

Differential- und Integralrechnung II Lösungen

24. April 2003

1: Beobachte:

$$f(x - y) = f(x) - f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann, seit f ist im Punkt 0 stetig, es $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f(x - y)| < \varepsilon$$

So, ist die Funktion f gleichmäßig stetig.

2: Wir arbeiten durch vollständige Induktion. Wenn $n = 1$, unsere Formel ist nur der Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Vermute, dass die Formel für $n = m$ richtig ist. Dann haben wir:

$$(f \cdot g)^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} f^{(k)}(x)g^{(m-k)}(x)$$

Mit der Produktregel:

$$(f \cdot g)^{(m+1)}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} (f^{(k+1)}(x)g^{(m-k)}(x) + f^{(k)}(x)g^{(m+1-k)}(x))$$

und so

$$(f \cdot g)^{(m+1)}(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{m!}{(k-1)!(m+1-k)!} f^{(k)}(x)g^{(m+1-k)}(x) + \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} f^{(k)}(x)g^{(m+1-k)}(x)$$

Wenn $0 < k < m$:

$$\frac{m!}{(k-1)!(m+1-k)!} + \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!} \left(\frac{1}{m+1-k} + \frac{1}{k} \right) = \frac{(m+1)!}{k!(m+1-k)!} = \binom{m+1}{k}$$

So

$$(f \cdot g)^{(m+1)}(x) = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(m+1-k)}(x)$$

und wir sind fertig.

3: (a) Beobachte:

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |x|^{\alpha-1} \quad \alpha - 1 > 0$$

So

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = 0$$

(b) Beobachte:

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \geq \frac{1}{|x|^{1-\beta}} \quad 1 - \beta > 0$$

So

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right|$$

existiert nicht.

4: Wir arbeiten durch vollständige Induktion. Wenn $n = 1$, ist die Formel

$$f'(x) = -\frac{(n+1-1)!}{(n-1)!} x^{-n-1} = -n x^{-n-1}$$

richtig. Vermute, dass unsere Formel ist für $k = r$ richtig. Dann:

$$f^{(r)}(x) = (-1)^r \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!} x^{-n-r}$$

und

$$f^{(r+1)}(x) = -(-1)^r \frac{(n+r)(n+r-1)!}{(n-1)!} x^{-n-(r+1)} = (-1)^{r+1} \frac{(n+(r+1)-1)!}{(n-1)!} x^{-n-(r+1)}$$

und wir sein fertig.

5: Wir suchen für ein Widerspruch; vermute, dass

$$x = f(x)g(x) \quad (\star)$$

wo $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sein ableitbaren Funktionen, mit $f(0) = 0, g(0) = 0$.

Gleichung (\star) hat Ableitung

$$1 = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Im Punkt 0:

$$1 = 0$$

Die obene Aussage ist ein Widerspruch. So, gibt es keine ableitbaren Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(0) = 0, g(0) = 0$, und $x = f(x)g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.