

Differential- und Integralrechnung II

Übungen für Woche 9

23. Juni 2003

Die ersten 4 Aufgaben sollen schriftlich gelöst und am folgenden Montag bis 11:15 eingeworfen werden. Die übrigen Aufgaben werden in den Übungsgruppen nächste Woche bearbeitet.

1. Sei $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Bestimme in D die (globalen) Extrema von $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^m y^n z^p$ unter der Nebenbedingung $x + y + z = 1$. Dabei seien $m, n, p > 0$ reelle Konstanten.
2. Berechne die folgende Kurvenintegrale und Vektor-Kurvenintegrale, also $\int_{\Gamma} f(x, y) ds$, wobei
 - (a) $f(x, y) = (x/(x^2 + y^2), -y/(x^2 + y^2))$; $\Gamma: [0, 8\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \Gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$
 - (b) $f(x, y) = x^4 + y^4$; $\Gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \Gamma(t) = (2t - 1, t)$
 - (c) $f(x, y) = x$; $\Gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \Gamma(t) = (t, t^2)$
3. (a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Schreibe $f = \text{grad} F$, und sei $\Gamma: [a, b] \rightarrow U$ eine Kurve. Zeige, mit Beweis, dass das Vektor-Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} f(x) ds$$

vom Weg unabhängig ist.

- (b) Finde eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass f keine Stammfunktion hat, also kein F mit $f = \text{grad} F$ existiert.
4. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ einmal stetig partiell differenzierbar, so dass $|f(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \infty$, d.h. für jedes $r > 0$ existiert $R > 0$ so dass $|f(x)| > r$ für alle x mit $|x| > R$. Sei $N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \det Df(x) \neq 0\}$, und $y \notin f(N)$. Zeige, dass das Urbild $f^{-1}(y)$ höchstens endlich viele Punkte enthält.
 5. Für die folgenden Funktionen, finde alle Punkten x , wobei es eine Umgebung $U \ni x$ mit $f: U \rightarrow f[U]$ invertierbar, gibt. Bestimme die Ableitung der Inversen an den Punkten $f(x)$ für die gefundenen Punkte x .
 - (a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x^2 + y^2, 0)$.
 - (b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x^2 + y^2, x)$.
 - (c) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x) = Ax$, wo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
 6. Bestimme alle Maxima und Minima der Funktion $f(x, y) = x + y$ auf die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\}$.