Differential- und Integralrechnung III
Lösungen für Woche 13

Abgabe: 2. Februar 2004. Es sollen mindestens drei der Aufgaben abgegeben werden.

1. (a) Formel (i) folgt von der Definition, und Formel (ii) ist klar. Um Formel (iii) und (iv) zu beweisen, schreibe $I = (i_1, \ldots, i_k)$, wo $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, und $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$.
Sei $\omega = f\ dx_I \in \Omega^p(U) \qquad \eta = g\ dx_J \in \Omega^q(U)$. Dann

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(fg) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= gdf \wedge dx_I \wedge dx_J + fdg \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^p f dx_I \wedge (dg \wedge dx_J) \\ &= d\omega \wedge \eta + \omega \wedge d\eta \end{aligned}$$

Formel (iii) folgt in Allgemeinem von der obenen Berechnung und Formel (ii).
Um Formel (iv) zu beweisen, sei $\omega = f dx_I$; diese Fall is genug mit Formel (ii). Dann

$$d\omega = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I$$

und

$$d(d\omega) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I = \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} (dx_j \wedge dx_i + dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_I = 0$$

weil $dx^i \wedge dx^i = 0$ und $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$

(b) Sei $d' \colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ eine Abbildung, die (i)–(iv) erfüllt.
Sei

$$\omega = \sum_I f_I dx_I$$

Dann

$$\begin{aligned} d'\omega &= \textstyle\sum_I d'(f_i dx_I) && \text{mit (ii)} \\ &= \textstyle\sum_I (d' f_I) \wedge dx_I + f_I d'(dx_i) && \text{mit (iii)} \\ &= \textstyle\sum_I (df_I) \wedge dx_I + f_I d(dx_i) && \text{mit (i)} \\ &= \textstyle\sum_I df_I \wedge dx_I && \text{mit (iv)} \\ &= \textstyle\sum_{i,I} \partial f_I / \partial x_i dx_i \wedge dx_I && = d\omega \end{aligned}$$

2. Sei $i \colon U \hookrightarrow M$ Inklusion einer offenen Teilmenge, wo es eine Karte $\Phi \colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt. Dann mit Frage 1, gibt es genau ein Operator $d_U : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ mit Eigenschafter (a)–(d).

   Sei $\alpha \colon V \to V'$ eine glatte Abbildung zwischen zwei offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Dann folgt die Formel

   $$d(\alpha^\star \omega) = \alpha^\star d\omega$$

   mit dem Kettenregel.

   Definiere $d \colon \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ durch die Formel

   $$d\omega_x = di^\star \omega_x = \Phi^\star d((\Phi^{-1})^\star i^\star \omega)$$

   wenn $x \in U$.

   Mit der obenen Berechnung ist d wohl definiert, mit der Eigenschaften (a)–(e). Wieter, die Eigenschaften (a)–(e) bedeuten, dass die Formel

   $$d\omega_x = \Phi^\star d((\Phi^{-1})^\star i^\star \omega)$$

   gilt.

   Deshalb, mit Frage 1, gibt es genau eine Abbildung, so dass (a)–(e) gelten.

3. Wir sagen, dass f holomorph ist, genau dann wenn f stetig partiell differenzierbare ist, und $df = g\ dz$.

   Hier $dz = dx + idy$. Wir wissen, dass $dx \wedge dx = 0$, $dy \wedge dy = 0$, und $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$. Deshalb $dz \wedge dz = 0$. So, für f holomorph:

   $$d(f dz) = df \wedge dz = dg \wedge dz \wedge dz = 0$$

   Sei f stetig partiell differenzierbar, mit $d(f\ dz) = 0$. Dann $df \wedge dz = 0$, d.h.

   $$\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \wedge (dx + idy) = 0$$

   und

   $$i \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

   weil $dx \wedge dx = 0$, $dy \wedge dy = 0$, und $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$.

   So

   $$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial x}(dx + idy) = g\ dz$$

   Deshalb ist f holomorph.

   Es ist jetzt leicht zu zeigen, dass die Produkt, Quotient, und Verknüpfung holomorpher Funktionen auch holomorph sind.

4. (a) Die Abbildung $i \circ \pi_k^{-1} \colon B(0,1) \to \mathbb{R}^n$ ist definiert durch die Formel

$$i \circ \pi_k^{-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (y_1, \ldots, y_n)$$

wo

$$y_i = \begin{cases} x_i & i < k \\ \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2} & i = k \\ x_{i-1} & i > k \end{cases}$$

Beobachte:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 1 & i < k, j = i \\ x_j / \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2} & i = k \\ 1 & i > k, j = i-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir definiere

$$\omega = \sum_{l=1}^{n} (-1)^l y_l dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{l-1} \wedge dy_{l+1} \wedge \cdots \wedge dy_n$$

Beobachte:

$$(\pi_k^{-1})^\star [(-1)^l y_l dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{l-1} \wedge dy_{l+1} \wedge \cdots \wedge dy_n] = 0$$

wenn $k \neq l$.
Deshalb

$$(i \circ \pi_k^{-1})^\star \omega = (-1)^k \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2 dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}}$$

Beobachte: $(i \circ \pi_k^{-1})^\star \omega(x) \neq 0$ für alle $x \in B(0,1)$. Deshalb $\omega(x) \neq 0$ für alle $x \in U_k$. Mit der standarden Orientierung auf $\mathbb{R}^{n-1}$, folgt es dass $(-1)^k \pi_k \colon U_k \to B(0,1)$ eine orientierte Karte ist.

(b) Mit die Definition des Integrals, $\int_M f\omega$ hängt nicht ab die Karte π_i. Guche an π_n. Dann

$$\int_M f\omega = \int_{B(0,1)} \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2}\, dx_1 \ldots dx_{n-1} = \int_{1/2n}^{1} /n \cdots \int_{1/2n}^{1/n} \sqrt{1 - \sum_{j-1}^{n-1} x_j^2}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$$