'R'$. Es folgt $U \in \overline{P'Q'} \implies U = P'$ oder Q' (siehe Bild 1.7.4.1).

4.2 Gruppen vom Typ II.2

Gruppen G vom Typ II.2 enthalten zwei nichtparallele Translationen und Drehungen.

Sei $T \subset G \implies T = \langle t_1, t_2 \rangle$ (wie Fall II.1).

Sei A ein n -zähliger Drehpunkt von G (das heißt, $d \in G$ ist eine Drehung um A um $\frac{2\pi}{n}$ oder $-\frac{2\pi}{n}$).

Behauptung 7. Es gilt $n \in \{2, 3, 4, 6\}$.

Beweis. Sei $t \in G$ eine Translation, so dass $T(A) = B$ minimalen Abstand hat von A .

[hier Bild] $B' = d(B)$

Lemma 3.2 besagt: G enthält auch eine Translation t' mit $t'(A) = B'$. $t' \circ t^{-1}$ ist eine Translation und überführt B in B' . Da aber t minimal ist, folgt $|\overline{BB'}| \geq |\overline{AB}|$, also $\sphericalangle BAB' = \frac{2\pi}{n} \geq \frac{\pi}{3} \implies n \leq 6$.

Behauptung 8. $n = 5$ kommt nicht vor.

Beweis. Angenommen, A wäre 5-zähliger Drehpunkt. Sei d eine Drehung um A um den Winkel $2 \cdot \frac{2\pi}{5}$ und $d(B) =: B''$.

[hier Bild]

Nach Lemma 3.2 enthält G die Translation t'' mit $t''(A) = B''$. Sei $C = (t \circ t'')(A)$. $t \circ t''$ ist eine Translation, aber C liegt näher an A als B . ζ □

Sei φ der *kleinste* in G vorkommende Drehwinkel. Dann gibt es vier Fälle:

α : $\varphi = \pi$ (Bild 1.7.4.2).

β : $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ (Bild 1.7.4.3).

γ : $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (Bild 1.7.4.4).

δ : $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (Bild 1.7.4.5).

II.2.α In diesem Fall gibt es nur zweizählige Drehpunkte.

Die Untergruppe $T \subset G$ der Translationen liefert zu einem 2-zähligen Drehpunkt A äquivalente 2-zählige Drehpunkte.

[hier Bild]

Betrachtungen zu Fall I.2.β zeigen:

1. Mittelpunkte der Verbindungsstrecken zweier 2-zähliger Drehpunkte sind auch 2-zählige Drehpunkte.
2. Alle 2-zähligen Drehpunkte in G werden so erhalten.

Die Gruppe wird erzeugt von T und all diesen Drehungen.

II.2.β In diesem Fall ist $\frac{2\pi}{3}$ der kleinste vorkommende Drehwinkel in G .

Angenommen, π würde auch als Drehwinkel vorkommen. Dann würde auch $\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ vorkommen. ζ Es folgt: Es gibt nur 3-zählige Drehpunkte in G .

Sei A ein 3-zähliger Drehpunkt in G . Sei t mit $t(A) = B$ eine Translation minimaler Länge in G . Sei d eine Drehung um A um $\frac{2\pi}{3}$ und $d(B) =: C$. G enthält auch die Translation t' , die A in C überführt.

[hier Bild]

Die Untergruppe $T \subset G$ der Translationen wird von t und t' erzeugt. T hat $ABDC$ als Fundamentalparallelogramm. Die Diagonale AD von $ABDC$ teilt das Parallelogramm in zwei gleichseitige Dreiecke. $t \circ d$ überführt A, B in B, D , daher ist $t \circ d = d'$ eine Drehung mit $\frac{2\pi}{3}$ als Drehwinkel um den Mittelpunkt M von ABD . Also ist M auch 3-zähliger Drehpunkt. $d'' = d' \circ t$ bildet A, C nach D, A ab, somit ist d'' eine Drehung um $\frac{2\pi}{3}$ um den Mittelpunkt N von ADC ; $(d'')^{-1}$ dreht um $-\frac{2\pi}{3}$.

Behauptung 9. Es gibt keine weiteren 3-zähligen Drehpunkte in G .

Beweis. Es reicht zu zeigen: Zwei 3-zählige Drehpunkte E und F haben nie kürzeren Abstand zueinander als AM .

Die Drehung $d' \circ d^{-1}$ liefert die Translation t . Zwei entgegengesetzte Drehungen um E und F liefern eine Translation, und deren Länge verhält sich zu EF wie die Länge von t zu AM . Daher ist $|EF|$ nicht kürzer als $|AM|$. \square

II.2.γ Übung.

II.2.δ Übung. (Oder in Hilbert-Cohn-Vossen nachlesen.) \square

5 Diophantische Gleichungen, ebene algebraische Kurven und Gelenkmechanismen

5.1 Das Problem der pythagoräischen Tripel

Das Problem der pythagoräischen Tripel besteht darin, alle ganzen Zahlen ξ, η, ζ zu finden mit

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2 \quad (\xi \cdot \eta \cdot \zeta \neq 0).$$

Sei $x = \frac{\xi}{\zeta}$ und $y = \frac{\eta}{\zeta}$. Das Problem ist nun, alle rationalen Lösungen x, y von

$$x^2 + y^2 = 1$$

zu finden.

[hier Bild]

Wir suchen eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\xrightarrow{p} K \\ t &\longmapsto (\varphi(t), \psi(t)) \end{aligned}$$

und eine Abbildung

$$\begin{aligned} K &\xrightarrow{q} \mathbb{Q} \\ (x, y) &\longmapsto g(x, y). \end{aligned}$$

$\varphi(t), \psi(t)$ sind rationale Funktionen in t mit Koeffizienten aus \mathbb{Q} . $g(x, y)$ ist auch rationale Funktion in (x, y) mit Koeffizienten aus \mathbb{Q} , so dass p und q zueinander invers sind. ($K = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$, p und q können unter Umständen in endlich vielen Punkten nicht definiert sein.)

[hier Bild]

Die Gerade durch $(0, 1)$ und $(t, 0)$ ist

$$y = -\frac{1}{t}x + 1.$$

Die Schnittpunkte mit K sind

$$\begin{aligned} x^2 + \left(-\frac{1}{t}x + 1\right)^2 &= 1 \\ x \left(\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)x - \frac{2}{t} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Also ist die Abbildung p definiert als

$$\begin{aligned} p : \mathbb{Q} &\rightarrow K \\ t &\longmapsto \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right). \end{aligned}$$

Umgekehrt: Ist $(x_0, y_0) \in K$, so ist die Gerade durch (x_0, y_0) und $(0, 1)$ gegeben durch

$$y = \frac{y_0 - 1}{x_0}x + 1,$$

und sie hat den x-Achsenabschnitt $\frac{x_0}{1-y_0}$. Also ist die Abbildung q definiert als

$$q : K \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{x}{1-y}.$$

Setzt man $t = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, und beseitigt den Nenner, so findet man

$$\xi = \left(2 \cdot \frac{p}{q}\right) \cdot q^2,$$

$$\eta = \left(\frac{p^2}{q^2} - 1\right) \cdot q^2,$$

$$\zeta = \left(1 + \frac{p^2}{q^2}\right) \cdot q^2,$$

also $\xi = 2pq$, $\eta = p^2 \cdot q^2$, $\zeta = p^2 + q^2$ als alle möglichen pythagoräischen Tripel. (Zum Beispiel ergibt sich mit $p = 1$ und $q = 2$: $(4, 3, 5)$.)

Solche rationalen Parametrisierungen gibt es auch für andere Kurven, zum Beispiel $y^2 = x^2(x+1)$:

[hier Bild]

Was sind alle rationalen Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ von $y^2 = x^2(x+1)$?

[hier Bild]

Der Schnittpunkt der Geraden $y = tx$ mit der Kurve, der von $(0, 0)$ verschieden ist, lautet:

$$t^2 x^2 = x^2(x+1)$$

$$\implies x = t^2 - 1$$

$$y = t(t^2 - 1).$$

Das heißt, alle rationalen Lösungen von $y^2 = x^2(x+1)$ (außer $(0, 0)$) kann man in der Form $(t^2 - 1, t(t^2 - 1))$, $t \in \mathbb{Q}$, erhalten.

Bemerkung 5.1. Nicht alle ebenen algebraischen Kurven

$$f(x, y) = 0, \quad f \text{ Polynom in } x, y,$$

haben eine rationale Parametrisierung (zum Beispiel $y^2 = (x-1)(x-2)(x-3)$).

Das ist das Starrheitsphänomen der algebraischen Kategorie, denn $f(x, y) = 0$ lässt sich euklidisch lokal mit C^∞ -Funktionen auflösen (Satz über implizite Funktionen).

- Wie ist der Zusammenhang von algebraischen Kurven $f(x, y) = 0$ in \mathbb{R}^2 , $f \in \mathbb{R}[x, y]$, und der diskreten Geometrie?
- Kann man algebraische Kurven geometrisch charakterisieren? (Zum Beispiel ist die Kurve $y = \sin x$ nicht algebraisch, weil jede zur x-Achse parallele Gerade (mit Abstand ≤ 1 von der x-Achse) die Kurve unendlich oft schneidet.)

5.2 Die Inversion am Kreis

Gegeben sei ein Kreis C in \mathbb{R}^2 mit Radius r und Mittelpunkt O .

[hier Bild]

Die Inversion am Kreis ist die Abbildung, die P den Punkt P' auf der Geraden durch O und P zuordnet, der auf derselben Seite von O liegt wie P und

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2$$

erfüllt.

[hier Bild]

Satz 5.2. *Durch eine Inversion am Kreis C wird*

- (a) *eine Gerade durch O in eine Gerade durch O*
- (b) *eine Gerade, die nicht durch O geht in einen Kreis durch O*
- (c) *ein Kreis durch O in eine Gerade, die nicht durch O geht*
- (d) *ein Kreis, der nicht durch O geht in einen Kreis, der nicht durch O geht abgebildet.*

Beweis. (a) ist klar.

(b) Sei L die Gerade:

[hier Bild]

Sei A der Fußpunkt des Lotes von O auf L und A' der zu A inverse Punkt. Sei P ein weiterer Punkt auf L und P' sein Bildpunkt. Dann ist

$$\begin{aligned} r^2 &= |OA'| \cdot |OA| = |OP'| \cdot |OP| \\ &\implies \frac{|OA'|}{|OP'|} = \frac{|OP|}{|OA|} \\ &\implies \triangle OP'A' \text{ und } \triangle OAP \text{ sind ähnlich} \\ &\implies \sphericalangle OP'A' \text{ ist ein rechter Winkel} \\ &\implies P' \text{ liegt immer auf dem Kreis durch } O \text{ mit Durchmesser } |OA'| \\ &\implies \text{Behauptung.} \end{aligned}$$

(c) folgt aus (b).

(d) Sei K ein Kreis, der nicht durch O geht, mit Mittelpunkt M und Radius k .

[hier Bild]

Sei ℓ eine Gerade durch O , die K in A und B schneidet. Wir untersuchen die Änderung der Bildpunkte A' und B' , wenn ℓ sich um O dreht.

Seien nun

$$\begin{aligned} a &= |OA|, & b &= |OB|, \\ a' &= |OA'|, & b' &= |OB'|, \\ m &= |OM|. \end{aligned}$$

t sei die Länge des Tangentenabschnittes von O an den Kreis K . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} a \cdot a' &= b \cdot b' = r^2 && \text{(Def. der Inversionsabb.)} \\ \text{und } a \cdot b &= t^2 && \text{(Tangensatz)} \\ \implies \frac{a'}{b} &= \frac{b'}{a} = \frac{a^2}{t^2} =: c^2 && \text{const. (unabh. von } A, B.) \end{aligned}$$

Wir ziehen eine Parallele durch A' zu \overline{BM} , die \overline{OM} in Q schneidet. Sei $q = |OQ|$ und $\varrho = |A'Q|$. Dann ist

$$\frac{q}{m} = \frac{a'}{b} = \frac{\varrho}{k} \quad (\text{Strahlensatz}),$$

das heißt

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{ma'}{b} = mc^2, \\ \varrho &= \frac{ka'}{b} = kc^2. \end{aligned} \right\} \text{const.}$$

Für jede Lage von A und B ist Q also immer derselbe Punkt, und $|A'Q|$ ist auch immer konstant. Also ist das Bild von K ein Kreis vom Radius ϱ um Q . \square

5.2.1 Der Inversor von Peaucellier

(Peaucellier: franz. Marineoffizier, 1864.)

Der Inversor von Peaucellier besteht aus starren, drehbar verbundenen Stangen:

[hier Bild]

O und R sind feste Punkte in der Ebene. Das Gerät besteht aus 7 Stangen, die beliebig drehbar mit Gelenken verbunden sind (4 Stangen der Länge s , 2 der Länge t und die Stange, die P und R verbindet).

Satz 5.3. *Beschreibt P einen Kreisbogen mit Radius $|PR|$, dann beschreibt Q ein Stück einer Geraden.*

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} |OP| \cdot |OQ| &= (|OT| - |PT|)(|OT| + |PT|) \\ &= |OT|^2 - |PT|^2 \\ &= (|OT|^2 + |ST|^2) - (|PT|^2 + |ST|^2) \\ &= t^2 - s^2 \\ &=: r^2 \quad \text{const.} \end{aligned}$$

Das heißt, P und Q sind inverse Punkte bezüglich des Kreises vom Radius r um O . \square

Satz 5.4 (Kempe, ca. 1870). *Jede ebene algebraische Kurve kann stückweise durch einen geeigneten Gelenkmechanismus erzeugt werden. (Kempe „How to draw a straight line“, Bleschke „Ebene Kinematik“.)*

6 Konforme Abbildungen und der Satz von Liouville über winkeltreue Abbildungen des Raumes

Definition 6.1. Eine C^∞ -Abbildung

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen heißt *konform*, falls der (nichtorientierte) Winkel von Vektoren v_1, v_2 in $T_p U$ gleich ist dem von $df_p(v_1), df_p(v_2)$ eingeschlossenen Winkel.

[hier Bild]

Jede C^∞ -Abbildung von \mathbb{R} nach \mathbb{R} ist konform.

Satz 6.2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

1. f ist winkeltreu (konform) in U .
2. f ist holomorph oder antiholomorph in U und $f'(z) \neq 0$ (bzw. $\bar{f}'(z) \neq 0$) für alle $z \in U$.
3. Sei $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ \mathbb{R} -linear und injektiv. A ist winkeltreu genau dann, wenn $|w||z|\langle Aw, Az \rangle = |Aw||Az|\langle w, z \rangle$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Folgende Aussagen sind zu den obigen äquivalent:

1. $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist winkeltreu.
 2. $\exists a \in \mathbb{C}^* : \forall z \in \mathbb{C} : A(z) = az$ oder $A(z) = a\bar{z}$.
 3. $\exists s \in \mathbb{R}_{>0} : \forall w, z \in \mathbb{C} : \langle Aw, Az \rangle = s\langle w, z \rangle$.
- (1) \implies (2): Sei $a := A(1) \in \mathbb{C}^*$. Mit $b := a^{-1}A(i)$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle i, 1 \rangle = \langle A(i), A(1) \rangle = \langle ab, a \rangle \\ &= |a|^2 \Re b \\ &\implies b = ir, \quad r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es ist $\langle A(1), A(z) \rangle = \langle a, a(x + iry) \rangle = |a|^2 x$ (mit $z = x + iy$), das heißt, aus

$$|1||z| \cdot \langle A(1), A(z) \rangle = |A(1)||A(z)|\langle 1, z \rangle$$

wird

$$|x + iy||a|^2 x = |a||a(x + iry)|x,$$

also

$$|x + iy| = |x + iry| \quad \forall x \in \mathbb{C} : x \neq 0.$$

Es folgt $r = \pm 1$, $A(z) = a(x \pm iy)$.

- (2) \implies (3): Es ist $\langle aw, az \rangle = |a|^2 \langle w, z \rangle$ und $\langle \bar{w}, \bar{z} \rangle = \langle w, z \rangle$, das heißt stets $\langle A(w), A(z) \rangle = s \langle w, z \rangle$ und $s = |a|^2 > 0$.
- (3) \implies (1):

$$\begin{aligned} |A(z)| &= \sqrt{s}|z| \implies A \text{ ist injektiv (bijektiv) und} \\ |w||z|\langle A(w), A(z) \rangle &= |w||z|\langle w, z \rangle = |Aw||Az|\langle w, z \rangle. \end{aligned}$$

□

Der vorige Satz folgt sofort, weil holomorphe bzw. antiholomorphe Funktionen solche mit \mathbb{C} -linearem oder mit \mathbb{C} -antilinearem Differential sind. Zum Beispiel:

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$z \mapsto z^2.$$

Es ist $n = \Re f = x^2 - y^2$, $v = \Im f = 2xy$. Geraden $x = a, y = b$ werden auf Parabeln abgebildet (mit Nullpunkt als Brennpunkt):

[hier Bild]

$n = a, v = b$ in der (n, v) -Ebene gehen unter f^{-1} über in Hyperbeln mit Koordinatenachsen bzw. Diagonalen als Asymptoten:

[hier Bild]

Man kann auch sagen: Unter konformen Abbildungen werden kleine Kreise auf kleine Kreise abgebildet und nicht zu Ellipsen verzerrt.

[hier Bild]

Es gibt „ziemlich viele“ biholomorphe Abbildungen, zum Beispiel:

Satz 6.3 (Riemannscher Abbildungssatz). *Ist $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $U \neq \mathbb{C}$, und ist U homöomorph zur Einheitskreisscheibe, dann ist U biholomorph zur Einheitskreisscheibe.*

[hier Bild]

Was sind die winkeltreuen Abbildungen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ ($U \subset \mathbb{R}^n$)?

Bemerkung 6.4. $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist konform genau dann, wenn

$$\forall p \in U \forall v_1, v_2 \in T_p U : \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle = \lambda(p)^2 \langle v_1, v_2 \rangle \quad (\otimes)$$

mit $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$.

Beweis. • „ \Leftarrow “: $|df_p(v)|^2 = \lambda^2 |v|^2 \quad \forall v \in T_p U$, das heißt

$$\cos \sphericalangle \left(df_p(v_1), df_p(v_2) \right) \quad (\#)$$

$$= \cos \sphericalangle \langle v_1, v_2 \rangle.$$

- „ \Rightarrow “: (#) impliziert, dass df_p ein Dreieck in $T_p U$ mit Eckpunkt p in ein ähnliches Dreieck in $T_{f(p)} \mathbb{R}^n$ abbildet. Es folgt $|df_p(v)|^2 = \lambda^2 |v|^2$ für alle $v \in T_p U$. Es gilt auch (\otimes) (auf $v = v_1 + v_2$ anwenden). \square

Beispiele 1. 1. Isometrien von \mathbb{R}^n (Translation gefolgt von orthogonaler linearer Abbildung) sind konform mit $\lambda \equiv 1$.

2. Streckungen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \lambda x, \lambda > 0$, sind konform mit Faktor λ .

3. Inversion bezüglich der (Einheits-)Sphäre um $p_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$f(p) = \frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} + p_0, \quad p \in \mathbb{R}^n \setminus \{p_0\}.$$

Geometrisch:

[hier Bild]

Es ist $|f(p) - p_0| |p - p_0| = r^2 = 1$. f ist konform, denn

$$v \in \mathbb{T}_p U \implies df_p(v) = \frac{v|p - p_0|^2 - 2\langle v, p - p_0 \rangle(p - p_0)}{|p - p_0|^4},$$

das heißt $|df_p(v)|^2 = \frac{\langle v, v \rangle}{|p - p_0|^4}$, also ist f konform mit Faktor $\lambda(p) = \frac{1}{|p - p_0|^2}$.

Satz 6.5 (Liouville). *Jede konforme Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ und zusammenhängend, ist (Einschränkung einer) Komposition von Isometrien, Streckungen und Inversionen (und zwar in der Weise, dass höchstens eine Isometrie, eine Streckung, eine Inversion in der Komposition vorkommt).*

Beweis. Sei $a_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, a_n = (0, \dots, 0, 1)$ die Standardbasis des \mathbb{R}^n , (x_1, \dots, x_n) entsprechende Koordinaten und e_1, \dots, e_n parallele Vektorfelder auf U mit $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ in jedem Punkt.

[hier Bild]

Dann ist

$$\langle df_p(e_i), df_p(e_k) \rangle = \lambda(p)^2 \delta_{ij}, \quad i, k = 1, \dots, n. \quad (6.1)$$

Betrachte d^2f , das heißt die symmetrische Bilinearform $d^2f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $d^2f(a_i, a_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$ (alles ist jetzt bei p). Differenzieren wir (6.1), erhalten wir (für i, j, k paarweise verschieden):

$$\begin{aligned} \langle d^2f(e_i, e_j), df(e_k) \rangle + \langle df(e_i), d^2f(e_k, e_j) \rangle &= 0, \\ \langle d^2f(e_j, e_k), df(e_i) \rangle + \langle df(e_j), d^2f(e_i, e_k) \rangle &= 0, \\ \langle d^2f(e_k, e_i), df(e_j) \rangle + \langle df(e_k), d^2f(e_j, e_i) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Es folgt $\langle d^2f(e_k, e_j), df(e_i) \rangle = 0$ (i, j, k verschieden) und also, dass $d^2f(e_k, e_j)$ in der von $df(e_j)$ und $df(e_k)$ aufgespannten Ebene liegt:

$$d^2f(e_k, e_j) = \mu df(e_k) + \nu df(e_j).$$

Da $\langle df(e_k), df(e_k) \rangle = \langle df(e_j), df(e_j) \rangle = \lambda^2$, folgt

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\langle d^2f(e_k, e_j), df(e_k) \rangle}{\lambda^2} = \frac{\lambda d\lambda(e_j)}{\lambda^2} \\ &= \frac{d\lambda(e_j)}{\lambda}, \\ \nu &= \frac{d\lambda(e_k)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$d^2f(e_k, e_j) = \frac{1}{\lambda} \left(df(e_k) d\lambda(e_j) + df(e_j) d\lambda(e_k) \right). \quad (6.2)$$

Sei im folgenden $\varrho := \frac{1}{\lambda}$. Wir berechnen $d^2(\varrho f)$. Es ist $d(\varrho f) = \varrho df + d\varrho f$, also wegen (6.2)

$$\begin{aligned} d^2(\varrho f)(e_k, e_j) &= d^2\varrho(e_k, e_j)f + \varrho d^2f(e_k, e_j) + d\varrho(e_k)df(e_j) + d\varrho(e_j)df(e_k) \\ &= d^2\varrho(e_k, e_j)f + \varrho d^2f(e_k, e_j) - \varrho^2(d\lambda(e_k)df(e_j) + d\lambda(e_j)df(e_k)) \\ &= d^2\varrho(e_k, e_j)f. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Behauptung 10. $d^2\rho(e_k, e_j) = 0$ für alle $k \neq j$.

Beweis. Wir berechnen die symmetrische Trilinearform

$$d^3(\rho f) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit

$$d^3(\rho f)(a_i, a_j, a_k) = \frac{\partial^3(\rho f)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}.$$

$$\begin{aligned} (6.3) \implies \underbrace{d^3(\rho f)(e_k, e_j, e_i)}_{\text{symmetrisch in } i, j, k} &= d^3\rho(e_k, e_j, e_i)f + d^2\rho(e_k, e_j)df(e_i) \\ \implies d^2\rho(e_k, e_j)df(e_i) &= d^2\rho(e_k, e_i)df(e_j). \end{aligned}$$

Aber $df(e_i)$ und $df(e_j)$ sind linear unabhängig, daher folgt $d^2\rho(e_k, e_j) = 0$ für alle $k \neq j$. \square

Wir können e_1, \dots, e_n so wählen, dass sie, bei p fest, ein vorgegebenes Orthonormalsystem bilden, und $d^2\rho(e_k, e_j) = 0$ gilt dann für jedes solche.

$$\begin{aligned} 0 &= d^2\rho\left(\frac{e_j + e_k}{\sqrt{2}}, \frac{e_j - e_k}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(d^2\rho(e_j, e_j) - d^2\rho(e_k, e_k)\right) \\ \implies d^2\rho(e_j, e_j) &= d^2\rho(e_k, e_k) \quad \forall k \neq j. \end{aligned}$$

\square

6.1 Zusammenfassung

Für alle $p \in U$ und für alle e_1, \dots, e_n orthonormal bei p gilt $d^2\rho(e_j, e_k) = \sigma(p)\delta_{jk}$. Speziell:

$$\boxed{\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i \partial x_j} = \sigma(p)\delta_{ij} \quad \text{mit } \rho = \frac{1}{\lambda}.} \quad (6.4)$$

Für $i \neq j$ gilt

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x_i} = \frac{\partial^3\rho}{\partial x_i \partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^3\rho}{\partial x_j \partial x_i \partial x_j} = 0,$$

und es folgt $\sigma = \text{const.}$! Damit ist

$$\boxed{\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i \partial x_j} = \sigma\delta_{ij} \quad \text{mit } \sigma = \text{const.}} \quad (\star)$$

7 (Tag 7)

Im letzten Kapitel hatten wir in Gleichung (★) gesehen, dass

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x_i \partial x_j} = \sigma \delta_{ij} \quad \text{mit } \sigma = \text{const.}$$

Wir betrachten die Fälle $\sigma \neq 0$ und $\sigma = 0$ getrennt.

7.1 Erster Fall: $\sigma \neq 0$

Wir haben nun

$$\varrho = \frac{\sigma}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sigma \sum b_i x_i + c \quad (7.1)$$

mit b_i, c Konstanten, denn es gilt

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x_i^2} = \sigma \implies \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} = \sigma x_i + \sigma b_i$$

mit b_i als Funktion, die nicht von x_i abhängt. Desweiteren ist

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x_j \partial x_i} = 0$$

mit $j \neq i$, das heißt, b_i hängt auch nicht von x_j ab. Also ist b_i konstant. Es folgt

$$\varrho = \frac{1}{2} \sigma x_i^2 + \sigma b_i x_i + \varphi_i.$$

φ_i hängt nicht von x_i ab. Da

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j},$$

gilt auch

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k \partial x_\ell} = \sigma \delta_{k\ell}$$

für $j, k, \ell \neq i$. Induktiv folgt (7.1).

Ist jetzt $\sigma \neq 0$, folgt aus (7.1)

$$\frac{1}{\lambda(p)} = \varrho(p) = a_1 |p - p_0|^2 + k_1$$

mit $a_1 = \frac{\sigma}{2}$ und $k_1 = \text{const.}$ und $p_0 \in \mathbb{R}^n$ fest (entspricht den b 's). Wenn wir nun $k_1 = 0$ zeigen, ist der Beweis für $\sigma \neq 0$ fertig, denn: Sei $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(p) = \frac{p-p_0}{|p-p_0|} + p_0$ die Inversion an der Einheitssphäre um p_0 . $h := g \circ f^{-1}$ ist konform mit Koeffizient $a_1 |p - p_0|^2 \cdot \frac{1}{|p-p_0|^2} = a_1$, das heißt, h ist eine Isometrie komponiert mit einer Streckung. Warum ist $k_1 = 0$? Wenden wir das ganze vorige Argument auf f^{-1} an, so folgt (mit $a_2, k_2 = \text{const.}$):

$$\begin{aligned} \lambda &= a_2 |f(p) - q_0|^2 + k_2 \\ \implies &\boxed{\left(a_1 |p - p_0|^2 + k_1 \right) \left(a_2 |f(p) - q_0|^2 + k_2 \right) = 1.} \end{aligned} \quad (7.2)$$

(7.2) zeigt, dass f Sphären mit Mittelpunkt p_0 abbildet auf Sphären mit Mittelpunkt q_0 .

[hier Bild]

Weil f winkeltreu ist, bildet f Radien der ersten Sphäre auf Radien der zweiten Sphäre ab (bzw. Geraden durch p_0 auf Geraden durch q_0).

Sei $p : [0, s_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Parametrisierung eines Streckenabschnitts auf einem Radius der ersten Familie von Sphären, $s \in [0, s_0]$ sei die Bogenlänge. Sei $f \circ p(s)$ das Bild. Die Länge der Bildstrecke ist

$$\begin{aligned} \int_0^{s_0} \left| df \left(\frac{dp}{ds} \right) \right| ds &= \int_0^{s_0} \frac{ds}{a_1 |p(s) - p_0|^2 + k_1} \\ &= |f(p(s_0)) - f(p(0))|. \end{aligned}$$

Angenommen, $k_1 \neq 0$. Dann ist $|f(p(s_0)) - f(p(0))|$ transzendente Funktion von $|p(s_0) - p_0|$. Aber (7.2) impliziert eine algebraische Funktion. ζ Also ist $k_1 = 0$.

7.2 Zweiter Fall: $\sigma = 0$

Nun ist

$$\frac{1}{2} = \varrho = \sum a_i x_i + c_1 = A_1(x) + c_1$$

mit $c_1, a_i = \text{const.}$ Das Argument für f^{-1} ist $\lambda = A_2(f(x)) + c_2$.

$$\boxed{(A_1(x) + c_1) \cdot (A_2(x) + c_2) = 1,} \quad (7.3)$$

das heißt, f bildet Ebenen, die parallel zu $A_1(x) = 0$ sind, ab auf Ebenen, die parallel zu $A_2(y) = 0$ sind.

[hier Bild]

f bildet die Gerade durch 0, die senkrecht auf $A_1(x) = 0$ steht, ab auf die Gerade, die senkrecht auf $A_2(x) = 0$ steht und durch 0 geht.

Sei wieder $p : [0, s_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein nach der Bogenlänge parametrisiertes Streckenstück auf der Geraden im Urbild. Dann ist

$$|f(p(s_0)) - f(p(0))| = \int_0^{s_0} \frac{1}{A_1(p(s_0)) + c_1} ds.$$

Angenommen, $A_1 \neq 0$. Dann ist $|f(p(s_0)) - f(p(0))|$ eine transzendente Funktion von $|p(s_0) - p(0)|$. Das ist ein Widerspruch zu Gleichung (7.3), die zeigt: $|f(p(s_0)) - f(p(0))|$ ist algebraische Funktion von $|p(s_0) - p(0)|$. Das heißt $\sigma = 0 \implies \lambda = c_1 = \text{const.}$ Also ist f die Komposition einer Streckung und einer Isometrie.

8 Vortrag: Symplektische Geometrie und der Satz von Darboux

Gehalten von Sebastian Vollmer.

8.1 Symplektische Vektorräume

Definition. Ein Vektorraum V über einem Körper K mit $\text{char}(K) = 0$ heißt *symplektischer Vektorraum*, wenn er mit einer *symplektischen Form* ω versehen ist. ω ist eine alternierende, nicht ausgeartete Bilinearform, das heißt, es gilt $\omega(v, v) = 0$ für alle $v \in V$ und $\omega(v, w) = 0 \implies w = 0$ für alle $v, w \in V$.

Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}^{2n}$ und $\omega = \sum_{i=1}^n p_i \wedge q_i$, dann ist ω antisymmetrisch. Sei $y = (y_1, \dots, y_{2n}) \neq 0$, dann ist $y_i \neq 0$ für ein i . Ist $i \leq n$, setze $z = e_{i+n} \frac{1}{y_i}$; ist $i > n$, setze $z = -e_{i-n} \frac{1}{y_i}$. Dann gilt nach Definition $\omega(y, z) = 1$.

Definition. v und w heißen *schieforthogonal* $v \angle w : \Leftrightarrow \omega(v, w) = 0$. Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann ist $U^\angle := \{v \in V \mid \omega(v, u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$ der zu U schieforthogonale Vektorraum.

Definition. Eine Basis B mit

$$\omega_B = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

heißt *symplektische Basis*.

Satz. Sei V ein symplektischer Vektorraum. Dann gilt $\dim V = 2n$, und für ein beliebiges $p_1 \in V$ existieren $p_2 \dots p_n, q_1, \dots, q_n \in V$, so dass $B = (p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n)$ eine symplektische Basis ist.

Beweis. Da ω nicht ausgeartet ist, gibt es ein q_1 , so dass $\omega(p_1, q_1) \neq 0$ wegen der Normierung $\omega(p_1, q_1) = 1$ angenommen werden kann. Sei $U := \langle p_1, q_1 \rangle$. Dann gilt $V = U \oplus U^\angle$, da $v - \omega(v, q_1)p_1 + \omega(v, p_1)q_1 \in U^\angle$. U^\angle ist mit ω auch ein symplektischer Vektorraum, da ω auf U^\angle alternierend ist und aus der Ausgeartetheit von ω auf U^\angle die Ausgeartetheit auf V folgen würde. Wiederhole den Vorgang bis $\dim U^\angle = 0$ oder $\dim U^\angle = 1$. Im ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten Fall gilt $p_{n+1} \angle p_i \wedge p_{n+1} \angle q_i$ für $i = 1, \dots, n$, also ist ω ausgeartet, und dieser Fall kann nicht eintreten. \square

Definition. Ein Endomorphismus S von V heißt *symplektisch*, wenn $\omega(Sv, Su) = \omega(v, u)$ für alle $u, v \in V$.

Korollar. Zwischen zwei symplektischen Vektorräumen der selben Dimension gibt es einen symplektischen Isomorphismus.

Bemerkung. Daher muss nur der Vektorraum aus Beispiel 2 betrachtet werden.

Satz. Ist S symplektisch, so gilt $\det S = 1$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \omega^n &= \sum_{\sigma \in S_n} p_{\sigma(1)} \wedge q_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge p_{\sigma(n)} \wedge q_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} p_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge p_{\sigma(n)} \wedge q_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge q_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (\text{sgn } \sigma)^2 p_1 \wedge \dots \wedge p_n \wedge q_1 \wedge \dots \wedge q_n. \end{aligned}$$

Da $S \omega$ erhält, erhält ω die Volumenform. \square

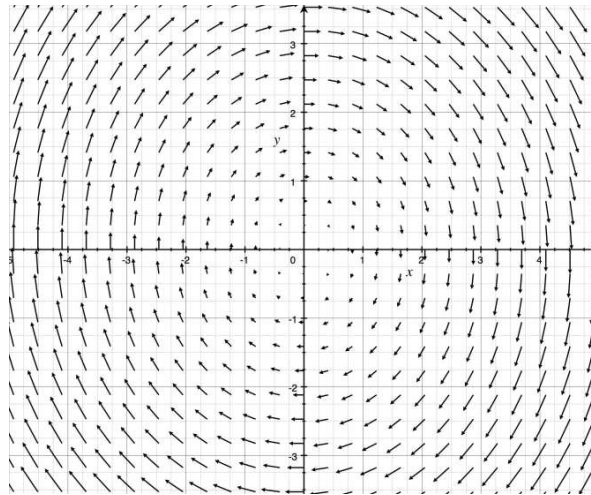


Abbildung 1: Lokaler Fluss

Bemerkung. Die symplektischen Endomorphismen bilden eine Gruppe, die $Sp(2n)$ genannt wird.

8.2 Vektorfelder und Flüsse

Definition. Ein *glattes Vektorfeld* ist eine glatte Abbildung $X : M \rightarrow TM$ mit $\pi \circ X = \text{id}_M$. Eine *Integralkurve* am Punkt $p \in M$ ist eine Abbildung $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow M$ mit $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ und $\gamma(0) = p$. Die Menge der glatten Vektorfelder wird mit $\mathcal{C}^\infty(M, T)$ bezeichnet.

Bemerkung. In lokalen Koordinaten gibt es eine Abbildung $\alpha^i : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $X = \sum \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^{ti}}$. Eine Kurve $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow M$ ist genau dann eine Integralkurve, wenn in lokalen Koordinaten gilt $(\gamma^i)'(t) = \alpha^i(\gamma(t))$, $1 \leq i \leq n$, und $\gamma(0) = p$. Dies entspricht einer ODE mit Anfangswerten.

Definition. Ein lokaler Fluss um p ist eine glatte Abbildung $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow M$, wobei U eine Umgebung von p ist mit folgenden Eigenschaften: $\gamma(0, p) = p$ und $\gamma(s, \gamma(t, p)) = \gamma(s+t, p)$ für alle s und t , für die eine der beiden Seiten definiert ist. Siehe Abbildung 1.

Satz. Jedes Vektorfeld X induziert einen lokalen Fluss γ um jeden Punkt. Es ist $p \in M$ mit $\frac{\partial \gamma}{\partial t}(0, q) = X(q)$.

8.3 Symplektische Mannigfaltigkeiten

Definition. Eine *Symplektische Mannigfaltigkeit* ist eine $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit versehen mit einer geschlossenen, nicht ausgearteten 2-Form ω , das heißt $d\omega = 0$, und für alle $a \neq 0$ gibt es ein b mit $\omega^2(a, b) \neq 0$.

Definition 8.1. Es sei $J : T_p M \rightarrow T_p^* M$ die Abbildung $t \mapsto \omega(\cdot, t)$.

Satz. Die Abbildung J ist ein Isomorphismus.

Beweis. Es gilt $\ker J = \{t \in TM \mid J(t) = 0\} = \{t \in T_p M \mid \omega(\cdot, s) = 0 \forall s \in T_p M\} = \{0\}$ wegen der nicht Degeneriertheit. Da $\dim TM = \dim T^*M = \dim M$, folgt die Behauptung. \square

Bemerkung. In den folgenden Rechnungen tritt nur die Umkehrung $I := J^{-1}$ auf, für diese gilt $\omega(t, I\alpha) = \alpha(t)$ für alle $\alpha \in T_p^* M$.

Definition. Für eine beliebige Funktion $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ wird durch $\text{Id}h \in \mathcal{C}^\infty(M, \text{TM})$ das sogenannte *Hamilton'sche Vektorfeld* \mathbf{H} zur Hamiltonfunktion h definiert.

Satz. Die Funktion \mathbf{H} ist Erhaltungsgröße des Hamiltonflusses mit Hamiltonfunktion h .

Beweis. Zu zeigen: $\mathbf{H}(\mathbf{H}^t(z))$ ist konstant. Mit der Kettenregel gilt $d\mathbf{H}(\mathbf{H}^t(z)) = d\mathbf{H}(\text{Id}\mathbf{H}_{\mathbf{H}^t(z)}) = \omega^2(\text{Id}\mathbf{H}, \text{Id}\mathbf{H}) = 0$, Definition 8.1 wird angewendet. \square

Satz 8.2. Der Hamiltonfluss erhält die symplektsche Struktur: $(g^t)^*\omega = \omega$.

Bemerkung. Im \mathbb{R}^{2n} bedeutet dies $\omega_p(r, s) = \omega_{(g^t)(p)}(r, s)$ für alle r, s .

8.4 Kommutatoren und Poissonvektorfelder

Definition. Sei \mathbf{X} ein Vektorfeld und f eine glatte Funktion auf M , dann kann \mathbf{X} aufgefasst werden als $\mathbf{X} : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$, indem man setzt:

$$\mathbf{X}(f)(p) = df_p(\mathbf{X}(p)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\mathbf{X}^t(p)) \text{ für alle } p \in M,$$

das heißt, man leitet an der Stelle p in Richtung des Vektorfelds \mathbf{X} ab.

Korollar. In lokalen Koordinaten gilt:

$$\mathbf{X}(f)(p) = \sum_{j=1}^n \alpha^j(x) (df_p) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{j=1}^n \alpha^j(x) \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Definition. Seien $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{C}^\infty[\mathbf{X}, \text{TM}]$, dann ist der *Kommutator* (auch *Poissonklammer* für Vektorfelder genannt) von $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty$ $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{Y} \circ \mathbf{X} - \mathbf{X} \circ \mathbf{Y}$.

Bemerkung. Eine Berechnung in lokalen Koordinaten ergibt

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n -a^j \frac{\partial b^k}{\partial x^j} + b^j \frac{\partial a^k}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k},$$

also ist auch $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ ein Vektorfeld.

Satz 8.3. Der Fluss $\mathbf{X}^t, \mathbf{Y}^s$ der Vektorfelder \mathbf{X}, \mathbf{Y} kommutiert genau dann, wenn $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0$.

Definition. Für eine symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) und $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ist die *Poissonklammer* der Funktionen definiert durch $(f, h)(x) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} f(H^t(x))$.

Bemerkung. f ist also genau dann eine Erhaltungsgröße zu \mathbf{H}^t , wenn $(f, h) = 0$.

Satz. Für $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt $(f, h) = df(\text{Id}h) = \omega(\text{Id}h, \text{Id}f)$ nach Definition 8.1.

Beweis. H^t hat in $t = 0$ den Tangentialvektor $\text{Id}H$, also gilt $(f, h) = df(\text{Id}h)$. Die zweite Gleichheit ergibt sich, indem man Definition 8.1 einsetzt. \square

Satz. Die Poissonklammer erfüllt $((a, b), c) + ((b, c), a) + ((c, a), b) = 0$.

Korollar. $[\mathbf{B}, \mathbf{C}]$ ist das Hamiltonfeld von (b, c) .

Beweis. $((a, b), c) + ((b, c), a) + ((c, a), b) = 0$, setze $g = (b, c)$, dann gilt $(a, g) = ((a, b)c) - ((a, c), b)$. Nun gilt $(a, d) = dg(\text{Id}g) = da(\mathbf{G}) = \mathbf{G}(a)$. Setzt man dies auch für die anderen Poissonklammern ein, so ist obige Gleichung äquivalent zu $\mathbf{G}(A) = (\mathbf{C} \circ \mathbf{B})(\mathbf{A}) - (\mathbf{B} \circ \mathbf{C})(\mathbf{A})$ für alle \mathbf{A} . \square

Bemerkung. Die Flüsse der Hamiltonfelder \mathbf{F}, \mathbf{H} zu den Hamiltonfunktionen f, h kommutieren genau dann, wenn (\mathbf{F}, \mathbf{H}) konstant ist.

Beweis. Nach Satz 8.3 gilt: Die Flüsse kommutieren $\implies [\mathbf{F}, \mathbf{H}] = 0$. (f, h) ist die Hamiltonfunktion zu $[\mathbf{F}, \mathbf{H}]$, also gilt $[\mathbf{F}, \mathbf{H}] = \text{Id}(f, h)$. Da I ein Isomorphismus ist, ist dies äquivalent zu $d(f, h) = 0$, was wiederum gleichbedeutend ist mit $(f, h) = c \in \mathbb{R}$. \square

8.5 Der Satz von Darboux

Satz. Sei ω eine symplektische Form auf \mathbb{R}^{2n} und $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Dann gibt es lokale Koordinaten $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ um x , so dass lokal $\omega^2 = \sum_{i=1}^n dp_i$ und dq_i .

Beweis. Induktive Konstruktion: Sei $p_1 : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Funktion (nicht konstant), dann ist $\mathbf{P}_1 = \text{Id}p_1 \neq 0$, da I ein Isomorphismus ist. Wähle eine Hyperebene N , die x enthält, so dass TN nicht $\mathbf{P}_1(x)$ enthält.

Die Idee ist nun, eine Koordinate q_1 einzuführen, die die Zeit misst, die der Fluss von N bis zu einem beliebigen Punkt z benötigt. In einer hinreichend kleinen Umgebung V von x ist q_1 wohldefiniert, da \mathbf{P}_1^t für hinreichend kleine t ein lokaler Diffeomorphismus ist. Nun gilt $\frac{d}{dt}\big|_t dq(\mathbf{P}_1^t(n)) = \frac{d}{dt}\big|_t t = 1$, also ist $(q_1, p_1) = 1$. Für $n = 1$ ist die Konstruktion abgeschlossen.

Wenn $n > 1$, folgt $1 = (q_1, p_1) = \omega(dp_1, dq_1)$, da ω eine alternierende Bilinearform ist. Weil dp_1, dq_1 linear unabhängig sind, folgt mit dem Satz vom Rang, dass $U = \{m \in M \mid p_1(m) = q_1(m) = 0\}$. Dies ist der Schnitt zweier Hyperebenen, die nicht identisch sind. U hat die Dimension $2n - 2$ und ist diffeomorph zu \mathbb{R}^{2n-2} .

Um die Konstruktion für kleinere n anwenden zu können, wird gezeigt, dass U durch $\omega|_U$ zu einer symplektischen Mannigfaltigkeit wird. Es reicht zu zeigen, dass $\omega|_U$ nicht ausgeartet ist. Wegen des Satzes vom regulären Wert gilt $dp_1(t) = \omega(t, \mathbf{P}_1) = 0$ für alle $t \in \text{T}_x U$ und ebenso $dq_1(t) = \omega(t, \mathbf{Q}_1) = 0$ für alle $t \in \text{T}_x U$. Damit ist $\text{T}_x U = \langle \mathbf{P}_1(x), \mathbf{Q}_1(x) \rangle^\perp$. Ist nun $\omega|_U$ ausgeartet auf U , dann ist ω auch auf \mathbb{R}^{2n} ausgeartet.

Auf U existieren nach Induktion schon Koordinaten $q_i, p_i, 2 \leq i \leq n$. Wegen oben kann $z \in V$ eindeutig durch $z = \mathbf{P}_1^t \mathbf{Q}_1^s w$ dargestellt werden für ein eindeutiges $w \in U$. So wird $p_i(z) = p_i(w)$, $i > 1$, und $q_i(z) = q_i(w)$, $i > 1$. Also bilden $q_i, p_i, 1 \leq i \leq n$, ein lokales Koordinatensystem in V .

Nun muss nur noch die Darstellung von ω gezeigt werden. Wir bezeichnen mit $\mathbf{P}_i^t, \mathbf{Q}_i^t$ die lokalen Flüsse zu den Hamiltonvektorfeldern \mathbf{P}_i und \mathbf{Q}_i zu den Hamiltonfunktionen p_i, q_i . Wegen $(q_1, p_1) = 1$ kommutieren \mathbf{P}_1^t und \mathbf{Q}_1^s . Nach Definition von q_i und $p_i, 2 \leq i \leq n$, sind diese Koordinaten invariant unter \mathbf{P}_1^t und \mathbf{Q}_1^s , also gilt $(p_i, p_1) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} p_i(\mathbf{P}_1^t) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} c = 0$. Genauso folgt $(p_1, p_i) = (p_1, q_i) = (q_1, p_i) = (q_1, q_i) = 0$.

Sei $1 < i, j \leq n$. Nach Theorem 8.4 kommutiert die Abbildung $\mathbf{P}_1^t \mathbf{Q}_1^s$ mit allen $\mathbf{P}_i^u, \mathbf{Q}_j^u$. Also lässt $\mathbf{P}_1^t \mathbf{Q}_1^s$ die Vektorfelder $\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i$ fest. Da der Hamilton'sche Fluss ω festlässt, gilt, dass ω angewandt auf ein Paar der $2n - 2$ Vektorfelder den gleichen Wert an w und z hat und dieser gleich der Poissonklammer der zugehörigen Funktionen ist. Nun gilt jedoch: Die Funktionen p_1 und q_1 sind Erhaltungsgrößen von $\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i$, da $p_1(\mathbf{P}_i^t) = \text{const.}$, daher ist $\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i$ tangential zu U . Nun kann man die Induktionsvoraussetzung auf U anwenden: \mathbf{P}_i und \mathbf{Q}_i sind Hamilton'sche

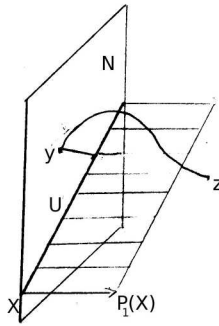


Abbildung 2: Konstruktion der Koordinaten

Vektorfelder auf U . Nach Induktionsvoraussetzung sind dort die Werte der Poissonklammern der Funktionen bekannt. Dort gilt

$$(p_i, p_j) = (p_i, q_j) = (q_i, q_j) = 0 \quad \wedge \quad (q_i, p_i) = 1.$$

p_k und q_k bilden ein Koordinatensystem, also dp_k, dq_k eine Basis des Kotangentialraums in jedem Punkt, folglich bilden $\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k$, $1 \leq k \leq n$, in jedem Punkt eine Basis des Tangentialraums, da I ein Isomorphismus ist. Die Werte von ω auf $\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k$ sind gleich den Poissonklammern der Koordinatenfunktionen. ω ist festgelegt durch Werte auf Paaren von Basisvektoren. Ist $\omega = \sum_{k=1}^n dp_k \wedge dq_k$, so ist I bekannt und es gilt $(p_i, p_j) = \omega(Idp_j, Idp_i) = \omega(\frac{\partial}{\partial q_j}, \frac{\partial}{\partial q_i}) = 0$ und $(q_i, p_i) = \omega(Idp_i, Idq_i) = \omega(\frac{\partial}{\partial q_i}, -\frac{\partial}{\partial p_i}) = 1$. Die Formeln für die anderen Poissonklammern folgen analog. Damit folgt die Behauptung. \square

Beweis von Satz 8.2. Wir definieren für ein k -Simplex $\gamma : I^k \rightarrow M$ ein $(k+1)$ -Simplex $J\gamma : I \times I^k \rightarrow M$, $(t, x) \mapsto g^t(\sigma(x))$. Dieses sei orientiert, sodass

$$\partial(J\sigma) = g^\tau \sigma - \sigma \pm J\partial\sigma.$$

Sei γ ein 1-Simplex, also ein Weg. Wir werden später zwei Pullbacks zur Auswertung von Integralen berechnen. Es gilt

$$(J\gamma)^* \omega \left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = \omega \left((J\gamma)_* \frac{\partial}{\partial s}, (J\gamma)_* \frac{\partial}{\partial t} \right) = \omega \left(\frac{\partial J\gamma}{\partial s}, \frac{\partial J\gamma}{\partial t} \right) = Id\mathbf{H}_{g^t\gamma(s)} \left(\frac{\partial J\gamma}{\partial s} \right),$$

also $(J\gamma)^* \omega \left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = Id\mathbf{H} \left(\frac{\partial J\gamma}{\partial s} \right) ds \wedge dt$, sowie

$$(g^t\gamma)^* d\mathbf{H} \left(\frac{d}{ds} \right) = d\mathbf{H} \left((g^t\gamma)_* \frac{d}{ds} \right) = d\mathbf{H} \left(\frac{\partial g^t\gamma}{\partial s} \right) = d\mathbf{H} \left(\frac{\partial J\gamma}{\partial s} \right).$$

Nun gilt

$$\int_{J\gamma} \omega = \int (J\gamma)^* \omega = \int_0^1 \int_0^\tau Id\mathbf{H} \left(\frac{\partial J\gamma}{\partial s} \right) dt ds = \int_0^\tau \int_{g^t\gamma} d\mathbf{H} dt.$$

Falls σ ein geschlossener Weg ist, gilt also $\int_{J\gamma} \omega = \int_0^\tau 0 = 0$. Ich zeige nun, dass für jeden 2-Simplex das Integral auf beiden Seiten gleich ist:

$$0 \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{J\sigma} d\omega = \int_{\partial J\sigma} \omega = \left(\int_{g^t\sigma} - \int_\sigma \pm \int_{J\partial\sigma} \right) \omega = \int_{g^t\sigma} \omega - \int_\sigma \omega = \int_\sigma (g^t)^* \omega - \int_\sigma \omega.$$

\square

Quellen

1. Arnold, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1978.
2. Witt, I., *Skript zu Differential- und Integralrechnung III*, Göttingen, 2009.
3. Berndt, R., *Einführung in die Symplektische Geometrie*, Vieweg, Wiesbaden, 1998.

9 Die Geburt des Riemannschen Krümmungstensors

Was ist eine Familie von Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$?

[hier Bild]

Sei $p \in U$. Der Tangentialraum in p an U ist $T_p U = \mathbb{R}^n \times \{p\} = \mathbb{R}^n$.

[hier Bild]

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion (C^∞ -Funktion), dann liefert f eine Familie von Linearformen

$$df_p : T_p U \rightarrow \mathbb{R}, \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot a_i.$$

Sei jetzt $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_i$.

Definition 9.1. Eine glatte Familie von Skalarprodukten auf $U \subset \mathbb{R}^n$ ist das Datum eines Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ auf $T_p U$ für alle $p \in U$, so dass

$$\langle v_1, v_2 \rangle_p = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p) dx_i(v_1) dx_j(v_2)$$

mit C^∞ -Funktionen $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g_{ij} = g_{ji}$.

[hier ist ein Bruch, muss zusammengeführt werden]

Sei $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ offen, y^1, \dots, y^n Standardkoordinaten auf \mathbb{R}^n und

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dy^i \otimes dy^j. \quad (9.1)$$

eine C^∞ -Familie von Skalarprodukten (Riemannsche Metrik auf U).

Definition 9.2. Lokale Koordinaten um 0 in U sind C^∞ -Funktionen

$$x^1, \dots, x^n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

mit $0 \in \Omega \subset U$, die einen Diffeomorphismus auf das Bild liefern.

Frage: Existieren lokale Koordinaten x^1, \dots, x^n , so dass

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i? \quad (9.2)$$

Wir wollen Bedingungen an g finden, so dass (9.2) für ein gewisses Koordinatensystem x gilt. Zunächst setzen wir

$$dx^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$$

in (9.2) ein und machen einen Koeffizientenvergleich von $dy^i \otimes dy^j$ mit (9.1). Es folgt, dass x^1, \dots, x^n die gewünschte Eigenschaft genau dann hat, wenn

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j} = g_{ij}. \quad (9.3)$$

Aus (9.3) folgt nun:

$$\begin{aligned} \sum_{j,\beta} g^{ij} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} \frac{\partial y^k}{\partial x^\beta} &= \sum_{j,\beta,\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} \frac{\partial y^k}{\partial x^\beta} \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \delta_\beta^\alpha \frac{\partial y^k}{\partial x^\beta} \\ &= \sum_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial y^k}{\partial x^\alpha} \\ &= \delta_i^k, \end{aligned}$$

das heißt

$$\sum_\beta \frac{\partial y^i}{\partial x^\beta} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} = g^{ij} \quad (\text{Komponenten der zu } (g_{ij}) \text{ inversen Matrix}). \quad (9.4)$$

Aus (9.4) folgt (9.3) und weiterhin:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} &= \sum_{\beta,i,j} \frac{\partial y^i}{\partial x^\beta} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} \\ &= \sum_\beta \delta_\beta^\mu \delta_\beta^\nu, \end{aligned}$$

das heißt, x^1, \dots, x^n haben die gewünschte Eigenschaft genau dann, wenn

$$\sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} = \delta_{\mu\nu}. \quad (9.5)$$

In Matrizen: Sei $A = (a_{ij}) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right)$ und $G = (g_{ij})$, dann gilt:

$$\begin{aligned} (9.3) &\iff A^T A = G \\ &\iff G^{-1} = A^{-1} \cdot (A^T)^{-1} \\ &\iff A G^{-1} A^T = I \\ &\iff (9.5). \end{aligned}$$

(9.3) ist eine partielle Differentialgleichung für x^1, \dots, x^n . Wir suchen Bedingungen an g_{ij} , so dass Lösungen existieren. Wir differenzieren (9.3) nach y^k :

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i \partial y^k} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j} + \sum_\alpha \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^j \partial y^k} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}.$$

Genauso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} &= \sum_\alpha \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i \partial y^j} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^k} + \sum_\alpha \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^k \partial y^j} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}, \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} &= \sum_\alpha \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^j \partial y^i} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^k} + \sum_\alpha \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^k \partial y^i} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}. \end{aligned}$$

Es folgt (die ersten beiden Gleichungen addieren, letzte dann subtrahieren):

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^j \partial y^k} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} \right) \\ &=: [jk, i]. \end{aligned}$$

Dabei handelt es sich um die *Christoffelsymbole Erster Art*. Aus (7.1) folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\gamma} [jk, i] &= \sum_{\alpha, i, \gamma} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^j \partial y^k} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\gamma} g^{i\gamma} \\ &= \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^j \partial y^k} \left(\sum_{i, \gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\gamma} g^{i\gamma} \right) \\ &\stackrel{(9.5)}{=} \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^j \partial y^k} \delta_{\alpha\lambda}, \end{aligned}$$

das heißt für $\alpha = \lambda$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial y^j \partial y^k} &= \sum_{\gamma=1} \left(\sum_{i=1} g^{i\gamma} [jk, i] \right) \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\gamma} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\gamma=1} \Gamma_{jk}^\gamma \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\gamma}, \end{aligned}$$

wobei

$$\Gamma_{jk}^\gamma := \frac{1}{2} \sum_{i=1} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} \right) \cdot g^{i\gamma}.$$

Dabei handelt es sich um die *Christoffelsymbole Zweiter Art*. Wir können auch schreiben:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^j} \right)}{\partial y^k} = \sum_{\gamma=1} \Gamma_{jk}^\gamma \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\gamma}.$$

Der Index λ spielt keine Rolle: Alle Funktionen x^λ erfüllen dieselbe Gleichung. Für jedes λ erfüllt

$$\alpha := \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^n} \right) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

das System partieller Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y^k}(y) = f_k(y, \alpha(y)), \quad (*)$$

wobei $f_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben ist durch

$$f_k^j(y, z) = \sum_{\gamma=1} \Gamma_{jk}^\gamma(y) z^\gamma.$$

(Koordinaten y^1, \dots, y^n in \mathbb{R}^n im ersten Faktor, z^1, \dots, z^n im zweiten.) $(*)$ ist linear: Linearkombinationen von Lösungen mit konstanten Koeffizienten sind wieder Lösungen. Gibt es ein lokales Koordinatensystem x^1, \dots, x^n der geforderten Art, so hat $(*)$ n Lösungen, deren Anfangswerte in 0 linear unabhängig sind. Es folgt: Dann hat $(*)$ Lösungen mit beliebigen Anfangswerten bei 0.

Notwendig für die Lösbarkeit von $(*)$ ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^\ell} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y^k}(y) \right) &= \frac{\partial}{\partial y^\ell} f_k(y, \alpha(y)), \\ \frac{\partial}{\partial y^k} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y^\ell}(y) \right) &= \frac{\partial}{\partial y^k} f_\ell(y, \alpha(y)), \end{aligned}$$

(wobei $\frac{\partial}{\partial y^\ell} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y^k}(y) \right) = \frac{\partial}{\partial y^k} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y^\ell}(y) \right)$) und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^\ell} f_k(y, \alpha(y)) &= \frac{\partial f_k}{\partial y^\ell} + \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial z^\mu} \underbrace{\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial y^\ell}}_{=f_\ell^\mu}, \\ \frac{\partial}{\partial y^k} f_\ell(y, \alpha(y)) &= \frac{\partial f_\ell}{\partial y^k} + \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial f_\ell}{\partial z^\mu} f_k^\mu. \end{aligned}$$

Weiterhin ist notwendig

$$\frac{\partial f_k}{\partial y^\ell} - \frac{\partial f_\ell}{\partial y^k} + \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial z^\mu} f_\ell^\mu - \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial f_\ell}{\partial z^\mu} f_k^\mu = 0.$$

Sehen wir uns die j -te Komponente an:

$$\sum_{\gamma=1}^n \frac{\partial \Gamma_{jk}^\gamma}{\partial y^\ell} z^\gamma - \sum_{\gamma=1}^n \frac{\partial \Gamma_{j\ell}^\gamma}{\partial y^k} z^\gamma + \sum_{\mu=1}^n \Gamma_{jk}^\mu \sum_{\gamma=1}^n \Gamma_{\mu\ell}^\gamma z^\gamma - \sum_{\mu=1}^n \Gamma_{j\ell}^\mu \sum_{\gamma=1}^n \Gamma_{\mu k}^\gamma z^\gamma = 0.$$

Die Gleichung gilt für alle $z = (z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{R}^n$, das heißt, wir haben als *notwendige* Bedingung für die Existenz lokaler Koordinaten x^1, \dots, x^n mit $\sum_{i,j} g_{ij} dy^i \otimes dy^j = \sum_i dx^i \otimes dx^i$:

$$\frac{\partial \Gamma_{kj}^\gamma}{\partial y^\ell} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{\ell j}^\gamma}{\partial y^k}}_{\stackrel{\text{def}}{=} R_{j\ell k}^\gamma} + \sum_{\mu=1}^n \left(\Gamma_{kj}^\mu \Gamma_{\ell\mu}^\gamma - \Gamma_{\ell j}^\mu \Gamma_{k\mu}^\gamma \right) \equiv 0.$$

Die $R_{j\ell k}^\gamma$ sind also n^4 -Funktionen, die jedem lokalen Koordinatensystem y^1, \dots, y^n zugeordnet sind. Ist $y' = (y'^1, \dots, y'^n)$ ein anderes lokales Koordinatensystem und definiert man $R_{j\ell k}^{\prime\gamma}$ durch dieselbe Formel, so gilt

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\prime\alpha} = \sum_{i,j,k,\ell} R_{j k \ell}^i \frac{\partial y^j}{\partial y'^\beta} \frac{\partial y^k}{\partial y'^\gamma} \frac{\partial y^\ell}{\partial y'^\delta} \frac{\partial y'^\alpha}{\partial y^i}.$$

Man sagt daher, die $R_{j k \ell}^i$ bildeten die Komponentenfunktionen eines Tensors vom Typ $\binom{3}{1}$:

$$\sum_{i,j,k,\ell} R_{j k \ell}^i dy^j \otimes dy^k \otimes dy^\ell \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}$$

(im lokalen Koordinatensystem y) heißt der *Riemannsche Krümmungstensor*. (Das ist eine \mathcal{C}^∞ -Familie von Tensoren in $T_p U^* \otimes T_p U^* \otimes T_p U^* \otimes T_p U$.)

Übung. Man zeige: Kein Gebiet auf der n -Sphäre $\mathbb{S}^n = \{\|x\| = 1 \mid x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ ist isometrisch zu einem Gebiet in \mathbb{R}^n . (Zum Beispiel \mathbb{S}^2 : Man berechne einfach $R_{j k \ell}^i$ in lokalen Koordinaten.)

[hier Bild]

10 Vortrag: Steiners Lösung des isoperimetrischen Problems

Gehalten von Philip Brinkmann.

Das *isoperimetrische Problem* besteht in der Frage, welche geschlossene Kurve vorgegebener Länge den größten Flächeninhalt umschließt. Schon die Griechen wussten die Antwort: der Kreis. Beweise folgten erst im 19. Jahrhundert: Jakob Steiner (ca. 1838) rein geometrisch, F. Edler (ca. 1882), Weierstraß und Schwarz (ca. 1884) für den Raum. Es folgt der geometrische Beweis Steiners.

Beweis. Zunächst ist zu zeigen: Nur konvexe Kurven können das Problem lösen.

[hier Bild]

Falls C nicht konvex ist, gibt es eine Tangente an zwei Randpunkte, und der Kurvenabschnitt C gespiegelt wird zu C'_1 , so dass die neue konvexe Kurve den gleichen Umfang, aber eine größere Fläche hat.

[hier Bild]

Nun ist zu zeigen: C ist symmetrisch zu \overline{AB} . Sei C eine konvexe Kurve und $A, B \in C$, wobei A und B C in zwei gleichlange Kurven teilen. O.B.d.A. sei $R_1 \geq R_2$. Wenn $R_1 > R_2$, so kann man R_1 an \overline{AB} spiegeln und C' hat bei gleichem Umfang eine größere Fläche als C . Daher kann man davon ausgehen, dass die Kurve C symmetrisch zu \overline{AB} ist.

Nun ist zu zeigen: C ist Kreis.

[hier Bild]

Sei C eine Lösung, aber kein Kreis. Dann sind C_1 und C_2 keine Halbkreise, und man findet ein $P \in C_1$, so dass $\sphericalangle APB$ kein rechter Winkel ist. Somit gibt es auch ein $Q = P$ gespiegelt an \overline{AB} , und $\sphericalangle AQB$ ist kein rechter Winkel. Für das Viereck $APBQ$ gilt

$$\overline{AP} = \overline{AQ} \quad \text{sowie} \quad \overline{BP} = \overline{BQ},$$

und die Fläche, die C umschließt, ist die Fläche des Vierecks und der Flächen T_1, T_2, T_3 und T_4 . „Zieht“ man nun P und Q so auseinander, dass $\sphericalangle APB$ und $\sphericalangle AQB$ rechte Winkel werden, und lässt man alle Seiten sowie die Bögen gleich, so erhält man eine Kurve, die einen größeren Flächeninhalt umschließt als C . Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass C eine Lösung ist. Daher muss C ein Kreis sein, denn nach dem Satz von Thales gilt: $\sphericalangle APB$ ist ein rechter Winkel für alle $P \in C_1$. \square

Problem: Es ist nicht gezeigt, dass es überhaupt eine Lösung des isoperimetrischen Problems gibt. Wir benötigen noch einen Existenzbeweis.

Existenzbeweis. Sei (X, d) ein beschränkter, metrischer Raum.

Definition. • Mit $\mathcal{C}(X)$ bezeichnen wir die Menge aller nicht-leeren geschlossenen Teilmengen von X .

- Der Abstand $d(x, C)$ sei definiert als $\min d(x, y)$ für $x \in X, C \in \mathcal{C}(X)$.
- Eine ε -Umgebung von C in $\mathcal{C}(X)$ sei definiert als $U_\varepsilon(C) = \{x \mid d(x, C) < \varepsilon\}$.
- Seien $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(X)$. Dann sei der Abstand von C_1 zu C_2 definiert als

$$\varrho(C_1, C_2) = \{\varepsilon > 0 \mid C_1 \subset U_\varepsilon(C_2) \wedge C_2 \subset U_\varepsilon(C_1)\}.$$

Bemerkung. ϱ ist eine Metrik auf $\mathcal{C}(X)$ (die sogenannte *Hausdorff-Metrik*):

- $\varrho(C_1, C_2) = 0 \iff C_1 \subset U_\varepsilon(C_2) \wedge C_2 \subset U_\varepsilon(C_1)$ für alle $\varepsilon > 0 \iff C_1 = C_2$.
- $\varrho(C_1, C_2) = \varrho(C_2, C_1)$.
-

$$\begin{aligned} \varrho(C_1, C_2) + \varrho(C_2, C_3) &= \inf\{\varepsilon > 0 \mid C_1 \subset U_\varepsilon(C_2) \wedge C_2 \subset U_\varepsilon(C_1)\} \\ &\quad + \inf\{\varepsilon > 0 \mid C_2 \subset U_\varepsilon(C_3) \wedge C_3 \subset U_\varepsilon(C_2)\} \\ &\geq \inf\{\varepsilon > 0 \mid C_1 \subset U_\varepsilon(C_3) \wedge C_3 \subset U_\varepsilon(C_1)\} \\ &= \varrho(C_1, C_3). \end{aligned}$$

Wenn X kompakt ist, folgt, dass die zugehörige Topologie auf $\mathcal{C}(X)$ nur von der Topologie auf X abhängt, nicht von der Metrik d , da jede Umgebung von $C \subset \mathcal{C}(X)$ eine ε -Umgebung enthält.

Satz. Wenn (X, d) kompakt ist, ist auch $(\mathcal{C}(X), \varrho)$ kompakt.

Beweis. Zunächst ist zu zeigen: $\mathcal{C}(X)$ hat endlichen Durchmesser. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle endlich viele Mengen A_1, \dots, A_n mit Durchmesser $< \varepsilon$, die X überdecken. Für jede endliche Menge $F \subset \{1, \dots, n\}$ sei $a_F := \{C \in \mathcal{C}(X) \mid C \cap A_j \neq \emptyset \iff j \in F\}$, das heißt, die Menge aller $C \in \mathcal{C}(X)$, die genau in allen A_j Punkte haben. Die a_F überdecken $\mathcal{C}(X)$ und haben einen Durchmesser $\leq 2\varepsilon$. Es sind nur endlich viele, also hat $(\mathcal{C}(X), \varrho)$ endlichen Durchmesser (ist total beschränkt).

Nun ist zu zeigen: Alle Cauchy-Folgen konvergieren. Seien C_1, C_2, \dots eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{C}(X), \varrho)$, und sei C die Menge aller $x \in X$, so dass jede Umgebung von x Punkte unendlich vieler C_n enthält. C ist nicht-leer, da für $x_n \in C_n$ x Häufungspunkt der Folge $\{x_n\}$ ist. Es folgt $x \in C$, da $C_n \subset U_\varepsilon(C_m) \wedge C_m \subset U_\varepsilon(C_n)$ für alle $n, m > N(\varepsilon)$.

Auch gilt: C ist abgeschlossen.

Behauptung. $C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Es ist zu zeigen: Die C_n sind für große n in $U_\varepsilon(C)$. Angenommen, es existierten unendlich viele $\{(C_n)_i\}$. Teilfolge von C_n in der kompakten Menge $X \setminus U_\varepsilon(C)$. Dann gibt es $\{(x_n)_\varepsilon\} \in \{(C_n)_\varepsilon\} \cap [X \setminus U_\varepsilon(C)]$, und somit ist $x \in X \setminus U_\varepsilon(C)$ Häufungspunkt dieser $\{(x_n)_i\}$. Es folgt $x \in C \implies$ Widerspruch zu $x \in X \setminus U_\varepsilon(C)$. \square

Damit folgt nun der Satz ($(\mathcal{C}(X), \varrho)$ ist kompakt). \square

Wir wenden nun dieses Ergebnis auf \mathbb{R}^2 und die geschlossene Teilmenge $X \in \mathbb{R}^2$ an.

Definition. • Con $X \subset \mathcal{C}(X)$ sei die Menge aller nicht-leeren, konvexen Teilmengen von X ; sie sind auch kompakt.

- Die stetige Abbildung $A : \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben mit $A(C) :=$ Fläche von C .
- Die Abbildung $L : \text{Con } X \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben mit $L(C) :=$ Umfang von C .

Satz. L ist stetig.

Zum Beweis verwenden wir folgendes Lemma:

[hier Bild]

Lemma. Seien Y_1, Y_2 konvexe Kurven, und Y_2 umschlieÙe Y_1 . Dann gilt: Länge $Y_2 \geq$ Länge Y_1 .

Beweis. Ein Y_1 eingeschriebenes Vieleck hat immer einen kleineren Umfang als das entsprechende in Y_2 eingeschriebene Vieleck. \square

Beweis des Satzes. Sei $\varrho(C_1, C_2) < \varepsilon$, dann ist $C_1 \subset (1 + \varepsilon) \cdot C_2$ und $C_2 \subset (1 + \varepsilon) \cdot C_1$. Die Behauptung folgt aus dem Lemma. \square

Hieraus folgt, dass es eine konvexe Kurve als Lösung gibt: Sei nun X eine Scheibe im \mathbb{R}^2 mit Radius L_0 . Dann ist $L^{-1}(L_0) \subset \text{Con } X$ eine geschlossene Teilmenge vom kompakten Raum $\text{Con } X$, daher nimmt die stetige Funktion A ihr Maximum an. \square

Da wir um Steiners Lösung wissen, folgt als Lösung: Der Kreis hat bei vorgegebener Länge unter allen geschlossenen Kurven der Ebene den größten Flächeninhalt.

Quelle: Michael Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Band 4, Kapitel 9.

11 Divisionsalgebren und Topologie I

Definition 11.1. Ein K -Vektorraum A heißt K -Algebra, wenn eine K -bilineare Abbildung $\beta : A \times A \rightarrow A$ gegeben ist („Produkt“). Statt $\beta(a, b)$ schreiben wir auch $a \cdot b$. A heißt *Divisionsalgebra*, wenn die Gleichungen $ax = b$ und $yc = d$ für alle $a, b, c, d \in A$ mit $a \neq 0, c \neq 0$ immer eindeutig für x, y lösbar sind.

Im Folgenden geht es stets um endlichdimensionale Divisionsalgebren $/\mathbb{R}$.

Sei A eine endlichdimensionale \mathbb{R} -Algebra mit einem involutorischen Antiautomorphismus $a \mapsto \bar{a}$, das heißt einer Abbildung $\bar{(\cdot)} : A \rightarrow A$ mit $\bar{\bar{a}} = a$ für alle $a \in A$ und $\overline{(ab)} = \bar{b} \cdot \bar{a}$. Wir wollen die Verdopplung von A folgendermaßen definieren:

- Als Vektorraum haben wir $A^2 = A \oplus A$,
- als Multiplikation $(a, b) \cdot (u, v) := (au - \bar{v}b, b\bar{u} + va)$ (\mathbb{R} -bilinear).

Ist zum Beispiel $A = \mathbb{R}$, dann ist $A^2 \cong \mathbb{C}$.

Wir haben hierbei die Inklusion $A \rightarrow A^2, a \mapsto (a, 0)$. Wenn A ein Einselement 1 hat, so ist $(1, 0)$ Einselement von A^2 .

Setze $e := (0, 1) \in A^2$. Dann ist $b \cdot e = (0, b)$, das heißt, $(a, b) = a + be$ mit $a, b \in A$.

Es gelten folgende Rechenregeln:

- $a(be) = (ab)e$,
- insbesondere $e^2 = -1$,
- $(ae)b = (a\bar{b})e$,
- $(ae)(be) = -\bar{b}a$.

Die *Hamilton'schen Quaternionen* sind definiert als $\mathbb{C}^2 = \mathbb{H}$ (Verdopplung). Elemente von \mathbb{C}^2 haben die Form

$$\xi = a + be$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$. Es ist $a = a_0 + a_1i, b = a_2 + a_3i$, und wir setzen $j := e, k := ie$, dann ist

$$\xi = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k,$$

und die Multiplikation ist gegeben durch

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

wobei

$$ki = j = -ik, \quad ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj.$$

Will man die Konstruktion der Verdopplung iterieren, braucht man in A^2 eine Konjugation. Sie wird definiert durch

$$\overline{a + be} := \bar{a} - be.$$

Bemerkung 11.2. Beim Verdoppeln werden die algebraischen Eigenschaften immer schlechter. Zum Beispiel ist A im Allgemeinen nicht kommutativ, und A^2 ist im Allgemeinen nicht assoziativ, wenn A nicht kommutativ war.

Definition 11.3. Eine Algebra A über \mathbb{R} mit Einselement heißt *metrisch*, wenn es in A eine Konjugation $a \mapsto \bar{a}$ gibt, so dass für alle $a \in A$ gilt $a\bar{a} \in \mathbb{R} \cdot 1$ und $a\bar{a} > 0$ für $a \neq 0$. Dann heißt $|a| = \sqrt{a\bar{a}}$ die *Norm* von a . Es ist $|a| = 0 \iff a = 0$.

In einer metrischen Algebra definiert dann

$$\langle x, y \rangle := \frac{x\bar{y} + y\bar{x}}{2}$$

ein Skalarprodukt. Das heißt, jede metrische Algebra ist auch ein euklidischer Vektorraum bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Ist $A' = (\mathbb{R}1)^\perp$ in einer metrischen Algebra A , dann kann man jedes $a \in A$ eindeutig schreiben als $a = \lambda + a'$ mit $\lambda \in \mathbb{R}1, a' \in A'$. Wir haben dann $\bar{a} = \lambda - a'$, und das heißt $a \in A' \iff \bar{a} = -a$ und $a \in \mathbb{R}1 \iff \bar{a} = a$.

Ist A eine metrische Algebra, so auch A^2 : denn $(a + be)\overline{(a + be)} = (a + be)(\bar{a} - be) = a\bar{a} + b\bar{b}$. Es folgt: Alle Algebren $\mathbb{R}, \mathbb{C} = \mathbb{R}^2, \mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ und $\mathbb{O} := \mathbb{H}^2$ sind metrisch (mit $\mathbb{O} = \text{Cayley'sche Oktaven}$).

Eine Algebra A heißt *normiert*, wenn A eine Norm $\|\cdot\|$ hat, die mit dem Produkt verträglich ist:

$$\|ab\| = \|a\| \|b\|$$

für alle $a, b \in A$. In einer normierten Algebra sind für $a \neq 0$ die Abbildungen $x \mapsto \frac{ax}{\|a\|}$ und $x \mapsto \frac{xa}{\|a\|}$ Isometrien. Wenn A endlichdimensional ist, sind sie bijektiv.

Normierte Algebren sind die metrischen Algebren $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und \mathbb{O} .

Ist A metrisch und $\varphi : A \rightarrow A$ ein mit der Konjugation kommutierender Automorphismus, dann ist φ orthogonal ($\overline{\varphi(a)} = \varphi(\bar{a})$). Ist φ orthogonal und gibt es ein Einselement in A , dann ist $\varphi(\underbrace{A'}_{=\mathbb{R}1}) \subset A'$, und φ kommutiert mit der Konjugation. Ist A normiert, dann ist jeder Automorphismus φ orthogonal:

Beweis. Es reicht zu zeigen $\|a\| = 1 \implies \|\varphi(a)\| = 1$. Wäre $\|\varphi(a)\| < 1$, dann $\|\varphi(a^k)\| = \|\varphi(a)\|^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, das heißt $\varphi(a^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, also $a^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Das ist ein Widerspruch zu $\|a\| = 1$. Genauso ist es nicht möglich, dass $\|\varphi(a)\| > 1$. \square

Bemerkung 11.4. $\text{Aut}_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = (1)$, $\text{Aut}_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\text{Aut}_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = \text{SO}(3, \mathbb{R})$, $\text{Aut}_{\mathbb{R}} \mathbb{O} = G_2$ (eine eher außergewöhnliche Liegruppe).

11.1 Die Cayley-Algebra der Oktaven

$\mathbb{O} := \mathbb{H}^2$ heißt die *Cayley-Algebra der Oktaven*. Jede Oktave ξ ist also von der Form $\xi = a + be$ mit $a, b \in \mathbb{H}$. Eine Basis von \mathbb{O} über \mathbb{R} (als Vektorraum) besteht damit aus

$$1, i, j, k, e, \quad f = ie, \quad g = je, \quad h = ke.$$

Bei den Quaternionen \mathbb{H} wird die Multiplikation beschrieben durch $i \xrightarrow{\cdot k} j \xrightarrow{\cdot i} k \xrightarrow{\cdot j} i$. Die Multiplikation der Oktaven wird beschrieben durch

$$i^2 = j^2 = k^2 = e^2 = f^2 = g^2 = h^2 = -1$$

und folgendes Bild:

[hier Bild]

Das Produkt zweier Elemente der $i, \dots, h \in \mathbb{O}$ ist (bis auf Vorzeichen) das Element auf derselben Strecke (oder dem Kreis) wie die beiden Faktoren, mit denen man startet. Die Orientierung entscheidet über das Vorzeichen. (Zum Beispiel ist $eh = k$ und $fj = -h$.) \mathbb{O} ist nicht kommutativ: $eh = k = -he$. \mathbb{O} ist auch nicht assoziativ: $(fj)e = -he = k$, $f(je) = fg = -k$. Aber \mathbb{O} ist *alternativ*: Das heißt, für $\xi, \eta \in \mathbb{O}$ gilt

$$(\xi\eta)\eta = \xi(\eta\eta), \quad \xi(\xi\eta) = (\xi\xi)\eta.$$

12 Divisionsalgebren und Topologie I (Forts.)

12.1 Die Cayley-Algebra der Oktaven (Forts.)

Satz 12.1. \mathbb{O} ist alternativ, für $\xi, \eta \in \mathbb{O}$ gilt also

$$(\xi\eta)\eta = \xi(\eta\eta), \quad \xi(\xi\eta) = (\xi\xi)\eta.$$

Beweis. Sei $\xi = a + be$, $\eta = u + ve$ mit $a, b, u, v \in \mathbb{H}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \xi\eta &= (au - \bar{v}b) + (b\bar{u} + va)e, \\ (\xi\eta)\eta &= \{(au - \bar{v}b)u - \bar{v}(b\bar{u} + va)\} + \{(b\bar{u} + va)\bar{u} + v(au - \bar{v}b)\}e, \\ \eta\eta &= (u^2 - \bar{v}v) + (v\bar{u} + vu)e, \\ \xi(\eta\eta) &= \{a(\bar{u} - \bar{v}u) - \overline{(v\bar{u} + vu)}b\} + \{b(u^2 - \bar{v}v) + (v\bar{u} + vu)a\}e \end{aligned}$$

und

$$a(u^2 - \bar{v}v) - \overline{(v\bar{u} + vu)}b = au^2 - a\bar{v}v - (u + \bar{u})\bar{v}b.$$

$\bar{v}v$ und $u + \bar{u}$ sind reell (nämlich unter der Konjugation (\cdot) invariant) und kommutieren mit jeder Quaternion. Daher lässt sich die letzte Gleichung fortsetzen mit

$$\begin{aligned} \dots &= au^2 - \bar{v}va - \bar{v}b(u + \bar{u}) \\ &= (au - \bar{v}b) - \bar{v}(b\bar{u} + va). \end{aligned}$$

Genauso:

$$\begin{aligned} \overline{b(u^2 - \bar{v}v)} + (v\bar{u} + vu)a &= b\bar{u}^2 - b\underbrace{\bar{v}v}_{=v\bar{v}} + v(\bar{u} + u)a \\ &= b\bar{u}^2 - v\bar{v}b + va(\bar{u} + u) \\ &= (b\bar{u} + va)\bar{u} + v(au - \bar{v}b). \end{aligned}$$

Also ist $(\xi\eta)\eta = \xi(\eta\eta)$, und die zweite Gleichung folgt genauso. \square

Satz 12.2. \mathbb{O} ist Divisionsalgebra.

Beweis. Es reicht zu zeigen: \mathbb{O} ist normiert. Dazu ist zu zeigen: $\xi = a + be$, $\eta = u + ve$. Es ist

$$\begin{aligned} |\xi\eta| &= |\xi| \cdot |\eta|, \\ |\xi\eta|^2 &= |au - \bar{v}b|^2 + |b\bar{u} + va|^2 \\ &= (au - \bar{v}b)(\bar{u}a - b\bar{v}) + (b\bar{u} + va)(u\bar{b} + \bar{a}v), \\ |\xi|^2 |\eta|^2 &= (a\bar{a} + b\bar{b})(u\bar{u} + v\bar{v}). \end{aligned}$$

Ist $v = \lambda + v'$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $v' \in (\mathbb{R}1)^\perp$ (das heißt $\bar{v}' = -v'$), dann ist

$$\begin{aligned} |\xi\eta|^2 - |\xi|^2 |\eta|^2 &= \lambda(a\bar{u}b + \bar{b}u\bar{a} - \bar{b}u\bar{a} - u\bar{u}b) + (au\bar{b} + b\bar{u}a)v' - v'(au\bar{b} + b\bar{u}a) \\ &= 0, \end{aligned}$$

weil $(au\bar{b} + b\bar{u}a) \in \mathbb{R}$ und also mit $v' \in \mathbb{H}$ kommutiert. \square

Bemerkung 12.3. Man kann direkt annehmen, dass in \mathbb{O} zum Beispiel die Gleichung $\xi x = \eta$ die Lösung $x = \xi^{-1}\eta$ hat, wobei $\xi^{-1} = \frac{\bar{\xi}}{|\xi|^2}$, aber es ist beschwerlich. Man benutzt die Eigenschaft von \mathbb{O} , alternativ zu sein.

Wir haben nun gesehen: Es gibt reelle Divisionsalgebren in den Dimensionen 1, 2, 4 und 8. (Das sind die einzigen Dimensionen, in denen es Divisionsalgebren gibt.)

Bemerkung 12.4. Ausgehend von \mathbb{O} kann man noch weitere interessante „höhere“ algebraische Objekte konstruieren, zum Beispiel

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & \xi & \eta \\ \bar{\xi} & \lambda_2 & \zeta \\ \bar{\eta} & \bar{\zeta} & \lambda_3 \end{pmatrix} \mid \text{die hermiteschen } 3 \times 3\text{-Matrizen mit Einträgen aus } \mathbb{O} \right\}$$

mit der Multiplikation

$$A \circ B := \frac{1}{2}(A \cdot B + B \cdot A).$$

J ist eine sogenannte *Jordan-Algebra*. Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms einer Matrix aus J liefern eine Bilinearform, eine quadratische Form und eine kubische Form. Die Automorphismengruppe von J ist die exzeptionelle Liegruppe vom Typ F_4 . Die Automorphismengruppe der kubischen Form ist die exzeptionelle Liegruppe vom Typ E_6 .

12.2 Topologie

Sei B ein topologischer Raum.

Definition 12.5. Ein *reelles Vektorbündel* \mathcal{E} über B besteht aus folgenden Daten:

1. einem topologischen Raum \mathcal{E} (dem *Totalraum*),
2. einer stetigen Abbildung $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$ (der *Bündelprojektion*),
3. für alle $b \in B$ ist auf der sogenannten *Faser* $\mathcal{E}_b = \pi^{-1}(b)$ von \mathcal{E} über b die Struktur eines \mathbb{R} -Vektorraums gegeben.

Es muss gelten (*Eigenschaft der lokalen Trivialität*): Für alle $b \in B$ gibt es eine Umgebung $U \ni b$, ein $n \geq 0$ ($\in \mathbb{Z}$) und einen Homöomorphismus

$$h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U),$$

so dass für alle $b \in B$ die Abbildung $x \mapsto h(b, x)$ ein Isomorphismus von \mathbb{R}^n mit dem \mathbb{R} -Vektorraum \mathcal{E}_b ist. (Speziell ist h \mathbb{R} -linear auf jeder Faser.) (U, h) heißt *lokales Koordinatensystem* für \mathcal{E} . Ist $\mathcal{E} = B \times \mathbb{R}^n$, so heißt \mathcal{E} *triviales Bündel*.

Der reelle projektive Raum $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ ist definiert als die Menge aller ungeordneten Paare $\{\pm x\}$, wobei $x \in \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ($\mathbb{S}^n = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$) topologisiert als Quotient von \mathbb{S}^n . Äquivalent ist \mathbb{P}^n die Menge aller Geraden ℓ in \mathbb{R}^{n+1} durch den Ursprung $O \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Sei $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ die Menge von Paaren $(\{\pm x\}, v)$, so dass v ein Vielfaches von x ist. Wir haben

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{R} &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ (\{\pm x\}, v) &\mapsto \{\pm x\}. \end{aligned}$$

Jede Faser von \mathcal{R} , $\pi^{-1}(\{\pm x\})$, kann mit der Geraden in \mathbb{R}^{n+1} durch $+x$ und $-x$ identifiziert werden.

Im \mathbb{R}^3 :

[hier Bild]

\mathcal{R} ist lokal trivial: Ist $U \subset \mathbb{S}^n$ offen und so klein, dass es keine Antipodenpunkte enthält, und ist $U_1 := \text{Bild von } U \text{ in } \mathbb{P}^n$, dann definiert

$$\begin{aligned} h : U_1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \pi^{-1}(U_1) \\ h(\{\pm x\}, t) &\longmapsto (\{\pm x\}, tx) \end{aligned}$$

ein lokales Koordinatensystem. \mathcal{R} heißt *topologisches Bündel*.

Satz 12.6. \mathcal{R} ist auf \mathbb{P}^n nicht isomorph zum trivialen Bündel für $n \geq 1$. (\mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 heißen isomorph $\iff \exists f : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ Homöomorphismus, der jede Faser von \mathcal{E}_2 abbildet.)

Der Beweis benötigt folgendes Konzept:

Definition 12.7. Eine globale Schnittfläche (ein globaler Schnitt) in $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$ ist eine stetige Abbildung $s : B \rightarrow \mathcal{E}$, so dass $s(b) \in \mathcal{E}_b$ für alle $b \in B$. s heißt *nicht-verschwindend*, wenn $s(b) \neq 0$ für alle $b \in B$.

[hier Bild]

Ein triviales \mathbb{R}^1 -Bündel hat natürlich nicht-verschwindende globale Schnittflächen. \mathcal{R} hingegen hat *keine* nicht-verschwindende globale Schnittfläche:

Beweis. Sei $s : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathcal{R}$ eine Schnittfläche. Wir betrachten die Komposition

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^n &\rightarrow \mathbb{P}^n \rightarrow \mathcal{R} \\ x &\longmapsto (\{\pm x\}, t(x)x), \end{aligned}$$

wobei t eine stetige reellwertige Funktion auf \mathbb{S}^n ist mit $t(-x) = -t(x)$. Weil \mathbb{S}^n zusammenhängend ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz: $\exists x_0 \in \mathbb{S}^n : t(x_0) = 0$. \square

Beispiel 2. Wir betrachten \mathcal{R} auf $\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{S}^1$ (die Kreislinie). Wir können $r = (\{\pm x\}, v) \in \mathcal{R}$ in diesem Fall schreiben als

$$r = \left(\{\pm(\cos \vartheta, \sin \vartheta)\}, t(\cos \vartheta, \sin \vartheta) \right).$$

[hier Bild]

Diese Darstellung ist eindeutig bis auf folgende Tatsache:

$$\left(\{\pm(\cos 0, \sin 0)\}, t(\cos 0, \sin 0) \right)$$

ist gleich

$$\left(\{\pm(\cos \pi, \sin \pi)\}, -t(\cos \pi, \sin \pi) \right).$$

Das heißt, wir erhalten \mathcal{R} aus dem Streifen $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ in der (ϑ, t) -Ebene durch Identifikation des linken Randes $\{0\} \times \mathbb{R}$ mit dem rechten Rand $\{\pi\} \times \mathbb{R}$ durch $(0, t) \mapsto (\pi, -t)$. Also ist \mathcal{R} ein (offenes) Möbiusband über $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{P}^1$. \mathcal{R} ist auch anschaulich nicht homöomorph zum Zylinder $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

[hier Bilder]

13 Divisionsalgebren und Topologie II

Sei \mathcal{E} ein Vektorbündel auf einem topologischen Raum X . Dann gibt es eine offene Überdeckung $X \subset \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ und einen Homöomorphismus $h_{\alpha} : U_{\alpha} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_{\alpha}) =: \mathcal{E}_{U_{\alpha}}$.

[hier Bild]

Auf $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$ haben wir dann

$$\begin{aligned} h_{\alpha} : U_{\alpha} \times \mathbb{R}^n \Big|_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}} &\longrightarrow \mathcal{E}_{U_{\alpha}} \Big|_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}}, \\ h_{\beta} : U_{\beta} \times \mathbb{R}^n \Big|_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}} &\longrightarrow \mathcal{E}_{U_{\beta}} \Big|_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}}. \end{aligned}$$

Es ist $g_{\alpha\beta} := h_{\beta}^{-1} \circ h_{\alpha} : (U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} (U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \times \mathbb{R}^n$. $g_{\alpha\beta}$ ist faserweise linear, das heißt von der Form

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(x, v) &= (x, G_{\alpha\beta}(x)(v)) \quad \text{und} \\ G_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} &\longrightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}) \quad (\text{stetig}). \end{aligned}$$

Dabei ist $G_{\alpha\beta} = \text{id}$.

Auf $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \cap U_{\gamma}$ ist $G_{\beta\gamma} \cdot G_{\alpha\beta} = G_{\alpha\gamma}$, denn es ist

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= h_{\beta}^{-1} \circ h_{\alpha}, \\ g_{\beta\gamma} &= h_{\gamma}^{-1} \circ h_{\beta}, \\ g_{\alpha\gamma} &= h_{\gamma}^{-1} \circ h_{\alpha}, \end{aligned}$$

und somit $g_{\beta\gamma} \circ g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}$. Also liefert ein Vektorbündel \mathcal{E} vom Rang n das Datum von

1. einer offenen Überdeckung $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ von X ,
2. stetigen Funktionen

$$G_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \longrightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$$

für alle $\alpha, \beta \in A$, so dass für alle $\alpha \in A$: $G_{\alpha\alpha} = \text{id}$ und $G_{\beta\gamma} \cdot G_{\alpha\beta} = G_{\alpha\gamma}$ auf $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \cap U_{\gamma}$.

Umgekehrt liefert das Datum von (1) und (2) ein Vektorbündel \mathcal{E} auf X . Also ist

$$\mathcal{E} = \left(\coprod_{\alpha \in A} U_{\alpha} \times \mathbb{R}^n \right) / \sim,$$

wobei $\coprod :=$ disjunkte Vereinigung und

$$\underbrace{(x, v)}_{\in U_{\alpha} \times \mathbb{R}^n} \sim \underbrace{(x, G_{\alpha\beta}(x)(v))}_{\in U_{\beta} \times \mathbb{R}^n}$$

für $x \in U_{\alpha} \cap U_{\beta}$.

Jede funktorielle Konstruktion auf Vektorräumen überträgt sich auf Bündel, und jeder *naturliche* Isomorphismus von Vektorräumen liefert einen Isomorphismus der induzierten Bündel. Zum Beispiel: Ist $F : \text{Vektorräume} \rightarrow \text{Vektorräume}$, etwa $V \rightarrow V^{**}$ (Bidualraum), dann ist zu einem Vektorbündel \mathcal{E} , gegeben durch die Daten $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ und $\{G_{\alpha\beta}\}_{(\alpha, \beta) \in A \times A}$, das Bündel \mathcal{E}^{**} erklärt durch die Daten $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ und $\{F(G_{\alpha\beta})\}_{(\alpha, \beta) \in A \times A}$. Ist also

$$G_{\alpha\beta}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

so ist

$$F(G_{\alpha\beta}(x)) = G_{\alpha\beta}(x)^{**} : (\mathbb{R}^n)^{**} \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^{**}.$$

Die Funktorialität wird gebraucht, um die Bedingung $G_{\alpha\gamma} = G_{\beta\gamma} \circ G_{\alpha\beta}$ übertragen zu können: $F(G_{\alpha\gamma}) = F(G_{\beta\gamma}) \circ F(G_{\alpha\beta})$. Zu Bündeln $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ über X hat man zum Beispiel die Bündel:

$$\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2, \quad \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, \quad \mathcal{E}_1^*, \quad \text{hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2), \dots$$

Im Allgemeinen ist zum Beispiel \mathcal{E} nicht zu \mathcal{E}^* isomorph (obwohl \mathcal{E} endlichen Rang hat), aber es ist $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{**}$. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und \mathcal{E} ein Vektorbündel auf Y , dann hat man auf X das zurückgezogene Bündel $f^*\mathcal{E}$ („pull-back“):

$$\begin{array}{ccc} f^*\mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \text{ (Faserprodukt)} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Das heißt, $f^*\mathcal{E} \subset X \times \mathcal{E}$, wobei $f^*\mathcal{E} = \{(x, e) \mid f(x) = \pi(e)\}$ mit der Teilraumtopologie, und es gilt $(f^*\mathcal{E})_x \cong \mathcal{E}_{f(x)}$ (für die Fasern).

Im letzten Kapitel hatten wir das tautologische Bündel \mathcal{R} auf $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ behandelt. $\mathcal{R} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ und \mathbb{R}^{n+1} tragen eine euklidische Metrik

$$\mu(x_1e_1 + \dots + x_{n+1}e_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2.$$

Zu \mathcal{R} gibt es dann das Bündel \mathcal{R}^\perp , dessen Faser über einem Punkt $p \in \mathbb{P}^n$ gerade das orthogonale Komplement \mathcal{R}_p^\perp von $\mathcal{R}_p \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist. Wir interessieren uns im Folgenden für das Bündel

$$\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n} := \text{hom}(\mathcal{R}, \mathcal{R}^\perp)$$

auf \mathbb{P}^n .

Bemerkung 13.1. $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n}$ ist das *Tangentialbündel* von \mathbb{P}^n .

Beweis. Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Gerade durch 0, $\mathcal{C} \cap \mathbb{S}^n = \{\pm x\}$, e^\perp komplementärer n -dimensionaler Untervektorraum und $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ eine Quotientenabbildung. (x, v) und $(-x, -v)$ haben als Tangentialvektoren in $\mathcal{T}_{\mathbb{S}^n}$ dasselbe Bild unter dem Differential $df : \mathcal{T}_{\mathbb{S}^n} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n}$. $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n}$ kann identifiziert werden mit der Menge von Paaren $\{(x, v), (-x, -v)\}$ mit $\langle x, x \rangle = 1$ und $\langle x, v \rangle = 0$.
[hier Bild]

Jedes solche Paar bestimmt (und ist umgekehrt festgelegt durch) eine lineare Abbildung

$$\varphi : \ell \rightarrow \ell^\perp, \quad \varphi(x) = v,$$

das heißt $(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n})_{\{\pm x\}} \simeq \text{hom}(\ell, \ell^\perp)$, also $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n} = \text{hom}(\mathcal{R}, \mathcal{R}^\perp)$. □

Definition 13.2. \mathbb{P}^n heißt *parallelisierbar*, falls $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n}$ das triviale Bündel ist. (Die Definition für jede differenzierbare Mannigfaltigkeit erfolgt analog.)

Satz 13.3. *Ist $A \simeq \mathbb{R}^n$ als \mathbb{R} -Vektorraum eine Divisionsalgebra der Dimension n (das heißt, es ist ein \mathbb{R}^n -bilineares nullteilerfreies Produkt $p : A \times A \rightarrow A$ gegeben), dann ist \mathbb{P}^{n-1} parallelisierbar.*

Beweis. Sei e_1, \dots, e_n die Standardbasis des \mathbb{R}^n . Die Abbildungen $y \mapsto p(y, e_i)$, $i = 1, \dots, n$, sind lineare Isomorphismen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^n , das heißt, man kann lineare Abbildungen $\ell_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definieren als

$$\ell_i(p(y, e_1)) = p(y, e_i)$$

mit $i = 1, \dots, n$. Es ist $\ell_1(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Ist ℓ eine Gerade durch die 0 in \mathbb{R}^n , $\ell \cap \mathbb{S}^{n+1} = \{\pm x\}$, so liefern ℓ_1, \dots, ℓ_n Abbildungen

$$\bar{\ell}_i : \ell \rightarrow \ell^\perp, \quad x \mapsto \text{pr } \ell_i(x),$$

mit pr als der Projektion von \mathbb{R}^n auf ℓ^\perp . Es ist $\bar{\ell}_1 \equiv 0$, aber $\bar{\ell}_2, \dots, \bar{\ell}_n$ sind linear unabhängig (weil ℓ_1, \dots, ℓ_n linear unabhängig sind), also sind $\bar{\ell}_2, \dots, \bar{\ell}_n$ $(n-1)$ -linear unabhängige Schnitte in $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^{n-1}}$, das heißt $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^{n-1}} \simeq \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$. \square

Korollar 13.4. $\mathbb{P}^0 = \{pt\}$, $\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{S}^1$, \mathbb{P}^3 und \mathbb{P}^7 sind parallelisierbar.

Beweis. Existenz von \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} und \mathbb{O} . \square

Beispiel 3. \mathbb{S}^1 :

[hier Bild]

Es gilt tatsächlich: \mathbb{P}^0 , \mathbb{P}^1 , \mathbb{P}^3 und \mathbb{P}^7 sind die *einzigsten* (reell-)projektiven Räume, die parallelisierbar sind (ein tiefliegender Satz).

14 Divisionsalgebren und Topologie III

Im letzten Kapitel hatten wir gesehen (Satz 13.3): Wenn es eine reelle Divisionsalgebra der Dimension n gibt, ist \mathbb{P}^{n-1} parallelisierbar.

Bemerkung 14.1. Wenn es eine n -dimensionale reelle Divisionsalgebra gibt, so ist auch \mathbb{S}^{n-1} parallelisierbar.

Ähnlicher Beweis: Sei e_1, \dots, e_n die Standardbasis in $\mathbb{R}^n \simeq \mathcal{A}$. Sei $y \in \mathbb{S}^{n-1}$. Dann sind $y \cdot e_1, \dots, y \cdot e_n$ linear unabhängig. Orthonormalisiert man sie, bekommt man Vektoren $w_1(y), \dots, w_n(y)$. $w_2(y), \dots, w_n(y)$ sind Tangentialvektoren an \mathbb{S}^{n-1} im Punkt $w_1(y)$, daher gibt es $n - 1$ linear unabhängige Vektorfelder auf \mathbb{S}^{n-1} . \square

Wir geben einen Überblick über den Beweis, dass es außer in den Dimensionen 1, 2, 4 und 8 keine reellen Divisionsalgebren gibt:

Sei X ein topologischer Raum und $N(X)$ die Menge der Isomorphieklassen von Vektorbündeln auf X . Die Operationen \oplus und \otimes induzieren in $N(X)$ Verknüpfungen, die die gewöhnlichen Rechengesetze (Assoziativität, Kommutativität, Distributivität) von $+$ und \cdot auf (zum Beispiel) \mathbb{N} erfüllen. Wir gehen von $N(X)$ wie von \mathbb{N} zu \mathbb{Z} zu einem Ring über: Es bildet $N(X) \times N(X)$ modulo die Äquivalenzrelation

$$(a, b) \sim (c, d) \iff \exists e : a \oplus d \oplus e = c \oplus b \oplus e$$

den Ring $\text{KO}(X)$. (Man braucht e , weil für Bündel die Kürzungsregel nicht gilt, das heißt $\mathcal{E} \oplus \mathcal{G} \simeq \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ für Bündel auf X impliziert „ a nicht $\mathcal{E} \simeq \mathcal{F}$ “.) Wir haben die Zuordnung $X \rightsquigarrow \text{KO}(X)$. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, so induziert f

$$f^* : N(Y) \rightarrow N(X)$$

(f^* ist mit \oplus und \otimes verträglich), und also induziert f^* einen Ringhomomorphismus

$$f^! : \text{KO}(X) \rightarrow \text{KO}(Y),$$

so dass für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ gilt

$$(g \circ f)^! = f^! \circ g^!.$$

Ist X zusammenhängend, so hat jedes Vektorbündel eine Faserdimension, und das liefert einen surjektiven Ringhomomorphismus

$$\varepsilon : \text{KO}(X) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Sei $\widetilde{\text{KO}}(X)$ der Kern von ε .

Satz 14.2 (Periodizitätssatz von Bott). *Man hat*

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^1) &= \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^3) &= 0, \\ \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^4) &= \mathbb{Z}, \\ \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^5) &= \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^6) = \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^7) = 0, \\ \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^8) &= \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(Diese sind als Isomorphien abelscher Gruppen zu verstehen.) Allgemein ist

$$\widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^n) \simeq \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^{n+8})$$

für alle n .

Die Erzeuger in den Graden 1, 2, 4 und 8 dieser Gruppen können wie folgt beschrieben werden. Eine Abbildung $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{R})$ liefert ein m -dimensionales Bündel \mathcal{E}_f auf \mathbb{S}^n in folgender Weise:

$$\mathbb{S}^n = H^+ \cup H^-, \quad H^+ \cap H^- = \mathbb{S}^{n-1}.$$

Dabei ist H^+ die obere Halbkugel, H^- die untere und \mathbb{S}^{n-1} der Äquator.

Man verklebt die trivialen Bündel $H^+ \times \mathbb{R}^m$ und $H^- \times \mathbb{R}^m$ längs \mathbb{S}^{n-1} , indem man $(x, v) \in \mathbb{S}^{n-1}$ mit $(x, f(x) \cdot v)$ identifiziert. Man erhält einen topologischen Raum \mathcal{E}_f mit der Bündelprojektion

$$p : \mathcal{E}_f \rightarrow \mathbb{S}^n,$$

induziert durch

$$H^+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow H^+ \quad \text{und} \quad H^- \times \mathbb{R}^m \rightarrow H^-.$$

Eine n -dimensionale Divisionsalgebra $\mathcal{A} \simeq \mathbb{R}^n$ liefert

$$f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$$

durch

$$f(x)(v) := x \cdot v, \quad x \in \mathbb{S}^{n-1}, v \in \mathbb{R}^n.$$

Das assoziierte Bündel auf \mathbb{S}^n heißt *Hopfsches Bündel* (in jedem Fall $\mathcal{A} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$). Die additiven Erzeuger von $\widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^1)$, $\widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^2)$, $\widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^4)$ und $\widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^8)$ entsprechen den Hopfschen Bündeln zu $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und \mathbb{O} (man zieht von diesen noch das n -dimensionale triviale Bündel ab, um $\varepsilon = 0$ zu bekommen).

Der Isomorphismus $\widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^n) \simeq \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^{n+8})$ kann folgendermaßen explizit gemacht werden: Zu \mathbb{S}^n und \mathbb{S}^m hat man $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$. Seien $x_0 \in \mathbb{S}^n$ und $y_0 \in \mathbb{S}^m$ jeweils ein Punkt. In $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ hat man dann

$$\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^m = \{x_0\} \times \mathbb{S}^m \cup \mathbb{S}^n \times \{y_0\}$$

(„Achsenkreuz“). Identifiziert man in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^m$ mit einem Punkt, so erhält man \mathbb{S}^{n+m} , das heißt, man hat insbesondere Abbildungen $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^m \xrightarrow{i} \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \xrightarrow{p} \mathbb{S}^{n+m}$. Zum Beispiel ist mit $m = n = 1$:

[hier Bild]

Das liefert die Sequenz:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^{n+m}) & \xrightarrow{p^!} & \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m) \\ \uparrow & & \downarrow i^! \\ 0 & \longleftarrow & \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^m) \end{array}$$

Diese Sequenz ist exakt (das heißt, $p^!$ ist injektiv, $i^!$ ist surjektiv, $\ker i^! = \text{im } p^!$).

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ \mathbb{S}^n & & \mathbb{S}^m \end{array}$$

Zu $a \in \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^n)$ und $b \in \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)$ hat man

$$a \cdot b := \pi_1^! a \cdot \pi_2^! b \in \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m).$$

Es ist $i^!(a \cdot b) = 0$, also ist $a \cdot b$ Bild genau eines Elements in $\widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^{n+m})$ unter $p^!$. Dieses Element bezeichnen wir wieder mit ab . Der Isomorphismus $\text{KO}(\mathbb{S}^n) \simeq \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^{n+8})$ wird durch

$a \mapsto a \cdot (h_g - 8\mathbb{1})$ gegeben, wobei h_g Hopfsches Bündel auf \mathbb{S}^8 ist, welches zu den Oktaven \mathbb{O} gehört, und $8\mathbb{1}$ ist das 8-dimensionale triviale Bündel $\mathbb{S}^8 \times \mathbb{R}^8$ auf \mathbb{S}^8 . – Damit endet der Überblick über den Beweis.

Der Beweis des (1, 2, 4, 8)-Satzes benötigt außerdem das Theorem von Stiefel-Whitney. Zunächst hat man zu X einen topologischen Raum, den *Kohomologierung* von X mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Koeffizienten

$$H^*(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Das ist ein positiv graduierter kommutativer Ring, das heißt, $H^n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sind abelsche Gruppen, und man hat die Multiplikation

$$H^i(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times H^j(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{i+j}(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Für $f : X \rightarrow Y$ stetig hat man

$$f^* : H^i(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

und f^* ist mit dem Produkt verträglich, das heißt, f^* induziert einen Ringhomomorphismus

$$f^* : H^*(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

15 Divisionsalgebren und Topologie IV

Zu jedem Vektorbündel \mathcal{E} auf einem zusammenhängenden topologischen Raum X gibt es eine Folge von Kohomologiegruppen

$$w_i(\mathcal{E}) \in H^i(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

(die *Stiefel-Whitney-Klassen* von X) mit folgenden Eigenschaften:

1. $w_0(\mathcal{E}) = 1$ in $H^0(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ und $w_i(\mathcal{E}) = 0$ für $i > n$, wobei $n = \text{rang } \mathcal{E}$.
2. Für $f : Y \rightarrow X$ ist $w_i(f^*\mathcal{E}) = f^*w_i(\mathcal{E})$.
3. Sind \mathcal{E} und \mathcal{G} Bündel auf X , ist

$$w_k(\mathcal{E} \oplus \mathcal{G}) = \sum_{i=0}^k w_i(\mathcal{E})w_{k-i}(\mathcal{G}).$$

Zum Beispiel ist $w_1(\mathcal{E} \oplus \mathcal{G}) = w_1(\mathcal{E}) + w_1(\mathcal{G})$, $w_2(\mathcal{E} \oplus \mathcal{G}) = w_2(\mathcal{E}) + w_2(\mathcal{G}) + w_1(\mathcal{E}) + w_1(\mathcal{G})$.

4. Für das tautologische Bündel \mathcal{R} auf $\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{S}^1$ ist $w_1(\mathcal{R}) \neq 0$.

Die totale Stiefel-Whitney-Klasse von \mathcal{E} , $w(\mathcal{E}) \in H^*(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, ist

$$w(\mathcal{E}) = 1 + w_1(\mathcal{E}) + w_2(\mathcal{E}) + \dots \in H^*(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Dann ist $w(f^*\mathcal{E}) = f^*w(\mathcal{E})$, und 3) wird $w(\mathcal{E} \oplus \mathcal{G}) = w(\mathcal{E})w(\mathcal{G})$.

Als Konsequenz der Eigenschaften 1 bis 4 erhält man:

- $\mathcal{E} \simeq \mathcal{G} \implies w_i(\mathcal{E}) = w_i(\mathcal{G})$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.
- Ist \mathcal{E} ein triviales Bündel, dann ist $w_i(\mathcal{E}) = 0$, $i > 0$. (Dies folgt aus den Eigenschaften 2 und 1, denn \mathcal{E} ist Rückzug eines Bündels auf einen Punkt.)
- Ist \mathcal{E} ein triviales Bündel, so ist $w_i(\mathcal{E} \oplus \mathcal{G}) = w_i(\mathcal{G})$. (Dies folgt aus Eigenschaft 3 und der vorigen Bemerkung.)
- Ist \mathcal{E} ein n -dimensionales (reelles) Vektorbündel (mit euklidischer Metrik, dies ist aber keine Bedingung, wenn X parakompakt ist) und hat \mathcal{E} einen nirgends verschwindenden globalen Schnitt, so ist $w_n(\mathcal{E}) = 0$.

Hat \mathcal{E} k globale linear unabhängige Schnitt, dann ist $w_{n-k+1}(\mathcal{E}) = w_{n-k+2}(\mathcal{E}) = \dots = w_1(\mathcal{E}) = 0$. Denn \mathcal{E} spaltet als $k1 \oplus (k1)_{n-k}^\perp$ ($k1$ ist ein Rang- k -triviales Bündel und $k1^\perp$ sein orthogonales Komplement), das heißt, die $w_i(\mathcal{E})$ sind Obstruktionen (Hindernisse) dagegen, dass \mathcal{E} eine gewisse Anzahl globaler linear unabhängiger Schnitte hat.

Sei $G(X)$ die multiplikative Gruppe der $a \in H^*(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ mit $a = 1 + a_1 + a_2 + \dots$. Dann ist $w : \text{KO}(X) \rightarrow G(X)$ ein Homomorphismus von der additiven Gruppe $\text{KO}(X)$ in die multiplikative Gruppe $G(X)$, und für $f : Y \rightarrow X$ hat man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{KO}(X) & \xrightarrow{f!} & \text{KO}(Y) \\ \downarrow w & & \downarrow w \\ G(X) & \xrightarrow{f^*} & G(Y) \end{array}$$

Um nun zu zeigen, dass es außer in den Dimensionen 1, 2, 4 und 8 keine Divisionsalgebren gibt, reicht es zu zeigen, dass \mathbb{S}^{n-1} für $n \neq 1, 2, 4, 8$ nicht parallelisierbar ist. Man kann ein n -dimensionales Bündel \mathcal{E} über X ersetzen durch $\mathcal{E} - n\mathbb{1} \in \widetilde{\text{KO}}(X)$, ohne die Stiefel-Whitney-Klassen zu ändern. Es reicht zu zeigen:

$$w(c) = 1 \quad \text{für alle } c \in \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^n)$$

mit $n \neq 1, 2, 4, 8$. (Das heißt, $w_n(c) = 0$, $H^0(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^n(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H^i(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$. Wenn eine n -dimensionale reelle Divisionsalgebra existiert, so gibt es ein Vektorbündel \mathcal{E} auf \mathbb{S}^n , nämlich das zur Divisionsalgebra gehörige Hopfsche Rang- n -Bündel, und dieses hat immer $w_n(\mathcal{E}) = 1$.) Für $n = 3, 5, 6, 7$ ist dies richtig wegen des Bottschen Periodizitätssatzes, denn $\widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^3) = 0$, $\widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^5) = 0$ usw. Ist $n \geq 9$, so ist $n = m + 8$, $m \in \mathbb{N}$, und man kann c schreiben als

$$c = a \cdot (h_8 - 8\mathbb{1}), \quad a \in \widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^m).$$

Nach Definition von $\widetilde{\text{KO}}(\mathbb{S}^m)$ ist $a = E - F$, wobei E und F Vektorbündel gleichen Ranges auf \mathbb{S}^m sind. Das heißt, man hat in $\text{KO}(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^8)$

$$\begin{aligned} c &= (E - F) \cdot (h_8 - 8\mathbb{1}) \\ &= E \cdot h_8 - F \cdot h_8 - 8 \cdot E + 8 \cdot F, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} w(c) &= w(E \cdot h_8)w(F \cdot h_8)^{-1} \cdot w(8 \cdot E)^{-1}w(8 \cdot F) \\ &\in H^*(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^8, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Behauptung 11. Jeder der Faktoren auf der rechten Seite ist gleich 1.

Wie rechnet man das nach? Welchen Wert hat beispielsweise $w(E \cdot h_8)$? $E \cdot h_8 \in \text{KO}(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^8)$ ist das durch $\pi_1^*E \otimes \pi_2^*h_8$ definierte Element, wobei

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^8 &\longrightarrow \mathbb{S}^m, \\ \pi_2 : \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^8 &\longrightarrow \mathbb{S}^8. \end{aligned}$$

Man kann bei dieser Rechnung E und F als geradedimensional annehmen (sonst addiere triviale Rang-1-Bündel zu beiden). Es gilt nun:

Lemma 15.1. *Sind \mathcal{E} und \mathcal{G} geradedimensionale Vektorbündel über X mit*

$$\begin{aligned} w(\mathcal{E}) &= 1 + w_r(\mathcal{E}), \\ w(\mathcal{G}) &= 1 + w_s(\mathcal{G}), \quad s \text{ gerade,} \end{aligned}$$

und mit

$$w_r(\mathcal{E})^2 = w_s(\mathcal{E})^2 = 0,$$

dann ist

$$w(\mathcal{E} \otimes \mathcal{G}) = 1.$$

Das Lemma wiederum folgt aus der Beschreibung der Stiefel-Whitney-Klassen eines Tensorprodukts: Bei eindimensionalen Bündeln E, F gilt

$$w_1(E \otimes F) = w_1(E) + w_1(F).$$

Ist $E = E_1 \otimes \dots \otimes E_m$ und $F = F_1 \otimes \dots \otimes F_n$ (direkte Summe), dann ist

$$E \otimes F = \bigoplus_{i,j} (E_i \otimes F_j)$$

und also

$$w(E \otimes F) = \prod_{i,j} (1 + w_1(E_i) + w_1(F_j)).$$

Für beliebige Bündel E, F gilt das Folgende: Betrachte das Polynom

$$\prod_{i,j} (1 + x_i + y_j)$$

als Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ in Unbestimmten x, y_0 . Dieses lässt sich als Polynom in den elementarsymmetrischen Funktionen $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ der x_i und τ_1, \dots, τ_n der y_j schreiben:

$$\prod_{i,j} (1 + x_i + y_j) = P(\sigma_1, \dots, \sigma_m, \tau_1, \dots, \tau_n).$$

Dann ist

$$w(E \otimes F) = P(w_1(E), \dots, w_m(E), w_1(F), \dots, w_n(F)).$$