

# Funktionalanalysis

## Übungen für Woche 13

Abgabe: Di, 13. Juli 2004. Es sollen mindestens drei Aufgaben abgegeben werden.

1. Sei  $T: D \rightarrow H$  dicht definiert. Beweise, dass  $T$  genau dann abschließbar ist, wenn  $D(T^*)$  dicht in  $H$  liegt.

Wenn  $T$  abschließbar ist, zeige dass  $(T^*)^* \supset T$ .

2. (a) Definiere unbeschränkte Operatoren  $P, X: C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  durch die Formeln

$$P\phi(x) = -if'(x) \quad X\phi(x) = x\phi(x)$$

Zeige, dass  $P$  und  $X$  symmetrisch sind, und  $PX - XP = -i\text{Id}$ .

- (b) Sei  $H$  einen Hilbertraum. Zeige, dass es keine beschränkten Operatoren  $A, B \in \mathcal{B}(H)$  gibt, so dass  $AB - BA = -i\text{Id}$ .

[Tipp: Sei  $AB - BA = -i\text{Id}$ . Beweise  $A^n B - BA^n = -inA^{n-1}$  durch vollständige Induktion.]

3. Für einen symmetrischen Operator  $T: D \rightarrow H$ , und  $\phi \in D$ , definiere

$$\mu_\phi(T) = \langle T\phi, \phi \rangle \quad \text{sd}_\phi(T)^2 = \langle (T - \mu_\phi(T)I)^2 \phi, \phi \rangle$$

- (a) Seien  $A, B: D \rightarrow H$  selbstadjungierte dicht definierte Operatoren mit  $\text{im}(A) \cup \text{im}(B) \subset D$ . Sei  $C = AB - BA$ , und  $\phi \in D$ . Zeige, dass  $|\mu_\phi(C)| \leq 2\text{sd}_\phi(A)\text{sd}_\phi(B)$ .

- (b) Mit  $P$  und  $X$  wie in dem oben Aufgabe, zeige dass  $\text{sd}_\phi(P)\text{sd}_\phi(X) \geq 1/2$  für alle  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  mit  $|\phi|_{L^2} = 1$ .

**Interpretation:**  $\phi$  ist ein Quantenmechanischer Zustand,  $\mu_\phi(P)$  und  $\mu_\phi(X)$  der Erwartungswert für eine Impuls- beziehungsweise Ortsmessung, und  $\text{sd}_\phi(P)$ ,  $\text{sd}_\phi(X)$  die Varianz der Messung vom Mittelwert (also die Unschärfe des Impulses bzw. des Ortes). Wir beweisen also, dass in diesem Modell die Unschärferelation gilt: das Produkt der beiden Unschärfen ist mindestens  $1/2$ .

4.

5. Sei  $A: D \rightarrow H$  selbstadjungiert und dicht definiert. Setze  $U(t) := \exp(itA)$  für  $t \in \mathbb{R}$  Zeige:

- $U(t)$  unitär,  $U(s+t) = U(s)U(t)$ ,  $U(0) = \text{id}_H$ .
- Für alle  $v \in H$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  gilt  $\lim_{t \rightarrow t_0} U(t)v = U(t_0)v$ .
- Für alle  $v \in D$  gilt  $\lim_{t \rightarrow 0} (U(t)v - v)/t = iAv$ .
- Falls  $\lim_{t \rightarrow 0} (U(t)v - v)/t$  existiert, so gilt  $v \in D$ .