

Differential- und Integralrechnung III

Lösungen für Woche 9

Abgabe: 5. Januar 2004. Es sollen mindestens drei der Aufgaben abgegeben werden.

1. (a) Sei $x \in H$. Schreibe:

$$m = \inf\{\|v - x\| \mid v \in U\}$$

Dann gibt es eine Folge, (v_n) , mit $v_n \in U$ für alle n , und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - x\| = m$$

Die Folge (v_n) ist Cauchy. Um diese Aussage zu sehen, bemerken wir dass die Gleichung

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2) \quad \text{for all } a, b \in H$$

gibt, weil H ein Hilberrraum ist. Deshalb

$$\begin{aligned} \|v_i - v_j\|^2 &= \|(v_i - x) - (v_j - x)\|^2 \\ &= 2(\|v_i - x\|^2 + \|v_j - x\|^2) - \|(v_i - x) + (v_j - x)\|^2 \\ &= 2(\|v_i - x\|^2 + \|v_j - x\|^2) - 4\|\frac{1}{2}(v_i - v_j) - x\|^2 \\ &\leq 2(\|v_i - x\|^2 - m^2) + 2(\|v_j - x\|^2 - m^2) \end{aligned}$$

und die Folge (v_n) ist Cauchy.

Der Unterraum U ist abgeschlossen, und H ist vollständig. Deshalb hat (v_n) einen Grenzwert $u \in U$. Beobachte:

$$\|u - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - x\| = m$$

so $\|u - x\| \leq \|v - x\|$ für alle $v \in U$.

- (b) Es ist klar, dass $u \cap U^\perp = \{0\}$.

Sei $x \in H$. Wähle (mit Teil (a)) $u \in U$, damit $\|u - x\| \leq \|v - x\|$ für alle $v \in U$. Sei $v \in U \setminus \{0\}$, und schreibe

$$z = u - x \quad \alpha = \frac{\langle z, v \rangle}{\|v\|^2}$$

Dann

$$\|z - \alpha v\|^2 = \|z\|^2 - \alpha \overline{\langle z, v \rangle} - \bar{\alpha} \langle z, v \rangle + |\alpha|^2 \|v\|^2 = \|z\|^2 - \frac{|\langle z, v \rangle|^2}{\|v\|^2} \geq 0$$

Aber

$$\|z - \alpha v\| = \|(u - \alpha v) - x\| \geq \|v - x\| = \|z\|$$

weil $u - \alpha v \in U$. Deshalb $\langle z, v \rangle = 0$.

Wir haben bewiesen, dass $z \in U^\perp$. Aber $x = u - z$, so $H = U \oplus U^\perp$.

- (c) Sei $f: H \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und linear. Wenn $\alpha = 0$, ist es klar, dass $\alpha(x) = \langle x, 0 \rangle$ für alle $x \in H$.

Sei $\alpha \neq 0$, und $U = \ker \alpha$. Dann ist U ein abgeschlossener Unterraum von H , weil α linear und stetig ist. Mit Teil (b) $H = U \oplus U^\perp$. Weil $\alpha \neq 0$, $U \neq H$, und $U^\perp \neq \{0\}$. Deshalb gibt es $v \in U^\perp$ mit $\|v\| = 1$.

Sei $x \in H$. Schreibe

$$u = \alpha(x)v - \alpha(v)x$$

Dann $u \in \ker \alpha$, so $\langle u, v \rangle = 0$ und

$$\alpha(x) - \alpha(v)\langle x, v \rangle = 0$$

Sei

$$v_\alpha = \overline{\alpha(v)}v$$

- (d) Definiere $\phi: H \rightarrow H'$ durch die Formel

$$\phi(v)(x) = \langle x, v \rangle$$

Mit Teil (c) ist ϕ surjektiv. Die Abbildung ϕ ist konjugat-linear. Beachte:

$$\|\phi(v)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\phi(v)(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, v \rangle|$$

Deshalb, mit der Ungleichung von Cauchy und Schwarz:

$$\|\phi(v)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |x||v| = |v|$$

Auch haben wir

$$\|\phi(v)\| \geq |\langle \frac{v}{|v|}, v \rangle| = |v|$$

also $\|\phi(v)\| = |v|$.

Deshalb ist ϕ konjugat-linear, isometrisch, und bijektiv.

2. (a) Die Funktion $x \mapsto f(x)e^{-i\xi x}$ ist messbar, und

$$|f(x)e^{-i\xi x}| = |f(x)|$$

weil $x, \xi \in \mathbb{R}$. Weil $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-i\xi x}| dx < \infty$$

Deshalb existiert das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx$$

existiert.

(b) Die Transformation \mathfrak{F} ist linear, weil das Integral linear ist.

(c) Weil f stetig und integrierbar ist, gilt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

Deshalb, mit partieller Integration:

$$\mathfrak{F}[f'](\xi) = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)e^{-i\xi x} - f(-x)e^{i\xi x}) - (-i\xi) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx = (i\xi)\hat{f}(\xi)$$

(d) Beobachte:

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy$$

Wir wissen, dass $|f| \star |g| \in L^1(\mathbb{R})$. Deshalb existiert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)e^{-i\xi x}| dy dx$$

und mit dem Satz von Fubini

$$\mathcal{F}[f \star g](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)e^{-i\xi x} dx dy$$

Wir können damit schreiben

$$\mathcal{F}[f \star g](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-i\xi(x-y)} dx \right) g(y)e^{-i\xi y} dy = \hat{f}\xi\hat{g}(\xi)$$

3. (a) Wir wissen

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Sei $\partial f/\partial x$ und $\partial^2 f/\partial x^2$ integrierbar. Dann ist $\partial f/\partial t$ integrierbar.

Wir schreiben¹

$$\hat{f}(\xi, t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)e^{-ix\xi} dx$$

¹In der originalen Frage, war der Ausdruck

$$\hat{f}(\xi, t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)e^{ix\xi} dx$$

Es macht wirklich keinen Unterschied.

Weil $\partial f/\partial t$ integrierbar ist, haben wir die Gleichung

$$\left(\frac{\hat{\partial} f}{\partial t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) e^{-ix\xi} dx = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}$$

Mit der letzten Aufgabe:

$$\left(\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x^2}\right) = (i\xi)^2 \hat{f} = -\xi^2 \hat{f}$$

Deshalb:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} = -\xi^2 \hat{f}$$

Wir wissen auch, dass $f(x, 0) = g(x)$, so $\hat{f}(\xi, 0) = \hat{g}(\xi)$, und die obere Gleichung hat die Lösung

$$\hat{f}(\xi, t) = \hat{g}(\xi) e^{-\xi^2 t}$$

(b) Sei $h(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$. Dann können wir ausrechnen:

$$\hat{h}(x, t) = e^{-t\xi^2}$$

So:

$$\hat{f}(x, t) = \hat{g}(x) \hat{h}(x, t)$$

Aber die Fouriertransformation ist tätlich injektiv; es gibt eine Formel für ein Invers (die war benutzt, um $h(x, t)$ zu berechnen). Deshalb ist

$$f(x, t) = [g \star h](x, t)$$

eine Lösung. Ohne mehre Auskunft über die Fouriertransformation, können wir diese Formel direkt prüfen.

4. Sei $1 < p < \infty$. Sei S die Menge von Funktionen

$$c_1 \chi_{(a_1, b_1)} + \dots + c_n \chi_{(a_n, b_n)}$$

wo $n \in \mathbb{N}$, und $a_i, b_j, c_k \in \mathbb{Q}$. Dann ist S abzählbar, und $S \subseteq L^p(\mathbb{R})$.

Sei $f \in L^p(\mathbb{R})$. Weil f messbar ist, gibt es eine Folge von Treppenfunktionen, (s_n) , mit Punktweis Grenzwert f (fast immer), und $|s_n(x)| \leq 2|f(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann

$$|s_n(x) - f(x)|^p \leq 3^p |f(x)|^p$$

und mit dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\|_p = 0$$

Aber die Menge S ist eine dichte Teilmenge der Menge von aller Treppenfunktionen in $L^p(\mathbb{R})$. Deshalb ist $L^p(\mathbb{R})$ separabel.

Trotzdem, ist der Raum $L^\infty(\mathbb{R})$ nicht separabel. Um diese Aussage zu sehen, benutzen wir einen Satz, der eine Teilmenge einer separablen Menge separabel ist sagt. Sei

$$B = \{b_0\chi_{[0,1)} + b_1\chi_{[1,2)} + b_2\chi_{[2,3)} + \dots \mid b_i \in \{0,1\}\}$$

Dann ist B überabzählbar, und $B \subseteq L^\infty(\mathbb{R})$. Falls S eine dichte Teilmenge von B ist, dann für $f \in B$ gibt es $s \in S$ mit $|f - s|_\infty < 1/4$. Aber diese Ungleichung bedeutet $f = s$, weil $f, s \in B$.

Deshalb hat B keine abzählbare dichte Teilmenge, und S ist nicht separabel.