

Funktionalanalysis

Übungen für Woche 1

Abgabe: Di, 20. April 2004. Es sollen die mindestens die ersten beiden der Aufgaben abgegeben werden.

1. Sei H einen Vektorraum mit Skalarprodukt, und $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq H$ eine Menge von paarweise orthogonalen Vektoren ungleich Null. Beweise, dass $\{e_1, \dots, e_n\}$ linear unabhängig ist.
2. Sei H ein reeller Hilbertraum, und seien $x, y \in H$. Beweise, dass x und y orthogonal sind, genau dann wenn $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. (a) Sei $X := \{f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$. Zeige, dass $X = A \oplus B$, wobei $A := \{f \in X \mid f(x) = f(-x) \forall x\}$, und $B := \{f \in X \mid f(x) = -f(-x) \forall x\}$. Gilt $A \perp B$ bezüglich des L^2 -Skalarprodukts $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 fg$?
(b) Sei X die Menge aller stetigen Funktionen $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Finde Teilräume A und B , mit $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, und $X = A \oplus B$.
4. Sei H ein komplexer Hilbertraum, und seien $x, y \in H$. Beweise, dass x und y orthogonal sind, genau dann wenn $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$.
5. Sei H einen Hilbertraum, und $A \subseteq H$ einen linearen Teilraum. Zeige, dass $\overline{A} = (A^\perp)^\perp$.
6. Finde eine orthonormale Menge $\{f_1, f_2, f_3\} \subseteq L^2[-1, 1]$ so dass $\text{Span}\{f_1\} = \text{Span}\{1\}$, $\text{Span}\{f_1, f_2\} = \text{Span}\{1, x\}$, und $\text{Span}\{f_1, f_2, f_3\} = \text{Span}\{1, x, x^2\}$.