

Lösungen der Differential- und Integralrechnung I Nachklausur

09. April 2003

1: Sei $w = z^3$. Wir werden Die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n^2} w^n$$

betrachten. Falls diese Potenzreihe hat Konvergenzradius R , dann hat die Potenzreihe $\sum \frac{8^n}{n^2} z^{3n}$ Konvergenzradius $R^{1/3}$.

Sei $a_n = 8^n/n^2$. Dann

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{8^n/n^2}{8^{n+1}/(n+1)^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \right| = \frac{1}{8}$$

So, hat die Potenzreihe $\sum (8^n/n^2) z^{3n}$ Konvergenzradius

$$R^{1/3} = \frac{1}{2}$$

2: Beobachte

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2}$$

So

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

wo C konstant ist.

Wenn $x = 1$, $y = 1/2$, so

$$-2 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = -1$$

So

$$\frac{-1}{y} = \frac{-1}{x} - 1$$

und

$$y = \frac{1}{1/x + 1} = \frac{x}{x+1}$$

3: (a) Sei $u = \log x$. Dann $du = 1/x dx$ und

$$\int_2^r \frac{1}{x \log x} dx = \int_{\log 2}^{\log r} \frac{1}{u} dy = \log(\log r) = \log(\log 2)$$

Beobachte:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \log(\log r) = \infty$$

so konvergiert nicht das unbestimmte Integral

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} dx$$

(b) Sei $a_n = 1/n \log n$. Dann die Folge (a_n) monoton fallend ist, mit Grenzwert 0. So, konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$$

Das unbestimmte Integral

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} dx$$

konvergiert nicht. So, konvergiert nicht die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$, und die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$ ist nicht absolut.

4: Beobachte:

$$a_n - 1 = \frac{1}{2}(a_{n-1} + 1) - 1 = \frac{1}{2}(a_{n-1} - 1)$$

So, durch vollständige Induktion

$$a_n - 1 = \frac{1}{2^n} c$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) = 0$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 1$$

5: Die Funktion f ist stetig, und $\exp(0) = 1$. Wir müssen, dass die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} x \cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

stetig ist, zeigen. Stetigkeit ist für $x \neq 0$ klar.

Beobachte:

$$\left| x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

so

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

So, ist die Funktion g im Punkt 0 stetig, und wir sein fertig.

6: Wir müssen, dass die Funktion S ist $2n$ -mal differenzierbar, mit

$$S^{(2n)}(0) = 0 \quad S^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$$

zeigen. Wir arbeiten zurch vollständige Induktion.

Die Aussage ist für $n = 1$ klar. Vermute, dass die Aussage ist für $n - k$ richtig. Dann

$$S^{(2k)}(x) = -S^{(2k-2)}(x)$$

So, die Funktion $S^{(2k)}(x)$ ist zweimal differenzierbar, mit

$$S^{(2k+1)}(x) = -S^{(2k-1)}(x) \quad S^{(2k+2)}(x) = -S^{(2k)}(x)$$

so

$$S^{(2k+2)}(0) = 0 \quad S^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

und wir sein fertig.

Seit $S^{(2n)}(0) = 0$, und $S^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$, die Funktion S hat Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

7:

(a) Die Gleichung

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos b}{b} - \int_a^b \frac{\cos x}{x^2} dx$$

ist klar mit partielle Integration.

(b) Mit Teile (a):

$$\int_1^r \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \frac{\cos r}{r} - \int_1^r \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Wir wissen, dass $|\cos x| \leq 1$, so

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| -\frac{\cos r}{r} \right| = 0$$

und

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

Der Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r \frac{1}{x^2} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{r} \right) = 1$$

existiert. So, existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r \frac{\cos x}{x^2} dx$$

und wir sein fertig.