Funktionalanalysis
Übungen für Woche 9

Abgabe: Di, 15. Juni 2004. Es sollen mindestens drei der ersten vier Aufgaben abgegeben werden.

1. (a) Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, so dass die Menge
$$\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
gleichmäßig gleichgradig stetig ist. Zeige, dass die Menge
$$\{a \in [0,1] \mid (f_n(a)) \text{ konvergiert }\}$$
abgeschlossen ist.

   (b) Finde eine Folge von stetigen Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, wo die Menge
$$\{a \in [0,1] \mid (f_n(a)) \text{ konvergiert }\}$$
nicht abgeschlossen ist.

2. Sei $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$, und sei $H \subseteq L^2_p(\mathbb{R})$ die Menge aller 1-periodischen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ so dass $\langle f, e_n\rangle = 0$ wenn $n < 0$. Sei $P\colon L^2(\mathbb{R}) \to H$ die orthogonale Projektion auf H.

   (a) Sei $g \in C_p(\mathbb{R})$ eine stetige Periodische Funktion, und $M_g\colon L^2_p(\mathbb{R}) \to L^2_p(\mathbb{R})$ der zugehörige Multiplikationsoperator.
   Sei S die Menge aller $g \in C_p(\mathbb{R})$, so dass der Operator $PM_g - M_gP$ kompakt ist. Zeige, dass $e_n \in S$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

   (b) Sei $P(x) = \alpha_0 e_0(x) + \cdots + \alpha_n e_n(x)$, mit $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Zeige, dass $P \in S$.

   (c) Sei $g \in S$, mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Definiere den *Toeplitz Operator* $T_g\colon H \to H$ durch die Formel $T_g = PM_g$. Zeige, dass T_g Fredholm ist.
   [Tipp: Benutze Aufgabe 5.]

   (d) Berechne $Index(e_n)$.

   [Freiwillige Zusatzaufgabe: Sei $g \in C_p(\mathbb{R})$. Wenn $g(t) \neq 0$ für alle t, dann ist T_g Fredholm. Benutze ohne Beweis, dass jede stetige periodische Funktion gleichmäßiger Limes von Polynomen in den e_n ist.
   Bemerkung: Mit $\tilde{g}\colon S^1 \to \mathbb{C}\setminus\{0\}; e^{it} \mapsto g(t)$ ist $-Index(T_g)$ die Umlaufzahl von $\tilde{g}$]

3. Sei H ein Hilbertraum, und $F_1, F_2\colon H \to H$ Fredholm Operatoren. Zeige, dass $F_1 \circ F_2$ Fredholm ist, und $Index(F_1 \circ F_2) = Index(F_1) + Index(F_2)$.
   Tipp: Benutze Aufgabe 5.

4. Definiere $T\colon L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ durch die Formel
$$Tf(s) = \int_0^s (s-t)f(t)\, dt$$
Sei $g \in L^2[0,1]$. Beweise, dass es genau eine Funktion $f \in L^2[0,1]$ gibt, so dass $f - Tf = g$. [Tipp: $Tf = f$ impliziert $T^n f = f$.]

5. Sei H ein Hilbertraum, und $F \in \mathcal{B}(H)$. Zeige, dass F Fredholm ist, genau dann wenn es Operatoren $G, K, K'\colon H \to H$ geben, so dass $FG = I - K$ und $GF = I - K'$, mit K und K' kompakt.