Differential- und Integralrechnung I Nachklausur

09. April 2003

Seite 1

Hinweis: Schreiben Sie auf jedes von Ihnen benutzte Blatt Papier nur die Lösung *einer* Aufgabe. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Übungsgruppe versehen werden, außerdem mit der Nummer der behandelten Aufgabe.

Alle Aussagen, die nicht in Vorlesung oder Übungen behandelt wurden oder als Hinweis gegeben werden, müssen bewiesen werden.

1: Finde den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n^2} z^{3n}$$

(3 Punkte)

2: Man löse die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y^2}{x^2}; \qquad y(1) = \frac{1}{2},$$

wobei die rechte Seite definiert sei für $(x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$.

(4 Punkte)

3: (a) Berechne das Integral

$$\int_2^r \frac{1}{x \log x}\, dx$$

wo $r > 2$. Zeige, dass das unbestimmte Integral

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \log x}\, dx$$

nicht konvergiert.

(b) Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n} \qquad ?$$

Falls ja, ist die Konvergenz absolut ?

(5 Punkte)

Bitte wenden

4: Sei $c \in \mathbb{R}$. Definiere rekursiv die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_0 := c; \quad a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1}+1) \text{ für } n \geq 1.$$

Zeige, dass die Folge (a_n) konvergiert. Was ist ihr Grenzwert?

(4 Punkte)

5: Zeige, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch die Formel

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x\cos(1/x)) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

(3 Punkte)

6: Sei $S\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion, so dass

$$S''(x) = -S(x) \text{ für alle } x; \qquad S(0) = 0; \qquad S'(0) = 1.$$

Zeige: S ist beliebig oft differenzierbar. Bestimme die Taylorreihe der Funktion S ?

(4 Punkte)

7: (a) Sei $0 < a < b$. Zeige, dass

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos b}{b} - \int_a^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

(b) Beweise, dass

$$\lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{\sin x}{x}\,dx$$

existiert.

(4 Punkte)