

# Differential- und Integralrechnung I

## Übungen für Woche 9

9. Dezember 2002

3 der ersten 4 Aufgaben sollen schriftlich gelöst und am folgenden Montag bis 11:15 eingeworfen werden. Die übrigen Aufgaben werden in den Übungsgruppen diese Woche bearbeitet.

**1:** Definiere die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch die Formel

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

- (a) Wo ist die Funktion  $f$  stetig? Wo ist sie differenzierbar?  
(b) Finde die Ableitung  $f'(x)$ , wo sie existiert.

**2:** Stelle fest, wo die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechne dort ihre Ableitungen.

- (a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = |x|$   
(b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(z) = \begin{cases} z \sin(1/z); & z \neq 0 \\ 0; & z = 0 \end{cases}$

**3:** Sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  so dass  $f(z_1 + z_2) = z_1 + z_2$ ,  $f(z_1 z_2) = f(z_1) f(z_2)$ , und  $f$  ist stetig. Beweise dass die Funktion  $f$  ist definiert durch eine der folgenden Formeln.

- $f(z) = 0$  für alles  $z \in \mathbb{C}$ .
- $f(z) = z$  für alles  $z \in \mathbb{C}$ .
- $f(z) = \bar{z}$  für alles  $z \in \mathbb{C}$ .

Tipp: Was ist  $f(1)$ ? Finde  $f(z)$  für  $z \in \mathbb{N}$ ,  $z \in \mathbb{Z}$ ,  $z \in \mathbb{Q}$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , und  $z \in \mathbb{C}$ .

**4:** Sei  $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$  bijektiv und stetig. Beweise dass  $f^{-1}$  stetig ist.

**5:** Stelle fest, wo die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechne dort ihre Ableitungen.

- (a)  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad |z| < 1$   
(b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(z) = \sin(\cos z)$   
(c)  $f: \mathbb{R} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid \cos(z) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}; f(z) = \frac{\sin z}{\cos z}$

**6:** Sei  $x > 0$ .

(a) Finde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x$$

(b) Schreibe

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} := \exp\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

Finde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

Tipp: Die Abbildung  $\log x$  ist monoton, und  $\log(2^n) = n \log 2$ .

Der Limes  $+\infty$  soll hier ebenfalls zugelassen sein.