Differential- und Integralrechnung II Übungen

24. April 2003

Die erste 2 Aufgaben sollen schriftlich gelöst und am Dienstag bis 11:15 eingeworfen werden. Bis dann wird es auch Aushänge mit der Übungseinteilung geben. Die übringen Aufgaben werden in den Übungsgruppen nächste Woche bearbeitet.

1: Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so dass f im Punkt 0 stetig ist, und

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige, dass f gleichmäßig stetig ist.

2: Sei $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Funktionen, so dass die n-ten Ableitungen $f^{(n)}(x)$ und $g^{(n)}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ existieren. Beweise die *Formel von Leibniz*:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \qquad .$$

3: (a) Sei $\alpha > 1$, und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Falls $|f(x)| \le |x|^\alpha$, beweise dass f im Punkt 0 ableitbar ist.

(b) Sei $0 < \beta < 1$, und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Falls $f(0) = 0$, und $|f(x)| \ge |x|^\beta$, beweise dass f im Punkt 0 nicht ableitbar ist.

(Wir setzen $0^c = 0$ für alle $c > 0$.)

4: Definiere $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^{-n}$. Beweise die Formel

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} x^{-n-k} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

5: Beweise, dass es keine ableitbaren Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, und $x = f(x)g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.