

Differential- und Integralrechnung II

Lösungen für Woche 11

7. Juli 2003

1. Sei $\varepsilon > 0$. Durch Stetigkeit, für ein Punkt $x \in X$, haben wir $\delta_x > 0$ so dass

$$f[B_x(2\delta_x)] \subseteq B_{f(x)}(\varepsilon/2)$$

Die Sammlung $\{B_x(\delta_x)\}$ ist eine offene Überdeckung von X . Durch Kompaktheit, gibt es eine Überdeckung $\{B_{x_1}(\delta_{x_1}), \dots, B_{x_n}(\delta_{x_n})\}$.

Sei $\delta = \min(\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n})$. Sei $x, y \in X$, mit $d(x, y) < \delta$. Dann gibt es x_i mit $d(x_i, x) < \delta_{x_i}$, so:

$$d(y, x_i) \leq d(x, y) + d(x_i, x) < \delta + \delta_{x_i} \leq 2\delta$$

und

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

So ist die Funktion f gleichmäßig stetig.

2. Definiere eine stetige Funktion $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch die Formel $f(x + y) = x + y$.

Die Teilmengen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und $L \subseteq \mathbb{R}^n$ sind kompakt. So ist die Produkt $K \times L$ kompakt, und das Bild

$$f[K \times L] = K + L$$

ist auch kompakt.

3. Wir haben $\text{grad } f(x) = g(x)x$. Wir suchen für lokale Extrema von f auf die Menge

$$S_R = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x|_2 = R\}$$

Definiere $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Formel $h(x) = |x|_2$. Beobachte:

$$\text{grad } h(x) = \frac{1}{R}x$$

für $x \in S$.

Falls ein Punkt $x \in S$ ein lokales Extremum von f auf S ist, dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ so dass:

$$\frac{1}{R}x = \lambda g(x)x$$

So ist jeder Punkt $x \in S_R$ kritisch, und f auf S konstant ist.

4. (a) Wir haben

$$f(x, y) = (-x^2y, x^3) \quad \Gamma(\theta) = (\cos \theta, -\sin \theta)$$

so

$$f(\Gamma(\theta)) = (-\cos^2 \theta \sin \theta, \cos^3 \theta) \quad \Gamma'(\theta) = (-\sin \theta, -\cos \theta)$$

und

$$\langle f(\Gamma(\theta)), \Gamma'(\theta) \rangle = \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \cos^4 \theta = \cos^2 \theta \cos 2\theta$$

so

$$\int_{\Gamma} f(x) \, ds = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \cos 2\theta \, d\theta = 0$$

(b) Vermute, dass $\text{grad} F = f$. Dann

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -x^2y \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^3$$

Die zweite Gleichung bedeutet, dass

$$F(x, y) = x^3y + g(x)$$

für eine ableitbare Funktion g . Die erste Gleichung jetzt bedeutet, dass

$$3x^2y + g'(x) = -x^2y$$

Diese Formel ist unmöglich, so es gibt keine Funktion $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{grad} F = f$.

5. (a) Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von M . Wähle $U_i \in \mathcal{U}$, so dass $x_i \in U_i$, und $U \in \mathcal{U}$, so dass $x \in U$.

Durch Konvergenz der Folge (x_i) , gibt es N , mit $x_n \in U$ für alle $n \geq N$. So ist die Sammlung

$$\{U_1, \dots, U_{N-1}, U\}$$

eine offene Überdeckung von M , und M ist kompakt.

- (b) Sei f stetig auf jeder kompakten Teilmenge von X . Sei (x_n) eine konvergente Folge in X , mit Grenzwert x . Schreibe $M = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$. Dann ist die Menge M kompakt.

Die Funktion f ist auf M stetig, so

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

und die ganz Funktion f ist stetig.

Das Konvergenz der obere Aussage ist klar.

6. Beobachte:

$$\sin(xyz) = xyz - \frac{(xyz)^3}{3!} + \frac{(xyz)^5}{5!} - \dots$$

So ist das Taylorpolynom zweiten Grades von f 0.

[Die andere Methode ist zu die partielle Ableitungen $f(0,0,0)$, $f_i(0,0,0)$, und $f_{ij}(0,0,0)$ berechnen, und benutze die Formel

$$T_2(h_1, h_2, h_3) = f(0,0,0) + \sum_{i=1}^3 f_i(0,0,0)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} f_{ij}(0,0,0)h_i h_j$$

für das Taylorpolynom zweiten Grades.]

7. (a)

$$f_1(x, y, z) = \frac{|x| + |y| + |z|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

so

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x, y, z) = \frac{|y| + |z|}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

- (b)

$$f_2(x, y, z) = \frac{(1 - \cos(xy)) \sin(xy)}{x^3 y^2}$$

so, durch dem Satz von L'Hopital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x, y, z) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{z(1 - \cos(xy)) \cos(xz) + y \sin(xy) \sin(xz)}{3x^2 y^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-z^2(1 - \cos(xy)) \sin(xz) + 2yz \sin(xy) \cos(xz) + y^2 \cos(xy) \sin(xz)}{6xy^2} \\ &= 0 + \frac{2y^2 z}{6y^2} + \frac{y^2 z}{y^2} \\ &= \frac{z}{2}. \end{aligned}$$

8. Seit F ist zweimal stetig differenzierbar:

$$\partial_i \partial_j F = \partial_j \partial_i F$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Aber $f_i = \partial_i F$ durch die Definition, so gilt die Formel $\partial_i f_j = \partial_j f_i$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

9. Betrachte die Funktion F . Wir haben Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = xy \cos(xy) + \sin(xy) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 y \cos(xy)$$

Mit die zweite Gleichung:

$$F(x, y) = xy \sin(xy) + \cos(xy) + f(x)$$

Mit die erste Gleichung:

$$y \sin(xy) + xy^2 \cos(xy) - y \sin(xy) + f'(x) = xy \cos(xy) + \sin(xy)$$

Diese Formel ist nicht möglich, so gibt es keine Funktion $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\text{grad } F(x, y) = (xy \cos(xy) + \sin(xy), x^2 y \cos(xy))$$

Betrachte die Funktion G . Wir haben Gleichungen

$$\frac{\partial G}{\partial x} = y \sin z \quad \frac{\partial G}{\partial y} = x \sin z \quad \frac{\partial G}{\partial z} = -xy \cos z$$

Mit die erste Gleichung:

$$G(x, y) = xy \sin z + g(y, z)$$

Die zweite Gleichung bedeutet:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = x \sin z + \frac{\partial g}{\partial y} = \sin z$$

so $g(y, z) = g(z)$ und, mit die dritte Gleichung:

$$\frac{\partial G}{\partial z} = xy \cos z + g'(z) = -xy \cos(z)$$

Diese Formel ist nicht möglich, so gibt es keine Funktion $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\text{grad } G(x, y) = (y \sin z, x \sin z, -xy \cos z)$$

10. (a) Beobachte Bild 1.

Die Menge Q ist messbar, seit sie offen ist.

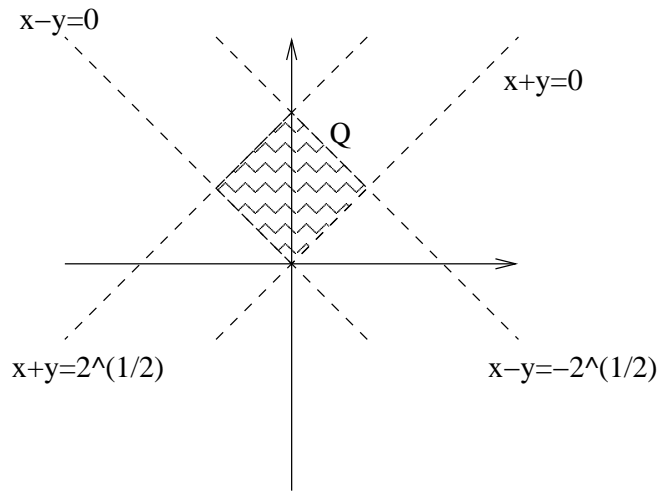


Abbildung 1: Die Menge Q

- (b) Beobachte, dass die Funktion f stetig und beschränkt ist. So $f \in \mathcal{L}^1(Q)$, und

$$\int_Q f = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{|x|}^{\sqrt{2}-|x|} (6 + \sin(\pi(x+y)) - \cos(\pi(x-y))) dy dx$$

Sei $u = x + y$ und $v = x - y$. Definiere $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $F(x, y) = (u, v)$. Dann ist F differenzierbar, mit differenzierbarem Inversen, und

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

so $\det(Df) = -2$. Weiter,

$$F[Q] = (0, \sqrt{2}) \times (-\sqrt{2}, 0)$$

so

$$\int_Q f = \int_{-\sqrt{2}}^0 \int_0^{\sqrt{2}} (6 + \sin(\pi u) - \cos(\pi v)) | -2 | du dv$$

d.h.

$$\int_Q f = 2 \int_{-\sqrt{2}}^0 6\sqrt{2} + \frac{1}{\pi}(1 - \cos(\pi\sqrt{2})) - \sqrt{2} \cos(\pi v) dv$$

und

$$\int_Q f = 2(12 + \frac{\sqrt{2}}{\pi}(1 - \cos(\pi\sqrt{2})) - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos(\pi\sqrt{2}))$$