1: Sei R das Konvergenzradius der Potenzreihe. Dann

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

wenn das Grenzwert existiert. Hier:

$$|a_n| = \frac{n^n}{2^{n/2} n!}$$

so

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{n^n/2^{n/2}n!}{(n+1)^{n+1}/2^{(n+1)/2}(n+1)!} = \sqrt{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{\sqrt{2}}{(1+1/n)^n}$$

Mit der Hinweis:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = e^{-1}$$

2: Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1+x^2}$$

hat die Lösung

$$\int \frac{1}{y}\ dy = \int \frac{x}{1+x^2}\ dx$$

d.h.

$$\log(y) = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$$

wo C konstant ist. Schreibe

$$\log(y) = \log(A\sqrt{1+x^2})$$

wo A konstant ist. Dann

$$y = A\sqrt{1+x^2}$$

Wir wissen, $y(0) = a$, so $A = a$ und

$$y = a\sqrt{1+x^2}$$

Diese Lösung ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

3: (a) Wir schreiben

$$f_n(x) = \frac{1}{2}n^3x^2(1-x)^n$$

Mit zweimal partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)\ dx &= \left[\frac{-1}{2}n^3\frac{-1}{n+1}x^2(1-x)^{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} + \frac{n^3}{n+1}\int_0^1 x(1-x)^{n+1}\ dx \\
&= \frac{n^3}{n+1}\int_0^1 x(1-x)^{n+1}\ dx \\
&= \frac{n^3}{n+1}\left[\frac{-x}{n+2}(1-x)^{n+2}\right]_{x=-1}^{x=1} + \frac{n^3}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 (1-x)^{n+2}\ dx \\
&= \frac{-n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}\left[(1-x)^{n+3}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

(b) Es ist klar, dass

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\ dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right] = 1$$

(c) Beobachte:

$$\lim_{n\to\infty} n^3\alpha^n = 0$$

wenn $0 \leq \alpha < 1$. So

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

für alle $x \in [0, 1)$.

Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig; falls die Konvergenz ist gleichmäßig, haben wir die Formel

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\ dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\ dx$$

dass hier ist falsch.

4: Beobachte:

$$\begin{array}{lcll} a_0 & = & 1 & \\ a_1 & = & \lambda & \\ a_2 & = & 2a_1 - a_0 & = 2\lambda - 1 \\ a_3 & = & 2a_2 - a_1 & = 3\lambda - 2 \\ a_4 & = & 2a_3 - a_2 & = 4\lambda - 3 \end{array}$$

Wir werden die Formel

$$a_n = n\lambda - (n-1)$$

durch vollständige Induktion beweisen.

Unsere Formel ist für $n = 0$ und $n = 1$ richtig. Vermute, dass sie richtig für alle $n \leq N$ ist. Dann

$$\begin{array}{lcl} a_{N+1} & = & 2a_N - a_{N-1} \\ & = & 2(N\lambda - (N-1)) - ((N-1)\lambda - (N-2)) \\ & = & (2N - N + 1)\lambda - (2N - 2 - N + 2) \\ & = & (N+1)\lambda - N \end{array}$$

So, ist die Formel für $n = N + 1$ auch richtig. Wir können diese Formel

$$a_n = n(\lambda - 1) + 1$$

schreiben.

Sei $\lambda = 1$. Dann $a_n = 1$ für alle n, und $\inf M_\lambda = \sup M_\lambda = 1$.

Sei $\lambda > 1$. Dann

$$M_\lambda = \{n(\lambda - 1) + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

so $\sup M_\lambda = \infty$, und $\inf M_\lambda = 1$.

5: Beobachte:

$$a_n = \sum_{k=n}^{2n-2} \frac{1}{k} \qquad a_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

so

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{2n-1+2n-2(2n-1)}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2n(2n-1)} > 0 \end{aligned}$$

So die Folge (a_n) ist monoton wächsend. Beobachte:

$$a_{n+1} - a_n \leq \frac{1}{n^2}$$

für $n \geq 1$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergiert. Wir wissen:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_1 + \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) \\ &\leq a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

So, ist die Folge (a_n) beschränkt. Eine beschränkte, monoton wächsende Folge konvergiert.

6: (a) Wir haben die Ableitung

$$f_k'(x) = \frac{1}{k!}(\sin(x) 2kx \cos(kx^2 + \pi/2) + \cos(x)\sin(kx^2 + \pi/2))$$

Aber $\sin 0 = 0$, $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos 0 = 1$, und $\sin(\pi/2) = 1$. So

$$f_k'(0) = \frac{1}{k!}$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

(b) Wir haben die Ungleichung

$$|\sin(x)\sin(kx^2 + \pi/2)| \leq 1$$

So $|f_k(x)| \leq 1/k!$, und $\sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ konvergiert gegen e. So, konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ absolutlich, und so konvergiert sie.

(c) Für alle $x \in (-1, 1)$, haben wir $|f_k(x)| \leq 1/k!$, und $\sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ konvergiert gegen e. So, ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ (absolutlich) gleichmäßig konvergent aus dem Interval $(-1, 1)$. Sei $f(x)$ das Grenzwert.

Jede Funktion $f_k(x)$ ist stetig, und ableitbar auf $(-1, 1)$, so ist das Grenzwert $f(x)$ stetig und ableitbar, mit Ableitung

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x)$$

Es gilt

$$f'(0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(0) = 0$$

7: (a) Für $t \geq 2$, haben wir die Ungleichung $t \leq \frac{1}{2}t^6$. So

$$t^6 - t \geq \frac{1}{2}t^6$$

und

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{t^6 - t}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}t^2}$$

Das unbestimmte Integral

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2}t^2}\, dt$$

einen Grenzwert hat.
So, hat das unbestimmte Integral

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{2\sqrt[3]{t^6 - t}}\, dt$$

einen Grenzwert.

(b) Für $n \geq 10$, $\log(n) \geq n$. So

$$\frac{1}{n^{\log n}} \leq \frac{1}{n^2}$$

für $n \geq 10$. Die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergiert. So, konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$$