

Differential- und Integralrechnung II

Lösungen für Woche 9

23. Juni 2003

1. Sei $g(x, y, z) = x + y + z$. Sei (x, y, z) eine lokale Extremum von f auf $g = 1$, wo $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\text{grad } f = \lambda \text{ grad } g$$

d.h.

$$\begin{aligned} mx^{m-1}y^n z^p &= \lambda \\ nx^m y^{n-1} z^p &= \lambda \\ px^m y^n z^{p-1} &= \lambda \end{aligned}$$

und $x + y + z = 1$.

Wenn $x \neq 0, y \neq 0$, und $z \neq 0$, dann

$$\frac{m}{x} = \frac{n}{y} = \frac{p}{z} \quad x + y + z = 1$$

und

$$x = \frac{my}{n} \Rightarrow \left(\frac{m}{n} + 1\right)y + z = 1$$

und

$$z = \frac{py}{n} \Rightarrow \left(\frac{m}{n} + \frac{p}{n} + 1\right)y = 1$$

so

$$x = \frac{m}{m+n+p} \quad y = \frac{n}{m+n+p} \quad z = \frac{p}{m+n+p}$$

Die Menge

$$S = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in D, x + y + z = 1\}$$

ist beschränkt und abgeschlossen, und so ist kompakt. Beobachte, dass $f(x, y, z) \geq 0$ für alle $x \in S$, und $f(x, y, z) = 0$ wenn $x = 0, y = 0$, oder $z = 0$. So ist jeder Punkt $(x, y, z) \in S$ mit $x = 0, y = 0$, oder $z = 0$ eine Minimum von f .

Durch Kompaktheit, hat f eine Maximum (oder mehr) in des Innere von S . Eine Maximum in des Innere ist eine lokale Extremum. So, ist der Punkt $(m/(m+n+p), n/(m+n+p), p/(m+n+p))$ eine (globale) Maximum.

2. (a) Beobachte:

$$\begin{aligned}\Gamma(\theta) &= (\cos \theta, \sin \theta) \\ f(\Gamma(\theta)) &= (\cos \theta, -\sin \theta) \\ \Gamma'(\theta) &= (-\sin \theta, \cos \theta)\end{aligned}$$

so

$$\langle f(\Gamma(\theta)), \Gamma'(\theta) \rangle = -2 \sin \theta \cos \theta$$

und

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_0^{8\pi} -2 \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$$

(b) Beobachte:

$$\begin{aligned}\Gamma(t) &= (2t-1, t) \\ f(\Gamma(t)) &= (2t-1)^4 + t^4 \\ \Gamma'(t) &= (2, 1)\end{aligned}$$

so

$$|\Gamma'(t)|_2 = \sqrt{5}$$

und

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_0^1 ((2t-1)^4 + t^4) \sqrt{5} dt = \sqrt{5} \left(\frac{1}{10} (2t-1)^5 + \frac{1}{5} t^5 \right) \Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(c) Beobachte:

$$\begin{aligned}\Gamma(t) &= (t, t^2) \\ f(\Gamma(t)) &= t \\ \Gamma'(t) &= (1, 2t)\end{aligned}$$

so

$$|\Gamma'(t)|_2 = \sqrt{1+4t^2}$$

und

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_0^1 t \sqrt{1+4t^2} dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \left((1+4t^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{12} (5^{\frac{3}{2}} - 1)$$

3. (a) Sei $\Gamma: [a, b] \rightarrow U$ stetig differenzierbar. Schreibe $f = (\partial_1 F, \dots, \partial_n F)$, und $\Gamma(t) = (\Gamma_1(t), \dots, \Gamma_n(t))$. Dann

$$\int_{\Gamma} f(s) ds = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \partial_i F(\Gamma(t)) \Gamma'_i(t) \right) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\Gamma(t)) dt$$

mit dem Kettenregel. So:

$$\int_{\Gamma} f(s) ds = F(\Gamma(b)) - F(\Gamma(a))$$

und es ist klar, dass das Vektor-Kurvenintegral $\int_{\Gamma} f(x) ds$ vom Weg unabhängig ist.

- (b) Sei $U = \mathbb{R}^2$, und definiere $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$, und $\Gamma: [0, 2\pi] \rightarrow U$ durch die Formeln $f(x, y) = (-y, x)$, $\Gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$.

Dann

$$\begin{aligned} f(\Gamma(\theta)) &= (-\sin \theta, \cos \theta) \\ \Gamma'(\theta) &= (-\sin \theta, \cos \theta) \end{aligned}$$

so

$$\langle f(\Gamma(\theta)), \Gamma'(\theta) \rangle = 1$$

und

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

Aber $\Gamma(0) = \Gamma(2\pi)$, so ist das Vektor-Kurvenintegral $\int_{\Gamma} f(x) ds$ nicht vom Weg unabhängig. Mit Teile (a), gibt es kein F mit $f = \text{grad} F$.

4. Die Funktion f ist stetig, so ist das Urbild $f^{-1}(y)$ abgeschlossen. Seit $|f(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \infty$, ist $f^{-1}(y)$ beschränkt. Aber $f^{-1}(y) \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist $f^{-1}(y)$ kompakt.

Sei $x \in f^{-1}(y)$. Mit den Satz über lokalen Umkehrfunktion, gibt es eine offene Menge $U_x \ni x$, mit $f: U_x \rightarrow f[U_x]$ bijektiv. Die Sammlung

$$\{U_x \mid x \in f^{-1}(y)\}$$

ist eine offene Überdeckung von $f^{-1}(y)$. Durch Kompaktheit, gibt es Punkten $x_1, \dots, x_n \in f^{-1}(y)$, mit $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$ eine offene Überdeckung.

Aber die Abbildung $f: U_{x_i} \rightarrow f[U_{x_i}]$ ist bijektiv, so hat die Menge $f^{-1}(y) \cap U_{x_i}$ nur einen Punkt, nämlich x_i . So $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ und wir sind fertig.

5. Für die folgenden Funktionen, finde alle Punkten x , wobei es eine Umgebung $U \ni x$ mit $f: U \rightarrow f[U]$ invertierbar, gibt. Bestimme die Ableitung der Inversen an den Punkten $f(x)$ für die gefundenen Punkte x .

- (a) Beobachte:

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

So $\det Df(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, und es gibt keine offene Menge, $U \neq \emptyset$, mit $f: U \rightarrow f[U]$ invertierbar.

- (b) Beobachte:

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

So $\det Df(x, y) = -2y$, und wenn $y \neq 0$ hat den Punkt (x, y) eine Umgebung U mit $f: U \rightarrow f[U]$ invertierbar. Am Punkt $f(x, y)$ hat die lokale Inverse von f die Ableitung

$$\frac{1}{2y} \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 1 & -2x \end{pmatrix}$$

(c) Der Matrix A hat Invers

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

So ist f invertierbar, mit Invers definiert durch die Formel $f^{-1}(y) = A^{-1}y$. Am Punkt f hat die Invers die Ableitung A^{-1} .

6. Sei $g(x, y) = x^2 + y^2$. Sei (x, y) eine lokale Extremum von f auf $g = 2$. Dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$, mit

$$\text{grad } f = \lambda \text{grad } g$$

d.h.

$$(1, 1) = \lambda(2x, 2y)$$

und $x^2 + y^2 = 2$. So $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und $(x, y) = (1, 1)$ oder $(x, y) = (-1, -1)$. Es ist klar, dass die Punkt $(1, 1)$ eine Maximum von f ist, und die Punkt $(-1, -1)$ eine Minimum von f ist.