# Differential- und Integralrechnung I Übungen

3. Februar 2003

**1:** (a) Zeige

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{z^{2^{j-1}}}{1-z^{2^j}} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z^{2^n}}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \neq 1$, und alle $n \in \mathbb{N}$.
Tipp: $(1+a)(1-a) = 1 - a^2$ für alle $a \in \mathbb{C}$.

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{2^{j-1}}}{1-z^{2^j}}$$

Wenn sie konvergiert, was ist der Grenzwert?

**2:** Finde

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Tipp: Benutze die Definition von $a^b$ für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$!

**3:** Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $f''$ stetig ist, und $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige:

$$f(x) > f'(a)(x-a) + f(a)$$

für alle $x \neq a$.

**4:** Sei $f(x) = \exp(x) - \exp(-x)$

(a) Zeige, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist.

(b) Zeige, dass die Inversen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (das heißt $g(f(x)) = x$ und $f(g(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$) hat Ableitung $g'(y) = 1/(\exp(g(y)) + \exp(-g(y)))$.

**5:** Es sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [0,\infty)$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Zeige, dass $f$ beschränkt ist, d.h. dass $M \in \mathbb{R}$ existiert so dass $f(x) \leq M$ für alle $x \in [0,\infty)$. Zeige, dass $x_0 \in [0,\infty)$ existiert, so dass $f(x_0) = \sup\{f(x) \mid x \in [0,\infty)$.

**6:** Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Zeige, dass dann die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $h(x) = \lambda f(x) + g(x)$ ebenfalls gleichmäßig stetig ist.

**7:** Sei $c > 0$. Man löse die Differentialgleichung

$$y' = \frac{x\sin(x^2)}{y}; \qquad y(0) = c,$$

wobei die rechte Seite für $(x,y) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ definiert sei, und bestimme das Existenzintervall der Lösung.

**8:** Sei

$$f_k(x) = \exp(-x)\frac{\sin(kx)}{k!} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

(a) Zeige, dass die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Finde die Ableitung der Funktion $f_k(x)$.

(c) Zeige, dass die durch den Grenzwert definiert Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ stetig und differenzierbar ist. Berechne eine gegen die Ableitung konvergierende Reihe.