

# Differential- und Integralrechnung III

## Übungen für Woche 13

Abgabe: 2. Februar 2004. Es sollen mindestens drei der Aufgaben abgegeben werden.

1. Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $\omega$  eine glatte  $k$ -Form auf  $U$ .  
Schreibe

$$\omega_x = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq n} f_{i_1, \dots, i_n}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

und definiere

$$d\omega_x := \sum_{j=1}^n \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq n} \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_n}}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

- (a) Beweise die folgenden Aussagen.

- (i)  $d(f) = df$  wenn  $f \in \Omega^0(U)$ .
- (ii)  $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$  für alle  $\omega, \eta \in \Omega^k(U)$ .
- (iii)  $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$  für alle  $\omega \in \Omega^k(U), \eta \in \Omega^q(U)$ .
- (iv)  $d(d\omega) = 0$  für alle  $\omega \in \Omega^k(U)$ .

- (b) Sei  $d': \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$  eine Abbildung, für alle  $k$ , die die Eigenschaften (i)–(iv) in erfüllt. Zeige, dass  $d' = d$ .

2. Sei  $M$  eine glatte eingebettete Mannigfaltigkeit. Zeige, dass es genau eine Abbildung  $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  für alle  $k$  gibt, so dass gilt

- (a)  $d(f) = df$  wenn  $f \in \Omega^0(M)$ .
- (b)  $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$  für alle  $\omega, \eta \in \Omega^k(M)$ .
- (c)  $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$  für alle  $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^q(M)$ .
- (d)  $d(d\omega) = 0$  für alle  $\omega \in \Omega^k(M)$ .
- (e) Sei  $\phi: M_1 \rightarrow M_2$  eine  $C^\infty$  Abbildung. Dann  $d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$  für alle  $\omega \in \Omega^k(M_2)$ .

[Tipp: Benutze Karten und Aufgabe 1.]

3. Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ , und sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetig diffbare Funktion. Zeige, dass  $f$  genau dann holomorph ist, wenn  $d(fdz) = 0$ .

Zeige, dass die Produkt, Quotient, und Verknüpfung holomorpher Funktionen auch holomorph sind.

4. Definiere  $\omega \in \mathbb{R}^n$  durch die Formel

$$\omega_{(x_1, \dots, x_n)} = \sum_{i=1}^n (-1)^i x_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Sei  $i: S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  die Standard-Einbettung.

- (a) Definiere  $\pi_i: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  durch  $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . Schreibe  $U_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1} \mid x_i > 0\}$ . Zeige, dass  $[i^*\omega]$  eine Orientierung auf  $S^{n-1}$  ist, und dass  $\pi_i: U_i \rightarrow B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  eine orientierte Karte ist.
- (b) Sei  $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} 1 & 1/2n \leq x_i \leq 1/n \quad \forall 1 \leq i \leq n-1, x_n > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechne  $\int_M f\omega$  mittels der Karten  $\pi_i, i = 1, \dots, n$  (die Definition des Integrals dehnt sich in der offensichtlichen Weise auf nicht-glatte Funktionen aus).