

1: (a) Sei $n = 1$. Dann

$$\sum_{j=1}^n \frac{z^{2^{j-1}}}{1 - z^{2^j}} = \frac{z}{1 - z^2} = \frac{z}{(1+z)(1-z)}$$

und

$$\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z^{2n}} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{(1+z)(1-z)} = \frac{z}{(1+z)(1-z)}$$

So ist die Formel

$$\sum_{j=1}^n \frac{z^{2^{j-1}}}{1 - z^{2^j}} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z^{2n}}$$

richtig wenn $n = 1$.

Vermute, dass die Formel ist richtig wenn $n = N$. Dann:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N+1} \frac{z^{2^{j-1}}}{1 - z^{2^j}} &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z^{2^N}} + \frac{z^{2^N}}{1 - z^{2^{N+1}}} \\ &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z^{2^N}} + \frac{z^{2^N}}{(1+z^{2^N})(1-z^{2^N})} \\ &= \frac{1}{1-z} - \frac{1+z^{2^N} - z^{2^N}}{(1+z^{2^N})(1-z^{2^N})} \\ &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{(1+z^{2^N})(1-z^{2^N})} \end{aligned}$$

So wir haben die Formel durch vollständige Induktion beweis.

(b) Sei

$$a_n = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z^{2n}}$$

Mit Teile (a), wir sehen, dass die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{2^{j-1}}}{1-z^{2^j}}$ konvergent, genau wenn die Folge (a_n) konvergiert, ist, und die Grenzwerten sind gleich. So die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$, und der Grenzwert ist

$$\frac{1}{1-z}$$

2: Wir sehen:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\tan(1/n)} = \exp(\tan(1/n) \log(1/n))$$

so

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\tan(1/n)} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(\tan(x) \log(x))$$

Durch das Regel von L'Hopital, wir sehen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\tan x \log x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\log x}{\cos x / \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1/x}{-1/\sin^2 x} \right) = \left(-\frac{\sin^2 x}{x} \right)$$

Durch das Regel von L'Hopital einmal mehr:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin^2 x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \sin x \cos x = 0$$

Die Funktion \exp ist stetig, so

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{\tan(1/n)} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(\tan(x) \log(x)) = \exp(0) = 1$$

3: Sei

$$g(x) = f(x) - f'(a)(x - a) + f(a)$$

Dann

$$g'(x) = f'(x) - f'(a)$$

und

$$g''(x) = f''(x) > 0$$

So (durch das Mittelwertsatz), die Funktion g' monoton wachsend ist, und $g'(x) \neq g'(y)$ wenn $x \neq y$. So, es gibt nur ein Punkt x , mit $g'(x) = 0$. Dieser Punkt ist $x = a$.

Wir wissen, dass $g''(a) > 0$. So, $x = a$ ein lokale Minimum der Funktion g ist. Für $x > a$, $g'(x) > 0$, und für $x < a$, $g'(x) < 0$. So (durch das Mittelwertsatz) die Funktion $g(x)$ ist monoton wachsend wenn $x > a$, und monoton fallend wenn $x < a$. Für $x, y > a$, $g(x) \neq g(y)$ wenn $x \neq y$. Für $x, y < a$, $g(x) \neq g(y)$ wenn $x \neq y$.

So, $g(x) > g(a)$ wenn $x \neq a$. $g(a) = 0$. So für $x \neq a$, haben wir $g(x) > 0$, dass ist:

$$f(x) > f'(a)(x - a) + f(a)$$

4: (a) $f(x) = \exp(x) - \exp(-x)$. Die Ableitung ist:

$$f'(x) = \exp(x) + \exp(-x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

So (durch das Mittelwertsatz), die Funktion f monoton wachsend und injektiv ist. Die Funktion f ist auch stetig. Wir haben Grenzwerten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\exp(x) - \exp(-x)) = +\infty$$

und

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\exp(x) - \exp(-x)) = -\infty$$

so, durch das Zwischenwertsatz, wir sehen dass die Funktion $f(x)$ ist surjektiv.

(b) Wir wissen:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

So:

$$g'(y) = \frac{1}{\exp(g(y)) + \exp(g(-y))}$$

5: Wir wissen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

so, es R s.d. $0 < f(x) < 1$ für alle $x > R$ gibt.

So, die Funktion $f|_{[R, \infty)}$ beschränkt ist. Die Funktion f ist stetig, so die Funktion $f|_{[0, R]}$ beschränkt ist. So, die ganz Funktion f beschränkt ist.

Sei

$$S = \sup\{f(x) \mid x \in [0, \infty)\}$$

Falls $S = 0$, dann $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, \infty)$, und $f(0) = S$. Falls $S > 0$, es gibt $R > 0$ so dass $f(x) < S/2$ für alle $x > R$ (seit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$).

Dann $f(x) \leq S$ für alle $x \in [0, R]$. Sei $0 < \varepsilon < S/2$. Dann, es $\alpha \in \{f(x) \mid x \in [0, \infty)\}$ s.d. $\alpha > S - \varepsilon$ gibt. Aber

$$\alpha \in \{f(x) \mid x \in [0, R]\}$$

Durch die Definition von ‘sup’, wir sehen:

$$S = \sup\{f(x) \mid x \in [0, R]\}$$

Aber die Funktion f ist stetig, so $x_0 \in [0, R]$ existiert, so dass $f(x_0) = S$.

6: Sei $\varepsilon > 0$. Dann die Abbildungen f und g gleichmäßig stetig sind, so δ_1 und δ_2 existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}$$

wenn $|x - y| < \delta_1$, und

$$|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wenn $|x - y| < \delta_2$. Sei $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Dann, für $|x - y| < \delta$, haben wir

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |\lambda f(x) + g(x) - (\lambda f(y) + g(y))| \\ &\leq |\lambda| |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &< \frac{|\lambda|\varepsilon}{2|\lambda|} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

So, die Funktion h gleichmäßig stetig ist.

7: Schreibe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \sin(x^2)}{y}$$

Dann

$$\int y \, dy = \int x \sin(x^2) \, dx$$

und

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{-1}{2} \cos(x^2) + \frac{1}{2}C$$

wo C ein Konstant ist. Wir können

$$y = \sqrt{C - \cos(x^2)}$$

schreiben ($y(0) > 0$).

Wir wissen, $y(0) = c$, und $c > 0$. So:

$$\sqrt{C - 1} = c \quad \Rightarrow \quad C = 1 + c^2$$

und

$$y = \sqrt{1 + c^2 - \cos(x^2)}$$

Diese Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Wir sollten, dass sie eine Lösung ist, prüfen.

Beobachte, dass $y(0) = c$. Die Ableitung der Funktion y ist:

$$y'(x) = \frac{2x \sin(x^2)}{2\sqrt{1 + c^2 - \cos(x^2)}} = \frac{x \sin(x^2)}{y}$$

so die Lösung ist okay.

8: (a) Wenn $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(kx)| \leq 1$. So

$$\left| \exp(-x) \frac{\sin(kx)}{k!} \right| \leq \frac{\exp(-x)}{k!}$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp(-x)}{k!}$ konvergiert. So die Reihe $\sum \sum_{k=0}^n \exp(-x) \frac{\sin(kx)}{k!}$ konvergiert absolutlich, und so konvergiert.

(b)

$$f'_k(x) = -\exp(-x) \frac{\sin(kx)}{k!} + \exp(-x) \frac{k \cos(kx)}{k!}$$

(c) Für $x \in (-1, 1)$, haben wir

$$|f_k(x)| \leq \frac{e}{k!}$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} e/k!$ konvergiert, so, für $x \in (-1, 1)$, ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig konvergent.

So, die Funktion f stetig und ableitbar ist. Die Ableitung $f'(0)$ ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = e$$