

- 1: (a) $f(x) = x^2$
 (b) $f(x) = 1/(1+x)$

- 2: (a) Sei $f(x) = \tan x = \sin x / \cos x$. Dann durch das Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Sei $y \in \mathbb{R}$. Dann

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \cos^2(\tan y)$$

Aber

$$\cos^2(\tan y) = \frac{\cos^2(\tan y)}{\cos^2(\tan y) + \sin^2(\tan y)} = \frac{1}{1+y^2}$$

- (b) Mit Teile (a):

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} [\arctan(R) - \arctan(-R)] = \lim_{R \rightarrow \infty} 2 \arctan R = \pi$$

- (c) Schreibe

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^4} &= \frac{Ax+B}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{Cx+D}{1+\sqrt{2}x+x^2} \\ &= \frac{(Ax+B)(1-\sqrt{2}x+x^2) + (Cx+D)(1+\sqrt{2}x+x^2)}{1+x^4} \end{aligned}$$

So

$$1 = (B+D) + (A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D)x + (B+D-\sqrt{2}A+\sqrt{2}C)x^2 + (A+C)x^3$$

und

$$\begin{aligned} B+D &= 1 \\ A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D &= 0 \\ B+D-\sqrt{2}A+\sqrt{2}C &= 0 \\ A+C &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung ist:

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad B = \frac{1}{2} \quad C = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad D = \frac{1}{2}$$

So

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{(1/2\sqrt{2})x + 1/2}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{-(1/2\sqrt{2})x + 1/2}{1-\sqrt{2}x+x^2}$$

und

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{(1/2\sqrt{2})(x+\sqrt{2}/2) + 1/4}{1/2 + (x+\sqrt{2}/2)^2} + \frac{-(1/2\sqrt{2})(x-\sqrt{2}/2) + 1/4}{1/2 + (x-\sqrt{2}/2)^2}$$

Wir sehen:

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^4} = \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left(\frac{1}{2} + \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \right) + \frac{1}{4} \arctan \left(2\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left(\frac{1}{2} + \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \right) + \frac{1}{4} \arctan \left(2\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) \right]_{-R}^R$$

Wir haben die Grenzwerten

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4} [\arctan(2(x+a))]_{-R}^R = \frac{\pi}{4}$$

für alle $a \in \mathbb{R}$. So

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2} + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\log \left(\frac{1/2 + (x + \sqrt{2}/2)^2}{1/2 + (x - \sqrt{2}/2)^2} \right) \right]_{-R}^R = \frac{\pi}{2}$$

3: (a) Mit zweimal partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos x \exp x \, dx &= [\cos x \exp x]_a^b + \int_a^b \sin x \exp x \, dx \\ &= [\cos x \exp x]_a^b + [\sin x \exp x]_a^b - \int_a^b \cos x \exp x \, dx \end{aligned}$$

So

$$\int_a^b \cos x \exp x \, dx = \frac{1}{2} [(\sin x + \cos x) \exp x]_a^b$$

(b) Mit der Substitution $u = \log x$, haben wir $x = \exp(u)$, und $dx = \exp(u)du$, so

$$\int_a^b \cos(\log x) \, dx = \int_{\log(a)}^{\log(b)} \cos u \exp u \, du = \frac{1}{2} [(\sin x + \cos x) \exp x]_{\log(a)}^{\log(b)}$$

mit Teile (a).

(c) Mit der Substitution $u = \sqrt{x}$, haben wir $x = u^2$ und $dx = 2udu$, so

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} \, dx = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{\sqrt{1-u^2}}{1-u} 2u \, du$$

Mache die Substitution $u = \sin \theta$, $du = \cos \theta d\theta$:

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} \, dx = \int_{\arcsin \sqrt{a}}^{\arcsin \sqrt{b}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 \theta}}{1-\sin \theta} 2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta$$

Beobachte:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1-\sin^2 \theta}}{1-\sin \theta} 2 \sin \theta \cos \theta &= \frac{2 \sin \theta \cos^2 \theta}{1-\sin \theta} \\ &= \frac{2 \sin \theta (1+\sin \theta)(1-\sin \theta)}{1-\sin \theta} \\ &= 2 \sin \theta + 2 \sin^2 \theta \\ &= 2 \sin \theta + 1 - \cos 2\theta \end{aligned}$$

mit den Identitäten

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

So

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} dx &= \int_{\arcsin \sqrt{a}}^{\arcsin \sqrt{b}} 2 \sin \theta + 1 - \cos 2\theta d\theta \\ &= \left[-2 \cos \theta + 1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\arcsin \sqrt{a}}^{\arcsin \sqrt{b}} \end{aligned}$$

4: Es gilt $(f^{-1})'(x) = 1/f'(f^{-1}(x))$.

$$\begin{aligned} \int_c^d f^{-1}(x) dx &= \int_c^d f^{-1}(x) \cdot 1 dx \\ &= f^{-1}(d)d - f^{-1}(c)c - \int_c^d \frac{x}{f'(f^{-1}(x))} dx \\ &= db - ca - \int_a^b \frac{f(y)}{f'(y)} f'(y) dy. \end{aligned}$$

Im ersten Schritt benutze partielle Integration, im zweiten Schritt die Substitution $x = f(y)$. Am Ende nutze noch dass $f(a) = c \equiv f^{-1}(c) = a$ und $f(b) = d$ da f bijektiv und streng monoton steigend ($f' > 0$).

5: 1. $\int_a^b \exp(\sqrt{x}) dx = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} 2y \exp(y) dy$, mit der Substitution $x = y^2$, $dx = 2y dy$. Mit partieller Integration $y' = 1$ und $\exp' = \exp$ erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} \int_a^b \exp(\sqrt{x}) dx &= 2\sqrt{b} \exp(\sqrt{b}) - 2\sqrt{a} \exp(\sqrt{a}) - \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} 2 \exp(y) dy \\ &= 2\sqrt{b} \exp(\sqrt{b}) - 2\sqrt{a} \exp(\sqrt{a}) - 2 \exp(\sqrt{b}) + 2 \exp(\sqrt{a}). \end{aligned}$$

2. $\int_a^b \arcsin(\sqrt{x}) = \int_{\arcsin(\sqrt{a})}^{\arcsin(\sqrt{b})} y \sin(y) \cos(y)$ mit der Substitution $x = \sin^2(y)$, $dx = 2 \sin(y) \cos(y) dy$. Partielle Integration (da $y' = 1$, $(\sin^2)' = 2 \sin \cos$) liefert weiter

$$\int_a^b \arcsin(\sqrt{x}) = \arcsin(\sqrt{b})b - \arcsin(\sqrt{a})a - \int_{\arcsin(\sqrt{a})}^{\arcsin(\sqrt{b})} \sin(y)^2.$$

Partielle Integration liefert (da $(-\cos)' = \sin$ und $\sin' = \cos$)

$$\int_u^v \sin^2 = \cos(u) \sin(u) - \cos(v) \sin(v) + \int_u^v \cos^2.$$

Da $\cos^2 = 1 - \sin^2$, kann man nach $\int_u^v \sin^2$ auflösen und erhält

$$\int_u^v \sin^2 = \frac{1}{2}(v - \cos(v) \sin(v) - u + \cos(u) \sin(u)).$$

Insgesamt erhält man die Antwort für das Integral. Da $\cos = \sqrt{1 - \sin^2}$, erhält man beim Einsetzen der Integralgrenzen $\cos(\arcsin(\sqrt{b})) = \sqrt{1 - b}$, wobei noch überprüft werden muss, dass die Wertebereiche korrekt sind.

3. $\int_a^b \log(\sqrt{1+x^2}) = \int_{\arctan(a)}^{\arctan(b)} \tan'(\theta) \log(\sqrt{1+\tan^2(\theta)})$ mit der Substitution aus dem Tipp. Nun gilt $1 + \tan^2 = (\cos^2 + \sin^2)/\cos^2 = 1/\cos^2$. Wir setzen ein und führen partielle Integration durch, da $\log(1/\cos(\theta))' = \cos(\theta)\sin(\theta)/\cos^2(\theta) = \tan(\theta)$ erhalten wir $\int_a^b \log(\sqrt{1+x^2}) = b \log(\sqrt{1+b^2}) - a \log(\sqrt{1+a^2}) - \int_{\arctan(a)}^{\arctan(b)} \tan(\theta) \tan(\theta)$ Wir wissen $\tan' = 1 + \tan^2$, also $(\tan(\theta) - \theta)' = \tan^2$. Damit ergibt sich die Lösung.

- 6:** Sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $\phi: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ eine Regelfunktion. Dann gibt es $\xi \in (a, b)$ mit $\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \int_a^b \phi$, denn mit $m = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ und $M = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ gilt $m\phi(x) \leq f(x)\phi(x) \leq M\phi(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und damit

$$\int_a^b m\phi \leq \int_a^b f\phi \leq \int_a^b M\phi.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also $\xi \in (a, b)$ mit $\frac{1}{(\int_a^b \phi)} \int_a^b f(x)\phi(x) dx = f(\xi)$, und die Aussage folgt.

Spezialfall $\phi(x) = 1$ für alle x liefert $\int_a^b f = (b-a)f(\xi)$.

In der Übung kann man aber gerne die Studenten zuerst den Spezialfall rechnen lassen, um vielleicht auf die Idee zu kommen.

Alternative Lösung, wo auf den Zwischenwertsatz der Differentialrechnung zurückgeführt wird:

zu f wähle Stammfunktion F mit $F' = f$. Dann gibt es $\xi \in (a, b)$ mit $F'(xi) = (F(b) - F(a))/(b - a)$, also $(b - a)f(\xi) = \int_a^b f$. Falls $\phi > 0$ stetig, schreibe $\phi = \Phi'$, somit kann man substituieren ($y = \Phi(x)$), da die Ableitung positiv, ist Φ bijektiv:

$$\int_a^b f(x)\phi(x) dx = \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(\Phi^{-1}(y)) dy = (\Phi(b) - \Phi(a))f(\xi) = f(\xi) \int_a^b \phi.$$