

Differential- und Integralrechnung III

Lösungen für Woche 1

20. Oktober 2003

1. Die Menge A wird in Bild 1 gezeichnet.

Deshalb:

$$\int_A f = \int_{-1}^1 \int_{2-x^2}^{x^2} x^2 y \, dy \, dx = \frac{8}{15}$$

2. Sei

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$$

Sei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dann

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 2, 0 \leq r \leq \sqrt{2 - z^2}\}$$

und

$$\text{Vol}(B) = \int_0^2 \int \int_{0 \leq r \leq \sqrt{2-z^2}} dx \, dy \, dz$$

Beobachte Polarkoordinaten

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

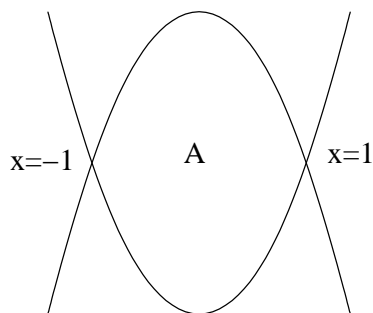


Abbildung 1: Die Menge A

Dann haben wir Jakobi Determinant $|J| = r$, so dass

$$dx dy = r dr d\theta$$

und

$$\text{Vol}(B) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2-z^2}} r dr d\theta dz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(2-z) d\theta dz = 2\pi$$

3. • Der Durchschnitt

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{M}_\lambda$$

ist immer eine σ -Algebra. Die relevante Eigenschaften sind leicht zu beweisen.

- Sei X eine Menge, und sei A und B disjunkte Teilmengen von X , mit $A \cup B \neq X$. Dann haben wir σ -Algebren:

$$\mathcal{M}_A = \{A, X \setminus A, \emptyset, X\}$$

und

$$\mathcal{M}_B = \{B, X \setminus B, \emptyset, X\}$$

Beobachte:

$$\mathcal{M}_A \cup \mathcal{M}_B = \{A, X \setminus A, B, X \setminus B, \emptyset, X\}$$

und $A \cup B \notin \mathcal{M}_A \cup \mathcal{M}_B$.

Deshalb ist $\mathcal{M}_A \cup \mathcal{M}_B$ keine σ -Algebra.

4. • Sei $X = \mathbb{N}$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann haben wir eine endliche Menge $\{2k\} \in \mathcal{M}$. Die Vereinigung

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{2k\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

ist nicht endlich. Die Menge

$$\mathbb{N} \setminus S = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

ist auch nicht endlich. Deshalb, $S \notin \mathcal{M}$, und \mathcal{M} ist keine σ -Algebra.

- Hier, sagen wir dass endliche Menge und die Nullmenge abzählbar sind!

Dann ist es klar, dass $X \in \mathcal{M}$, and $X \setminus S \in \mathcal{M}$ wenn $S \in \mathcal{M}$.

Sei S_1, S_2, S_3, \dots abzählbaren Teilmengen von X . Dann ist die Vereinigung

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

abzählbar, also ein Element von \mathcal{M} .

Sei $S \setminus S_k$ abzählbar. Dann ist die Menge

$$X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} X \setminus S_n \subseteq X \setminus S_k$$

abzählbar.

Wir haben bewiesen, dass eine abzählbare Vereinigung von Mengen in \mathcal{M} , auch in \mathcal{M} ist. Deshalb ist \mathcal{M} eine σ -Algebra.