Differential- und Integralrechnung II
Übungen für Woche 11

7. Juli 2003

1. Eine Funktion $f\colon X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen X und Y heisst *gleichmäßig stetig* wenn, es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

   $$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

   Sei $f\colon X \to Y$ stetig, wobei X und Y metrischen Räume sind, und sei X kompakt. Zeige, dass f gleichmäßig stetig ist.

2. Seien K und L kompakte Teilmengen in $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass die Menge

   $$K + L := \{x + y \mid x \in K, y \in L\}$$

   kompakt ist.

3. Sei $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, mit $grad\, f(x) = g(x)x$ für alle $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, für eine Funktion $g\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

   Sei $R > 0$. Zeige, dass f auf die Menge

   $$S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x|_2 = R\}$$

   konstant ist.

   [Tipp: Finde alle lokale Extrema von f auf S.]

4. Definiere eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch die Formel $f(x, y) = (-x^2y, x^3)$.

   (a) : Berechne das Vektor-Kurvenintegral $\int_\Gamma f(x)\ ds$ für die Kurve $\Gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\Gamma(\theta) = (\cos\theta, -\sin\theta)$.

   (b) Gibt es eine Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $f = grad\, F$?

5. Seien X, Y metrische Räume, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeige:

   (a) Falls $x_n, x \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, so ist $M := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subset X$ kompakt.

(b) f ist genau dann stetig, wenn die Einschränkung von f auf jede kompakte Teilmenge von X stetig ist.

6. Berechne das Taylorpolynom zweiten Grades von $f(x, y, z) = \sin(xyz)$.

7. Bestimme der Grenzwert für $x \to 0$ folgender auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ beziehungsweise $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid xy \neq 0\}$ definierter Funktionen:

   (a) $f_1(x, y, z) := \frac{|x|+|y|+|z|}{|(x,y,z)|_2}$.

   (b) $f_2(x, y, z) := \frac{(1-\cos(xy))\sin(xz)}{x^3y^2}$

8. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F: U \to \mathbb{C}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $f = (f_1, \dots, f_n) = grad\, F$. Zeige, dass $\partial_i f_j = \partial_j f_i$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

9. Gibt es Funktionen $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ oder $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ so dass

$$\begin{aligned} grad\, F(x, y) &= (xy\cos(xy) + \sin(xy), x^2y\cos(xy)) \\ grad\, G(x, y, z) &= (y\sin(z), x\sin(z), -xy\cos(z)). \end{aligned}$$

10. Sei $f(x, y) := 6 + \sin(\pi(x + y)) - \cos(\pi(x - y))$. Sei $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > |x| \text{ und } y < \sqrt{2} - |x|$.

    (a) Zeichne Q. Begründe, warum Q messbar ist.

    (b) Zeige, dass $f \in \mathcal{L}^1(Q)$ und berechne $\int_Q f$.