Differential- und Integralrechnung I Examen

14. Februar 2003

Seite 1

Hinweis: Schreiben Sie auf jedes von Ihnen benutzte Blatt Papier nur die Lösung *einer* Aufgabe. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Übungsgruppe versehen werden, außerdem mit der Nummer der behandelten Aufgabe.

Alle Aussagen, die nicht in Vorlesung oder Übungen behandelt wurden oder als Hinweis gegeben werden, müssen bewiesen werden.

1: Finde den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, wobei

$$a_n = (-1)^n \frac{n^n}{2^{(n/2)} n!}$$

Hinweis: Die Formel $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = e$ kann ohne Beweis benutzt werden.

(3 Punkte)

2: Sei $a \in (0, \infty)$. Man löse die Differentialgleichung

$$y' = \frac{xy}{1 + x^2}; \qquad y(0) = a,$$

wobei die rechte Seite definiert sei für $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, und gebe das Existenzintervall der Lösung an.

(4 Punkte)

3: Sei

$$f_n(x) = \frac{1}{2} n^3 x^2 (1 - x)^n$$

(a) Zeige, dass

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{n^3}{(n + 1)(n + 2)(n + 3)}$$

Tipp: Zweimal partielle Integration.

(b) Berechne $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$.

(c) Berechne $f(x) := \lim_{n\to\infty} f(x)$, für $x \in [0, 1]$. Ist die Konvergenz gleichmaßig?

(5 Punkte)

4: Sei $\lambda \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Definiere rekursiv die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_0 := 1; \quad a_1 := \lambda; \quad a_n := 2a_{n-1} - a_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

Finden und beweisen Sie eine explizite Formel für a_n (in Abhängigkeit von λ) und bestimmen Sie Infimum und Supremum von

$$M_\lambda := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

in Abhängigkeit von λ.

Erinnerung: falls eine Menge $X \subset \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt ist, so setzt man $\sup X = +\infty$, falls X nach unten unbeschränkt ist, so setzt man $\inf X = -\infty$.

(4 Punkte)

5: Sei

$$a_n = \sum_{k=n}^{2n-2} \frac{1}{k}$$

Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und konvergent ist.

(3 Punkte)

6: Sei

$$f_k(x) = \frac{\sin(x)\sin(kx^2 + \pi/2)}{k!}$$

(a) Bestimme die Ableitung der Funktion $f_k(x)$. Zeige, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(0) = e.$$

(b) Zeige, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ für jedes $x \in (-1, 1)$ konvergiert.

(c) Zeige, dass die durch den Grenzwert definiert Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ stetig und differenzierbar ist, und bestimme ihre Ableitung an 0.

(5 Punkte)

7: (a) Bestimmen Sie, ob das unbestimmte Integral

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{t^6 - t}}\, dt$$

einen Grenzwert hat.

(b) Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$$

konvergent ist.

(4 Punkte)