Differential- und Integralrechnung II: Lösung der Klausur

17. Juli 2003

1. Wir haben
$$f(x,y) = \sin(x+\sqrt{y})$$
so
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x+\sqrt{y}) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\cos(x+\sqrt{y})$$
und
$$\frac{\partial^1 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin(x+\sqrt{y}) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-1}{2\sqrt{y}}\sin(x+\sqrt{y})$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{4y^{3/2}}\cos(x+\sqrt{y}) - \frac{1}{4y}\sin(x+\sqrt{y})$$
Beobachte:
$$\begin{aligned} f(0,\pi^2/4) &= 1 \\ \partial f/\partial x(0,\pi^2/4) &= 0 \\ \partial f/\partial y(0,\pi^2/4) &= 0 \\ \partial^2 f/\partial x^2(0,\pi^2/4) &= -1 \\ \partial^2 f/\partial x\partial y(0,\pi^2/4) &= -1/2\pi \\ \partial^2 f/\partial y^2(0,\pi^2/4) &= -1/4\pi^2 \end{aligned}$$
Das Taylorpolynom von f vom Grad 2 mit dem Entwicklungspunkt $(0,\pi^2/4)$ ist definiert durch die Formel
$$\begin{aligned} T_2(h_1,h_2) =& f(0,\frac{\pi^2}{4}) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,\frac{\pi^2}{4})h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,\frac{\pi^2}{4})h_2 \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\frac{\pi^2}{4})h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,\frac{\pi^2}{4})h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,\frac{\pi^2}{4})h_2^2\right) \end{aligned}$$
d.h.
$$T_2(h_1,h_2) = 1 - \frac{1}{2}h_1^2 - \frac{1}{2\pi}h_1h_2 - \frac{1}{8\pi^2}h_2^2$$

2. Seit f im Punkt 0 differenzierbar ist, haben wir die Formel

$$f(h) = f(0) + Df(0)h + o(h)$$

wo

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{|h|_2} = 0$$

Beobachte:

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0) - Df(0)h}{|h|_2} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0) - Df(0)h}{|h|_2} = 0$$

So

$$g(h) = g(0) + Dg(0)h + o'(h)$$

wo

$$\lim_{h \to 0} \frac{o'(h)}{|h|_2} = 0$$

und g ist im Punkt 0 differenzierbar, mit $Dg(0) = Df(0)$.

3. (a) Wähle $s > \max(R, |f(0)|)$. Dann ist die Menge

$$B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x|_2 \leq S\}$$

abgeschlossen und beschränkt, und so kompakt. Wähle $x_0 \in B$ so dass

$$|f(x_0)| = \min\{|f(x)| \mid x \in B\}$$

[Der Punkt x_0 existiert, seit B kompakt ist].
Seit $|f(x)| > |f(0)|$ wenn $|x|_2 = S$, wissen wir, dass $|x_0| \neq S$. So ist x_0 ein lokales Minimum der Funktion $|f|$, und so ein lokales Extremum der Funktion f.

(b) Sei (x, y) ein lokale Extremum. Dann

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 18x - 6y - 6 = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 18y - 6x - 30 = 0$$

So $(x, y) = (1, 2)$.
Beobachte:

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\geq 9x^2 + 9y^2 - 6(x^2 + y^2) - 6x - 30y + 35 \\ &= 3(x^2 + y^2) - (6x + 30y) + 35 \end{aligned}$$

$$\geq 3|x|_2^2 - 30|x|_2$$

Für groß genug $|x|_2$, haben wir die Ungleichung $3|x|_2^2 - 30|x|_2 \geq |x|_2$. So, mit Teil (a), hat f mindestens ein lokales Extremum. Es gibt nur eins Möglichkeit: der Punkt $(1, 2)$. So ist der Punkt $(1, 2)$ ein lokale Extremum von f, und es gibt kein mehr.

4. (a) Sei $(x,y) = \Phi(r,\theta)$. Dann

$$x = ar\cos\theta \qquad y = ar\sin\theta$$

und

$$D\Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & ar\cos\theta \end{pmatrix}$$

(b) Falls $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$, mit $1 < r < 2$, und $0 < \theta < \pi$, dann $\sin\theta > 0$, so $y > 0$ und

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$$

so

$$1 < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 4$$

und wir haben eine Abbildung $\Phi\colon (1,2)\times(0,\pi) \to Q$.
Für $(x,y) \in Q$, sei

$$r = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \qquad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{ra}\right)$$

Sei $\Phi(r,\theta) = (x', y')$. Dann $x' = ar\cos\theta = x$ und

$$y'^2 = b^2r^2\sin^2\theta = b^2r^2(1-\cos^2\theta) = b^2r^2\left(1 - \frac{x^2}{r^2}a^2\right) = y^2$$

so $y' = y$ seit $y' > 0$ und $y > 0$.
So haben wir ein Invers $\Phi^{-1}\colon Q \to (1,2)\times(0,\pi)$, definiert durch die Formel

$$\Phi^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}, \cos^{-1}\left(\frac{x}{a\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}}\right)\right)$$

Beobachte:

$$\det(D\Phi) = abr > 0$$

für $(r,\theta) \in (1,2)\times(0,\pi)$. So ist die Invers Φ^{-1} differenzierbar.

(c) Wir können

$$\int_Q f = \int_{(1,2)} \int_{(0,\pi)} f\circ\Phi(r,\theta) |\det D\Phi(r,\theta)|\; d\theta\; dr$$

schreiben. Seit $\det(D\Phi) = abr$, haben wir:

$$\begin{aligned} int_Q f &= \int_{(1,2)} \int_{(0,\pi)} \frac{a^2b^2}{b^2a^2r^2\cos^2\theta + a^2b^2r^2\sin^2\theta}\; abr\; d\theta\; dr \\ &= ab\int_1^2 \int_0^\pi \frac{1}{r}\; d\theta\; dr \\ &= \pi ab \int_1^2 \frac{1}{r}\; dr \\ &= \pi ab\ln 2 \end{aligned}$$

5. Beobachte:

   (a)
$$\Gamma_r(t) = (t, 0) \qquad f(\Gamma_r(t)) = (0, te^{t^2}) \qquad \Gamma_r'(t) = (1, 0)$$

   So
$$\langle f(\Gamma_r(t)), \Gamma_r'(t)\rangle = 0$$

   und
$$\int_{\Gamma_r} f\ ds = 0$$

   Beobachte:
$$\Gamma_{r,s}(t) = (r, t) \qquad f(\Gamma_{r,s}(t)) = (?, (r+3t^2)e^{r^2}) \qquad \Gamma_{r,s}'(t) = (0, 1)$$

   So
$$\langle f(\Gamma_{r,s}(t)), \Gamma_r'(t)\rangle = (r+3t^2)e^{r^2}$$

   und
$$\int_{\Gamma_{r,s}} f\ ds = \int_0^s (r+3t^2)e^{r^2}\,dt = (rs+s^3)e^{r^2}$$

   (b) Vermute, dass F existieren. Sei Γ ein Weg von $(0,0)$ nach (r,s). Dann
$$F(r,s) = \int_\Gamma f\ ds$$

   Mit Teil (a), haben wir:
$$F(r,s) = \int_{\Gamma_r} f\ ds + \int_{\Gamma_{r,s}} f\ ds = (rs+s^3)e^{r^2}$$

   Jetzt mussen wir, mit $F(x,y) = (xy+y^3)e^{x^2}$, probieren. Wir haben:
$$\frac{\partial F}{\partial x} = ye^{x^2} + 2x(xy+y^3)e^{x^2} = y(2x^2+2xy^2+1)e^{x^2}$$

   und
$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x+3y^2)e^{x^2}$$

   So $grad\, F = f$.

6. (a) Sei x eines lokales Extremum von f auf S^{n-1}. Beobachte:
$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$$

   wo $g(x) = |x|_2^2 - 1$. So
$$grad\, f = \lambda\, grad\, g$$

wo $\lambda \in \mathbb{R}$. In Koordinaten:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \qquad A = (a_{ij})$$

und

$$\langle Ax, x\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$$

Aber:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j + \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j + 2a_{kk}x_k = 2\sum_j a_{kj}x_j$$

seit A symmetrisch ist. So $grad\, f(x) = 2Ax$.
Beobachte: $grad\, g(x) = x\|x|_2 = x$ seit $|x|_2 = 1$ wenn $x \in S^{n-1}$. So:

$$2Ax = \lambda x$$

und x ist ein Eigenvektor von A.
Sir $\mu = \lambda/2$, so dass mu ist der Eigenwert für x. Dann

$$f(x) = \langle Ax, x\rangle = \mu\langle x, x\rangle = \mu$$

seit $x \in S^{n-1}$.

(b) Die Menge S^{n-1} ist kompakt, und die Funktion f ist stetig. Wähle $x \in S^{n-1}$ mit

$$f(x) = \max\{f(x) \mid x \in S^{n-1}\}$$

Dann ist x ein lokales Extremum von f auf S^{n-1}. Mit Teil (a) ist x ein Eigenvektor von A, so hat A mindestens einen Eigenwert.