Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte							

Differential- und Integralrechnung II
Klausur

17. Juli 2003

1. Sei $f\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y)=\sin(x+\sqrt{y})$. Berechne das Taylorpolynom von f vom Grad 2 mit dem Entwicklungspunkt $(0,\pi^2/4)$.

   (5 Punkte)

2. Seien $f,g\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ Abbildungen mit

   $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{|x|_2}=0 \qquad \text{und} \quad f(0)=g(0).$$

   Zeige: wenn f in Null differenzierbar ist, dann auch g und $Df(0)=Dg(0)$.

   (6 Punkte)

3. (a) Sei $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ stetig, sei $R\geq 0$, mit $|f(x)|\geq |x|_2$ für alle $x\in\mathbb{R}^2$ mit $|x|_2>R$. Zeige, dass f mindestenst ein lokales Extremum hat.

   (b) Bestimme alle lokalen Extrema der Funktion $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definiert durch die Formel

   $$f(x,y)=9x^2+9y^2-6xy-6x-30y+35$$

   (7 Punkte)

Bitte wenden!

4. (a) Seien $a, b > 0$. Definiere eine Funktion $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch die Formel

$$\Phi(r, \theta) = (ar\cos\theta, br\sin\theta)$$

Berechne das Differential $D\Phi(r, \theta)$ für $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Sei Q die Menge

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y, \quad 1 < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 4\}$$

Zeige, dass die Einschränkung $\Phi\colon (1, 2) \times (0, \pi) \to Q$ eine Bijektion definiert, so dass Φ und die Umkehrung stetig diffbar sind.

(c) Berechne das Integral $\int_Q f$, wo

$$f(x, y) = \frac{a^2 b^2}{b^2 x^2 + a^2 y^2}$$

(8 Punkte)

5. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y) := (y(2x^2 + 2xy^2 + 1)e^{x^2}, (x + 3y^2)e^{x^2}).$$

(a) Für $\Gamma_r\colon [0, r] \to \mathbb{R}^2; \Gamma_r(t) = (t, 0)$ und $\Gamma_{r,s}\colon [0, s] \to \mathbb{R}^2; \Gamma_{rs}(t) = (r, t)$ berechne die Vektor-Kurvenintegrale $\int_{\Gamma_r} f\, ds$ und $\int_{\Gamma_{r,s}} f\, ds$.

(b) Finde eine Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $grad\, F = f$, f wie oben.

(6 Punkte)

6. Sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix. Für $x \in \mathbb{R}^n$ setze $f(x) := \langle Ax, x\rangle$. Dies definiert eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(a) Zeige, dass alle lokalen Extremstellen der Einschränkung von f auf $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_2^2 = 1\}$ Eigenvektoren von f sind, und die zugehörigen Extremwerte Eigenwerte.

(b) Zeige, dass A mindestens einen Eigenwert besitzt.

[Tipp: Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, falls $Av = \lambda v$ und $v \neq 0$.]

(6 Punkte)