Spektraltheorie

Vorlesungsskript
Wintersemester 2016/2017

Priv.-Doz. Dr. Martin Kohlmann

GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Aus der Linearen Algebra sind die folgenden Hauptaspekte endlich-dimensionaler Vektorräume bekannt:

- lineare Eigenschaften,
- geometrische Eigenschaften,
- metrische Eigenschaften.

In dieser Vorlesung betrachten wir die Verallgemeinerung auf den einfachsten unendlich-dimensionalen Fall, nämlich den des *Hilbertraums*. Ein Hilbertraum ist ein komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt, der zusätzlich als normierter Vektorraum *vollständig* ist.
Hilberträume sind von grundlegender Bedeutung für die Mathematik und die Physik; beispielsweise wäre eine mathematische Formulierung der Quantenmechanik oder der Festkörperphysik ohne den Begriff des Hilbertraums undenkbar. Besonders wichtig sind in diesem Zusammenhang Funktionenräume, die zugleich die Struktur eines Hilbertraums tragen.
Wir betrachten daher zunächst Hilberträume und ihre *Geometrie* (rechte Winkel, Orthogonalprojektionen etc.); bereits hier kommt die Analysis ins Spiel, denn die Eigenschaft, dass Cauchyfolgen stets einen Grenzwert besitzen, wird in entscheidender Weise verwendet.
Anschließend studieren wir lineare Abbildungen zwischen Hilberträumen, die sog. *linearen Operatoren.* Wie beginnen mit den *beschränkten (stetigen)* Hilbertraumoperatoren und konzentrieren uns dabei besonders auf die *symmetrischen* und die *kompakten* Operatoren, für die bereits eine spektrale Zerlegung existiert. Außerdem werden einige wichtige Klassen kompakter Operatoren (z.B. Spurklasse-Operatoren, Hilbert-Schmidt-Operatoren etc.) und Anwendungen z.B. für Integraloperatoren vorgestellt.

Viele Anwendungsbeispiele werden hingegen durch *unbeschränkte* Operatoren beschrieben (z.B. Differentialoperatoren). Während beschränkte Opertoren auf dem ganzen Hilbertraum $\mathcal{H}$ definiert sind, werden unbeschränkte Operatoren immer auf einem Definitionsbereich $D(T) \subset \mathcal{H}$ betrachtet. Besonders wichtig für Anwendungen sind die *symmetrischen* und darunter die *selbstadjungierten Operatoren.* Wir studieren typische Beispiele aus der Quantenmechanik (Ortsoperator, Impulsoperator).

Der Begriff der selbstadjungierten Erweiterung wird am Beispiel der *Friedrichsschen Fortsetzung* vorgestellt.

Wir führen anschließend die zentralen Begriffe *Spektrum* und *Resolvente* ein und diskutieren Zerlegungen und Eigenschaften des Spektrums, insbesondere im selbstadjungierten Fall.

Im Kapitel über Störungstheorie beweisen wir den *Störungssatz von Kato und Rellich*, der eine Aussage zur Selbstadjungiertheit eines Operators $T+V$ macht, wenn T ein selbstadjungierter Operator ist und die Störung V symmetrisch und relativ beschränkt bzgl. T (mit relativer Schranke < 1) ist. Wir wenden den Störungssatz von Kato und Rellich auf den Schrödingeroperator des Wasserstoffatoms an.

Ziel der Vorlesung ist der Beweis des *Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren*, die sich unter Verwendung einer Spektralschar $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ als Spektralintegral $H = \int \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$ schreiben lassen. Insbesondere ist jeder selbstadjungierte Operator unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator in einem geeigneten $L_2(X, \mathrm{d}\mu(x))$ (Verallgemeinerung der "Hauptachsentransformation").

Der Spektralsatz ermöglicht es schließlich, spektrale Eigenschaften selbstadjungierter Operatoren mit Hilfe der zugehörigen Spektralschar auszudrücken.

Die hier vorgestellten Inhalte haben zahlreichen Anwendungen in der Mathematik,

- Fourierreihen und die Fouriertransformation in der Analysis,
- Partielle Differentialgleichungen,
- Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastische Prozesse),
- Numerische Mathematik,

und in der Physik,

- Quantenmechanik,
- Festkörperphysik,
- Statistische Mechanik.

Zahlreiche namenhafte Mathematiker wie E.I. Fredholm, E. Schmidt, D. Hilbert, F. Riesz, S. Banach oder J. v. Neumann haben sich in ihrer wissenschaftlichen Arbeit mit der Hilbertraumtheorie auseinandergesetzt. Der Bezug zur Geschichte der Mathematik in Göttingen ist offensichtlich. Die hier vorgestellten Grundlagen ermöglichen den Zugang zu einem attraktiven und aktuellen Forschungsgebiet an der Schnittstelle zwischen Mathematik und Physik.

Kapitel 1

Notation

Es ist wichtig, zunächst den Umgang mit einigen Bezeichnungen und grundlegenden Begriffen zu vereinbaren, welche wir in dieser Vorlesung benutzen wollen.
Wir verwenden die folgenden Zahlenbereiche:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}: &\quad \text{natürliche Zahlen},\\
\mathbb{N}_0: &\quad \text{natürliche Zahlen mit Null},\\
\mathbb{Z}: &\quad \text{ganze Zahlen},\\
\mathbb{Q}: &\quad \text{rationale Zahlen},\\
\mathbb{R}: &\quad \text{reelle Zahlen},\\
\mathbb{C}: &\quad \text{komplexe Zahlen}.
\end{aligned}$$

1.1 Mengen

Sei X eine Menge. Wir verwenden die folgende Notation:

$$\begin{aligned}
x \in X: &\quad x \text{ ist ein Element von } X,\\
x \notin X: &\quad x \text{ ist nicht Element von } X,\\
\forall x \in X: &\quad \text{für alle } x \in X \text{ gilt...},\\
\exists x \in X: &\quad \text{es gibt ein } x \in X, \text{ so dass gilt...},\\
A \subset X: &\quad A \text{ ist Teilmenge von } X.
\end{aligned}$$

Für $A, B \subset X$ ist

$$A \backslash B := \{x \in A; x \notin B\}.$$

Die Menge der *geordneten Paare* (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$ heißt *kartesisches Produkt*:

$$X \times Y := \{(x, y); x \in X,\ y \in Y\}.$$

Sei (X, τ) ein *topologischer Raum*, d.h. X ist eine Menge und τ ist ein Teilmengensystem von X, so dass gilt:

(i) $\emptyset, X \in \tau$.

(ii) Die Vereinigung beliebig vieler Mengen aus τ liegt wieder in τ.

(iii) Aus $A, B \subset \tau$ folgt $A \cap B \in \tau$.

Man nennt τ eine *Topologie auf* X und eine Menge $A \subset \tau$ nennt man *offen*. Weiter sagt man

$$M \subset X \text{ ist abgeschlossen} \quad :\Longleftrightarrow \quad X \backslash M \text{ ist offen.}$$

Für beliebiges $M \subset X$ ist $\overline{M}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die M enthält:

$$\overline{M} \coloneqq \cap_{\substack{X \supset N \supset M \\ X \backslash N \text{ offen}}} N.$$

1.2 Funktionen

Seien X, Y Mengen. Wir schreiben

$$f\colon X \to Y$$

oder

$$x \mapsto f(x)$$

für eine Funktion von X nach Y, d.h. die Abbildung f ordnet jedem $x \in X$ genau ein $y = f(x) \in Y$ zu. Für $A \subset X$ ist

$$f(A) \coloneqq \{f(x); x \in A\} \subset Y,$$

für $B \subset Y$ ist

$$f^{-1}(B) \coloneqq \{x \in X; f(x) \in B\} \subset X.$$

Wir nennen $f(X)$ den *Wertebereich (engl.: range)* oder das *Bild von* f und schreiben

$$R(f) \coloneqq \{f(x); x \in X\} = f(X) \subset Y.$$

Wir sagen

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \textit{surjektiv} \quad &:\Longleftrightarrow \quad f(X) = Y, \\ f \text{ ist } \textit{injektiv} \quad &:\Longleftrightarrow \quad (f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y), \\ f \text{ ist } \textit{bijektiv} \quad &:\Longleftrightarrow \quad f \text{ ist injektiv und sujektiv.} \end{aligned}$$

Die *Einschränkung* von $f\colon X \to Y$ auf $A \subset X$ wird mit $f\restriction_A$ bezeichnet. Für $A \subset X$ ist χ_A die *charakteristische Funktion von* A:

$$\chi_A(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Seien X, Y topologische Räume. Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt *stetig*, wenn gilt:

$$V \subset Y \text{ offen} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(V) \subset X \text{ offen.}$$

1.3 Relationen

Definition 1.1. Sei X eine Menge. Eine *Relation auf* X ist eine Teilmenge $\mathcal{R}$ von $X \times X$. Wenn $(x, y) \in \mathcal{R}$, so sagen wir, dass x in $\mathcal{R}$-Relation zu y steht; in Zeichen: $x\mathcal{R}y$.

Definition 1.2. Eine Relation $\mathcal{R} \subset X \times X$ heißt eine Äquivalenzrelation, wenn gilt:

(i) $\mathcal{R}$ ist *reflexiv*, d.h. $\forall x \in X : x\mathcal{R}x$,

(ii) $\mathcal{R}$ ist *symmetrisch*, d.h. aus $x\mathcal{R}y$ folgt $y\mathcal{R}x$,

(iii) $\mathcal{R}$ ist *transitiv*, d.h. aus $x\mathcal{R}y$ und $y\mathcal{R}z$ folgt $x\mathcal{R}z$.

Sei $\mathcal{R}$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge X und $x \in X$. Die Menge der $y \in X$ mit $x\mathcal{R}y$ heißt die *Äquivalenzklasse von* x,

$$[x] \coloneqq \{y \in X; x\mathcal{R}y\},$$

und x heißt ein *Repräsentant* der Äquivalenzklasse. Wir bezeichnen mit

$$X/\mathcal{R} \coloneqq \{[x]; x \in X\}$$

die *Partition* der Äquivalenzrelation $\mathcal{R}$.

Theorem 1.3. *Sei X eine Menge und $\mathcal{R}$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann gehört jedes $x \in X$ zu genau einer Äquivalenzklasse. Mit anderen Worten: X zerfällt in natürlicher Weise in paarweise disjunkte Äquivalenzklassen.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Aufgabe 1.1. □

Statt $\mathcal{R}$ schreiben wir für Äquivalenzrelationen manchmal auch kurz $\sim$, wenn klar ist, welche Äquivalenzrelation gemeint ist.

Beispiel 1.4. Sei $X = \mathbb{Z}$ und

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x - y \in 3\mathbb{Z}.$$

Dann zerfällt X in die 3 Äquivalenzklassen

$$\begin{aligned}
[0] &= \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}, \\
[1] &= \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}, \\
[2] &= \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}.
\end{aligned}$$

Beispiel 1.5 (Die reelle projektive Gerade). Sei $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \backslash \{(0, 0)\}$. Wir definieren auf X eine Relation durch

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} : x = \alpha y,$$

wobei $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ ist. Die Äquivalenzklassen kann man sich als Geraden durch den Ursprung $(0, 0)$ vorstellen (ohne den Punkt $(0, 0)$).

Beispiel 1.6 (Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$). Eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ heißt *Cauchyfolge*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N_\varepsilon : \quad |\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon.$$

Die Menge der Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. Wir führen auf $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ eine Relation $\sim$ ein vermöge

$$a \sim b \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (\alpha_n - \beta_n) = 0,$$

wobei $a = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $b = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Offensichtlich ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen in $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ ist die Menge der reellen Zahlen, in Zeichen $\mathbb{R} = \mathcal{C}(\mathbb{Q})/\sim$.

Zur Vereinfachung der Notation lassen wir die Angabe der Indexmenge zukünftig weg, wenn keine Missverständnisse zu erwarten sind. Wir schreiben dann beispielsweise (α_n) für die Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.3.1 Übungen

Aufgabe 1.1. Sei M eine Menge mit einer Äquivalenzrelation $\mathcal{R}$. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Äquivalenzklassen $[\cdot]$ paarweise disjunkt sind.

Aufgabe 1.2. Eine Relation $\mathcal{R}$ heißt antisymmetrisch, wenn aus $x\mathcal{R}y$ und $y\mathcal{R}x$ bereits $x = y$ folgt. Eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation heißt Halbordnung. Sei M eine Menge, $\mathcal{P}(M)$ die Menge der Teilmengen von M. Man zeige, dass die Inklusion $\subset$ eine Halbordnung auf $\mathcal{P}(M)$ liefert.

Aufgabe 1.3. Geben Sie ein Beispiel für eine symmetrische und transitive Relation $\mathcal{R}$ auf einer Menge X an, die nicht reflexiv ist. Wo liegt der Fehler in der folgenden Argumentation: Für alle $x, y \in X$ mit $x\mathcal{R}y$ gilt $y\mathcal{R}x$ (Symmetrie) und aus $x\mathcal{R}y$ und $y\mathcal{R}x$ folgt $x\mathcal{R}x$ (Transitivität)?

Kapitel 2

Hilberträume

Ein Prä-Hilbertraum ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit einem inneren Produkt (Skalarprodukt) bzw. einer positiven Form. Ist ein Prä-Hilbertraum als normierter Vektorraum zusätzlich vollständig, so bezeichnet man ihn als Hilbertraum. Jeder Prä-Hilbertraum kann zu einem Hilbertraum vervollständigt werden. Wir beginnen daher zunächst mit (Sesquilinear-)Formen.

2.1 Sesquilinearformen

Definition 2.1. Sei $\mathcal{E}$ ein komplexer Vektorraum. Eine Abbildung

$$\mathbf{s}\colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{C}$$

heißt *Sesquilinearform auf* $\mathcal{E}$ (oder kurz *Form*), wenn $\mathbf{s}[\cdot,\cdot]$ linear im 1. Argument und konjugiert linear (anti-linear) im 2. Argument ist. Zu einer Sesquilinearform $\mathbf{s}$ gehört die *quadratische Form*

$$\mathbf{s}[f] := \mathbf{s}[f,f], \quad \forall f \in \mathcal{E}.$$

Sesquilinearformen auf reellen Vektorräumen sind die aus der Linearen Algebra bekannten *Bilinearformen*. Die lateinische Vorsilbe sesqui (= anderthalb) deutet an, dass eine Sesquilinearform linear in einem und "zur Hälfte linear" im anderen Argument ist. In der Physik wird meist Linearität im zweiten Argument und Anti-Linearität im ersten Argument verlangt.

Bemerkung 2.2. Im komplexen Vektorraum $\mathcal{E}$ gilt für jede Form $\mathbf{s}$ die *Polarisierungsidentität*

$$4\mathbf{s}[f,g] = \mathbf{s}[f+g] + \mathrm{i}[f+\mathrm{i}g] - \mathbf{s}[f-g] - \mathrm{i}\mathbf{s}[f-\mathrm{i}g], \quad \forall f,g \in \mathcal{E}, \tag{2.1}$$

oder $4\mathbf{s}[f,g] = \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \mathbf{s}[f+\mathrm{i}^k g]$; siehe Aufgabe 2.1. Daher kann man im komplexen Fall aus der quadratischen Form die volle Sesquilinearform rekonstruieren. Dies ist bei reellen Vektorräumen i. Allg. nicht möglich (siehe Aufgabe 2.2).

Beispiel 2.3. Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall und sei $k \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren

$$C^k[a,b] := \{u \in C^k(I); u^{(j)} \text{ stetig auf } [a,b] \text{ fortsetzbar}, 0 \leq j \leq k\}.$$

Mit einem festen $w \in C[a,b]$ definieren wir die Sesquilinearformen

$$\mathbf{s}_k \colon C^k[a,b] \times C^k[a,b] \to \mathbb{C}$$

durch

$$\mathbf{s}_k[f,g] := \int_a^b f^{(k)}(x)\overline{g^{(k)}(x)}w(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall f,g \in C^k[a,b].$$

Definition 2.4. Eine Form $\mathbf{s}$ heißt *symmetrisch*, wenn

$$\mathbf{s}[f,g] = \overline{\mathbf{s}[g,f]}, \quad \forall f,g \in \mathcal{E},$$

gilt. Eine Form $\mathbf{s}$ heißt *nicht-negativ*, wenn

$$\mathbf{s}[f] \geq 0, \quad \forall f \in \mathcal{E},$$

gilt, und *positiv*, falls

$$\mathbf{s}[f] > 0, \quad \forall f \in \mathcal{E}\backslash\{0\}.$$

Bemerkung 2.5.

(1) Eine Form $\mathbf{s}$ im komplexen Vektorraum $\mathcal{E}$ ist genau dann symmetrisch, wenn die quadratische Form reellwertig ist.

(2) Die Formen $\mathbf{s}_k$ in Beispiel 2.3 sind genau dann symmetrisch, wenn die Gewichtsfunktion w reellwertig ist (siehe Aufgabe 2.3).

Definition 2.6. Eine positive Form $\mathbf{s}$ auf dem komplexen Vektorraum $\mathcal{E}$ heißt *Skalarprodukt*. Man schreibt dann gerne

$$\langle f,g\rangle := \mathbf{s}[f,g] \quad \text{und} \quad \|f\| := \langle f,f\rangle^{1/2}, \quad \forall f,g \in \mathcal{E}.$$

Theorem 2.7. *Für Skalarprodukte gilt die* Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\|, \quad \forall f,g \in \mathcal{E}. \tag{2.2}$$

Gleichheit gilt in (2.2) *genau dann, wenn f und g linear abhängig sind.*

Beweis. Wir geben zwei verschiedene Beweise an:
1. Beweis. Man rechnet leicht nach, dass im komplexen Vektorraum $\mathcal{E}$ die Identität

$$\|g\|^2\left(\|f\|^2\|g\|^2 - |\langle f,g\rangle|^2\right) = \left\|\|g\|^2 f - \langle f,g\rangle g\right\|^2 \geq 0 \tag{2.3}$$

gilt. Daraus folgt sofort die Behauptung.
2. Beweis. Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir $\varphi(t) := \|f + tg\|^2$. Dann gilt $\varphi(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und

$$\varphi(t) = \|f\|^2 + 2t \operatorname{Re} \langle f, g \rangle + t^2 \|g\|^2 .$$

Damit ist φ ein nicht-negatives, reelles Polynom zweiter Ordnung. Ein solches Polynom kann keine einfachen reellen Nullstellen haben, d.h. es gibt entweder keine reellen Nullstellen oder aber genau eine doppelte Nullstelle. Für die Diskriminante von φ gilt daher

$$4(\operatorname{Re} \langle f, g \rangle)^2 - 4 \|f\|^2 \|g\|^2 \leq 0.$$

Hieraus folgt

$$|\operatorname{Re} \langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|, \quad \forall f, g \in \mathcal{E}.$$

Man wählt dann $\vartheta \in \mathbb{R}$ mit $\left\langle e^{\mathrm{i}\vartheta} f, g \right\rangle = |\langle f, g \rangle|$ und hat

$$|\langle f, g \rangle| = \operatorname{Re} \left\langle e^{\mathrm{i}\vartheta} f, g \right\rangle \leq \left\| e^{\mathrm{i}\vartheta} f \right\| \|g\| = \|f\| \|g\| .$$

Der Beweis des Zusatzes ist etwas mühsamer; wir verweisen auf [31]. □

Bemerkung 2.8.

(1) Die Schwarzsche Ungleichung (2.2) gilt allgemeiner für Sesquilinearformen $\mathbf{s} \geq 0$ (allerdings ohne den Zusatz!):

$$|\mathbf{s}[f, g]| \leq \mathbf{s}[f]^{1/2} \mathbf{s}[g]^{1/2}, \quad \forall f, g \in \mathcal{E}.$$

(2) Für $a, b \geq 0$ gilt $2ab \leq a^2 + b^2$ und daher

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2.$$

Damit folgt aus (2.2) die *Cauchy-Young-Ungleichung*

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad |\langle f, g \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|f\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|g\|^2 .$$

2.1.1 Übungen

Aufgabe 2.1. Rechnen Sie die folgenden Identitäten nach:

(a) Im komplexen Vektorraum gilt für jede Sesquilinearform $\mathbf{s}$ die Polarisierungsidentität (2.1).

(b) Für Skalarprodukte $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in einem komplexen Vektorraum $\mathcal{E}$ gilt die Identität (2.3).

Aufgabe 2.2.

(a) Sei $\mathcal{E}$ ein reeller Vektorraum und $\mathbf{s}$ eine reellwertige, symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{E}$, d.h. $\mathbf{s}[x,y] = \mathbf{s}[y,x] \in \mathbb{R}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$4\mathbf{s}[x,y] = \mathbf{s}[x+y] - \mathbf{s}[x-y], \quad \forall x, y \in \mathcal{E}.$$

(b) Auf dem Raum $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ erzeugt die 2×2-Matrix $T = (t_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ eine reellwertige Bilinearform $\mathbf{t}$ durch $\mathbf{t}[x,y] = \langle Tx, y \rangle = \sum_{i,j} t_{ij} x_i y_j$. Für

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zeige man, dass sich die Bilinearform nicht aus der quadratischen Form zurückgewinnen lässt. Man vergleiche mit Teil (a).
Hinweis: Für alle $x \in \mathbb{R}^2$ ist $\mathbf{t}[x,x] = 0$.

Aufgabe 2.3.

(a) Eine Sesquilinearform $\mathbf{s}$ auf dem komplexen Vektorraum $\mathcal{E}$ ist genau dann symmetrisch, wenn die zugehörige quadratische Form reellwertig ist.

(b) Die Formen $\mathbf{s}_k$ in Beispiel 2.3 sind genau dann symmetrisch, wenn die Gewichtsfunktion w reellwertig ist.

(c) Wann sind die Formen $\mathbf{s}_k$ nicht-negativ?

(d) Die Einschränkung der Form $\mathbf{s}_1$ auf den Raum $\{f \in C^1(a,b); f(a) = 0\}$ ist positiv, sofern $w(x) > 0$ für alle $a < x < b$ gilt.

Aufgabe 2.4. Für die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

berechne man den *numerischen Wertebereich*

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle \, ; x \in \mathbb{C}^2, \ \|x\| \leq 1\} \subset \mathbb{C}.$$

Hinweis: Man zeige zunächst $W(T) \subset \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1/2\}$.

2.2 Prä-Hilberträume

Definition 2.9. Sei $\mathcal{E}$ ein komplexer Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathcal{E}$. Dann heißt $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein *Prä-Hilbertraum.*

Definition 2.10. Sei X ein reeller oder kompexer Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften

(i) $\|f\|_X \geq 0$ und $\|f\|_X = 0$ genau dann, wenn $f = 0$,

(ii) $\|\alpha f\|_X = |\alpha| \, \|f\|_X$, für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und $f \in X$,

(iii) $\|f + g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X$ *(Dreiecksungleichung)*

heißt eine *Norm auf* X. Das Paar $(X, \|\cdot\|_X)$ heißt *normierter Vektorraum.*

Man beachte, dass eine Norm i. Allg. nichts mit einem Skalarprodukt zu tun haben muss.

Bemerkung 2.11. Ist M eine Menge und

$$d\colon M \times M \to [0, \infty)$$

eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$, für alle $x, y \in M$,

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, für alle $x, y, z \in M$,

so heißt d eine *Metrik auf* M und (M, d) heißt ein *metrischer Raum.* (Man beachte, dass M keine lineare Struktur haben muss!) Jeder normierte Vektorraum ist zugleich ein *metrischer Raum* mit der induzierten Metrik

$$d(x, y) \coloneqq \|x - y\|_X \,, \quad \forall x, y \in X.$$

Damit sind in einem normierten Vektorraum die topologischen Grundbegriffe (z.B. offene Mengen, Stetigkeit von Abbildungen) wie in einem metrischen Raum definiert (und sehr einfach!). Beispielsweise heißt eine Menge $M \subset X$ genau dann offen, wenn es zu jedem $x \in M$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit der Eigenschaft $B_\varepsilon(x) \subset M$, wobei

$$B_\varepsilon(x) \coloneqq \{y \in X; \|x - y\|_X < \varepsilon\}.$$

Man sieht leicht, dass die Vektorraumoperationen (Addition, Skalarmultiplikation) stetig sind.

Bemerkung 2.12. Sei $(\mathcal{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbertraum und

$$\|f\| \coloneqq \langle f, f\rangle^{1/2} \,, \quad \forall f \in \mathcal{E}.$$

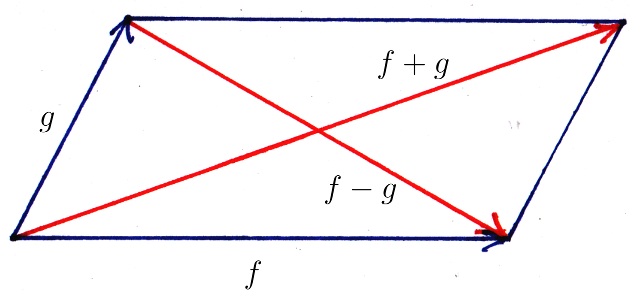
Man rechnet dann leicht nach, dass $\|\cdot\|$ die Eigenschaften (i)–(iii) in Definition 2.10 erfüllt. Damit ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathcal{E}$ und jeder Prä-Hilbertraum ist zugleich ein normierter Vektorraum. Die topologischen Grundbegriffe leiten sich aus der zugehörigen Metrik ab.

Theorem 2.13 (Die Parallelogrammgleichung). *Im Prä-Hilbertraum* $(\mathcal{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *gilt*

$$2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right) = \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2, \quad \forall f, g \in \mathcal{E}. \tag{2.4}$$

Beweis. Dies folgt durch Ausrechnen der rechten Seite. □

Die Parallelogrammgleichung stellt eine Beziehung zwischen den Seitenlängen und den Längen der Diagonalen des von f und g aufgespannten Parallelogramms her, vgl. die folgende Abbildung.



Bemerkung 2.14. Ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|_X)$ ist genau dann ein Prä-Hilbertraum (d.h. die Norm wird von einem Skalarprodukt erzeugt), wenn $\|\cdot\|_X$ der Parallelogrammgleichung (2.4) genügt. Einen Beweis dieser Aussage findet man etwa in [31, 33].

2.2.1 Übungen

Aufgabe 2.5.

(a) Sei $(\mathcal{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbertraum und $\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2}$, $f \in \mathcal{E}$. Man zeige, dass $\|\cdot\|$ die Eigenschaften einer Norm besitzt.

(b) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum. Dann gilt die *umgekehrte Dreiecksungleichung*

$$\left|\|x\|_X - \|y\|_X\right| \leq \|x-y\|_X, \quad \forall x, y \in X. \tag{2.5}$$

(c) Gegeben seien Cauchy-Folgen (x_n) und (y_n) in einem normierten Vektorraum $(X, \|\cdot\|_X)$ mit $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|_X = 0$. Man zeige:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X = \lim_{n\to\infty} \|y_n\|_X .$$

Aufgabe 2.6. Man zeige, dass die Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{C}^d$ definiert durch

$$\|x\|_\infty := \max_{1\leq j\leq d} |x_j|, \quad x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{C}^d,$$

für $d \geq 2$ nicht von einem Skalarprodukt stammen kann.

Aufgabe 2.7 (Strikte Konvexität der Einheitskugel im Prä-Hilbertraum). Sei $\mathcal{E}$ ein Prä-Hilbertraum und seien $x \neq y \in \mathcal{E}$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ gegeben. Dann gilt $\|tx + (1-t)y\| < 1$, für alle $t \in (0,1)$.
Hinweis: Mit $f := tx + (1-t)y$ starte man mit der Annahme $1 = \langle f, tx + (1-t)y \rangle$.

2.3 Hilberträume und die Vervollständigung von Prä-Hilberträumen

Definition 2.15. Sei $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prä-Hilbertraum und sei $(f_n) \subset \mathcal{E}$ eine Folge in $\mathcal{E}$. Wir sagen:

(1) (f_n) *konvergiert gegen* $f \in \mathcal{E}$, falls $\|f_n - f\| \to 0$ für $n \to \infty$ gilt, in Zeichen $f_n \to f$. Wir nennen f den *Grenzwert* oder den *Limes* der Folge (f_n).

(2) (f_n) heißt *Cauchyfolge* genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq N : \quad \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Definition 2.16. Sei $\mathcal{H} := (\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prä-Hilbertraum. Man nennt $\mathcal{H}$ einen *Hilbertraum*, wenn $\mathcal{H}$ bezüglich der Norm

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}, \quad \forall f \in \mathcal{E},$$

vollständig ist, d.h. wenn alle Cauchyfolgen aus $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ einen Limes in $\mathcal{E}$ besitzen.

Bemerkung 2.17. Der Limes einer konvergenten Folge ist eindeutig. Konvergente Folgen haben die Cauchyeigenschaft.

Beispiel 2.18. Für $d \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{C}^d$ ein Hilbertraum mit dem Standardskalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{d} x_k \overline{y}_k.$$

Beispiel 2.19. Mit ℓ_2 bezeichnen wir die Menge der komplexen Zahlenfolgen $(x_n) \subset \mathbb{C}$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n.$$

Wegen

$$\left| \sum_{n=m}^{m+k} x_n \overline{y}_n \right| \leq \sum_{n=m}^{m+k} |x_n||y_n| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=m}^{\infty} \left(|x_n|^2 + |y_n|^2 \right)$$

ist die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \overline{y}_n$ konvergent in $\mathbb{C}$, falls $(x_n), (y_n) \in \ell_2$. Man kann zeigen, dass ℓ_2 vollständig und damit ein Hilbertraum ist (siehe Aufgabe 2.9).

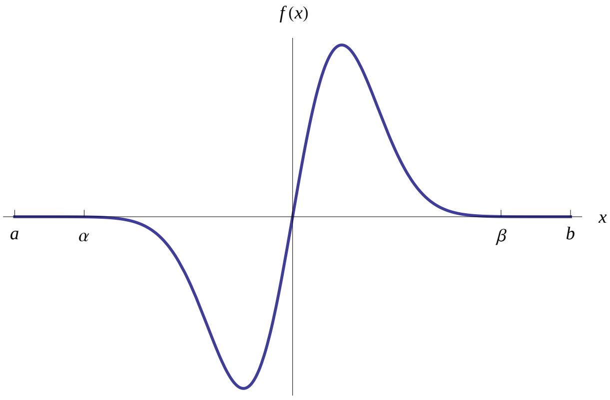
Beispiel 2.20. Sei M ein topologischer Raum und N ein Vektorraum. Sei weiterhin $f\colon M \to N$ eine Funktion. Mit

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in M; f(x) \neq 0\}}$$

bezeichnen wir den *Träger (engl.: support) von f*. Sei nun $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und sei

$$C_c(a,b) := \{f \in C(a,b); \operatorname{supp} f \subset (a,b), \operatorname{supp} f \text{ kompakt}\}.$$

Dann ist $f \in C_c(a,b)$ genau dann, wenn f stetig ist und es Zahlen $\alpha = \alpha_f$ und $\beta = \beta_f$ gibt mit $a < \alpha \leq \beta < b$ und $f(x) = 0$ für $x < \alpha$ und $x > \beta$.



Wir definieren ein Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C_c(a,b) \times C_c(a,b) \to \mathbb{C}$$

vermöge

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x, \quad \forall f, g \in C_c(a,b).$$

Das Paar $(C_c(a,b), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein Prä-Hilbertraum. Wir werden später zeigen, dass es zu jedem Prä-Hilbertraum $\mathcal{E}$ einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ gibt, der $\mathcal{E}$ als dichten Teilraum enthält. Genauer gibt es zu jedem Prä-Hilbertraum $\mathcal{E}$ einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und eine lineare Abbildung $J\colon \mathcal{E} \to \mathcal{H}$ mit

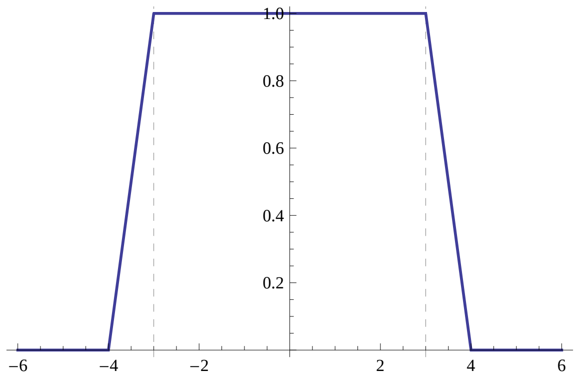
$$\|J(x)\|_{\mathcal{H}} = \|x\|_{\mathcal{E}}, \quad \forall x \in \mathcal{E},$$

und der Eigenschaft

$$\forall y \in \mathcal{H}\ \exists (x_n) \subset \mathcal{E}\colon\ \|y - J(x_n)\|_{\mathcal{H}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Man sagt dann, dass $\mathcal{E}$ (isometrisch) isomorph zu einem dichten Teilraum von $\mathcal{H}$ ist. Die Konstruktion von $\mathcal{H}$ erfolgt über den Prozess der Vervollständigung, siehe Theorem 2.26.

Der Raum $(C_c(a,b), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist nicht vollständig, denn man kann eine Folge stetiger Funktionen konstruieren, die bezüglich der von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ erzeugten Norm gegen eine unstetige Grenzfunktion konvergiert; vgl. die nachfolgende Abbildung.



In unserem Beispiel erhält man durch Vervollständigung von $C_c(a,b)$ den Raum $L_2(a,b)$. Dieser Raum besteht aus (Äquivalenzklassen von) (Borel-)messbaren Funktionen $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty.$$

Der Hilbertraum $L_2(a,b)$ ist der Zustandsraum für ein quantenmechanisches Teilchen, das sich im Intervall (a,b) befindet.

Beispiel 2.21 (Direkte Summe von Hilberträumen). Es seien $(\mathcal{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ und $(\mathcal{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ Hilberträume. Die Menge der Paare

$$(x_1, x_2) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle := \langle x_1,y_1\rangle_1 + \langle x_2,y_2\rangle_2$$

ist ein Hilbertraum und heißt die direkte Summe der Hilberträume $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$, in Zeichen $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Beispiel 2.22 ("Kontinuierliche" direkte Summen). Sei $-\infty \le a < b \le \infty$ und sei $\mathcal{H}'$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}'}$. Sei

$$C_c((a,b);\mathcal{H}') := \{f\colon (a,b) \to \mathcal{H}' \text{ stetig; } \operatorname{supp} f \subset (a,b),\ \operatorname{supp} f \text{ kompakt}\}$$

und

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b \langle f(x), g(x)\rangle_{\mathcal{H}'} \,\mathrm{d}x.$$

Dann ist das Paar $(C_c((a,b),\mathcal{H}'),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbertraum. Seine Vervollständigung wird mit

$$L_2((a,b),\mathcal{H}') \quad \text{oder} \quad \int_{(a,b)}^{\oplus} \mathcal{H}' \,\mathrm{d}x$$

bezeichnet. Die direkte Summe von Hiberträumen wird auch als *direktes Faserintegral* bezeichnet und hat in der Theorie der periodischen Schrödinger-Operatoren (und damit in der Festkörperphysik) eine wichtige Anwendung, siehe Kapitel XIII.16 in [25].

Beispiel 2.23 (Tensorprodukte von Hilberträumen). Seien $(\mathcal{H}_1,\langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ und $(\mathcal{H}_2,\langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ Hilberträume. Für $\varphi_1\in\mathcal{H}_1$ und $\varphi_2\in\mathcal{H}_2$ definieren wir eine konjugiert bilineare Form

$$\varphi_1\otimes\varphi_2\colon \mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2\to\mathbb{C}$$

durch

$$(\varphi_1\otimes\varphi_2)(\psi_1,\psi_2) \coloneqq \langle\varphi_1,\psi_1\rangle_1\,\langle\varphi_2,\psi_2\rangle_2\,,$$

für alle Paare $(\psi_1,\psi_2)\in\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2$; die Form $\varphi_1\otimes\varphi_2$ ist konjugiert linear in beiden Argumenten. Es sei $\mathcal{E}$ die Menge aller endlichen Linearkombinationen solcher Bilinearformen $\varphi_1\otimes\varphi_2$. Wir definieren auf $\mathcal{E}$ ein Skalarprodukt durch

$$\langle\varphi\otimes\psi,\eta\otimes\mu\rangle \coloneqq \langle\varphi,\eta\rangle_1\,\langle\psi,\mu\rangle_2$$

und lineare Fortsetzung. Man muss noch zeigen, dass dieses innere Produkt in der Tat wohldefiniert und positiv ist; siehe [23]. Für zwei offene Intervalle $I_1,I_2\subset\mathbb{R}$ gilt beispielsweise

$$L_2(I_1\times I_2)\simeq L_2(I_1)\otimes L_2(I_2);$$

dabei wird die Bedeutung von $\simeq$ in Definition 2.24 erklärt. Das Tensorprodukt von Hilberträumen spielt in der Quantenmechanik eine große Rolle, etwa in der Quanteninformationstheorie. In der Atomphysik und der Quantenmechanik anderer Vielteilchensysteme tritt häufig der *Fock-Raum* auf, vgl. [23]. Gegeben ein Hilbertraum $\mathcal{H}$, so betrachtet man

$$\mathcal{F}\coloneqq\mathbb{C}\oplus\mathcal{H}\oplus(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})\oplus(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})\oplus\dots,$$

mit den Unteräumen der symmetrischen bzw. der anti-symmetrischen Tensoren. Hier tritt eine abzählbare direkte Summe auf, die man so ähnlich wie bei ℓ_2 verstehen kann (in dieser Terminologie kann man ℓ_2 als die abzählbare direkte Summe $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\dots$ auffassen). In der Quantenmechanik benutzt man diese Hilberträume, um Situationen mit mehreren Bosonen (z.B. Protonen) bzw. mehreren Fermionen (z.B. Elektronen) zu beschreiben.

Definition 2.24. Zwei Hilberträume $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ heißen *isometrisch isomorph* oder einfach *isomorph*, wenn es eine lineare, surjektive Abbildung

$$U\colon\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$$

gibt mit

$$\langle Ux, Uy \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}_1. \tag{2.6}$$

Eine surjektive lineare Abbildung U mit (2.6) heißt *unitär.*

Bemerkung 2.25.

(1) Man sieht sofort, dass eine unitäre Abbildung automatisch injektiv und damit bijektiv ist.

(2) Eine surjektive Abbildung $U\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ist genau dann unitär, wenn

$$\|Ux\|_{\mathcal{H}_2} = \|x\|_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall x \in \mathcal{H}_1,$$

gilt; dies folgt aus der Polarisierungsidentität (2.1). Allgemeiner heißt eine lineare Abbildung $J\colon X \to Y$ zwischen zwei normierten Vektorräumen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ eine *Isometrie*, falls $\|Jx\|_Y = \|x\|_X$ für alle $x \in X$ gilt; J muss dafür nicht surjektiv sein.

Wir kommen nun noch zur Vervollständigung von normierten Vektorräumen und damit von Prä-Hilberträumen. Der Beweis folgt [33].

Theorem 2.26. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann gibt es einen vollständigen normierten Vektorraum $(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}})$ und eine isometrische Abbildung*

$$J\colon X \to \tilde{X}$$

mit dichtem Bild, d.h. $J(X)$ ist dicht in $\tilde{X}$. Der Raum $\tilde{X}$ ist eindeutig bestimmt bis auf isometrische Isomorphie.

Beweis.

(1) Es sei $\mathcal{C}(X)$ die Menge aller Cauchyfolgen in X. Auf $\mathcal{C}(X)$ betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$(x_n) \sim (y_n) \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Sei $\tilde{X} := \mathcal{C}(X)/\sim$ die zugehörige Partition und sei $[(x_n)] \in \tilde{X}$ die durch die Cauchyfolge $(x_n) \in \mathcal{C}(X)$ repräsentierte Äquivalenzklasse. Man sieht leicht, dass die Verknüpfungen

$$[(x_n)] + [(y_n)] := [(x_n + y_n)], \quad \alpha[(x_n)] := [\alpha(x_n)]$$

wohldefiniert sind und dass $\tilde{X}$ mit diesen Verknüpfungen ein linearer Raum ist. Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung (2.5) erhalten wir

$$|\|x_n\| - \|x_m\|| \le \|x_n - x_m\| \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Daher existiert der Grenzwert der Folge $(\|x_n\|)$ und wir setzen

$$\|[(x_n)]\|_{\tilde{X}} := \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Mit Aufgabe 2.5(c) erschließt man die Wohldefiniertheit und man sieht sofort, dass $\left(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}}\right)$ ein normierter Vektorraum ist.

(2) Wir zeigen nun, dass $\left(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}}\right)$ vollständig ist. Sei dazu $(\tilde{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \tilde{X}$ eine Cauchyfolge in $\left(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}}\right)$. Wir wählen für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen Repräsentanten $\left(x_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, d.h.,

$$\tilde{x}_k = \left[\left(x_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right].$$

Jedes $\left(x_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in X und es gibt ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit

$$\left\|x_m^{(k)} - x_{n_k}^{(k)}\right\| \le 1/k, \quad m \ge n_k. \tag{2.7}$$

Wir setzen

$$\hat{x} := \left(x_{n_1}^{(1)}, x_{n_2}^{(2)}, \dots, x_{n_k}^{(k)}, \dots\right) = \left(x_{n_k}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

und behaupten, dass $\hat{x}$ eine Cauchyfolge in X ist. Es sei $\overline{x}_{n_k}^{(k)} \in \tilde{X}$ die Klasse, die die konstante Folge

$$\left(x_{n_k}^{(k)}, x_{n_k}^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)}, \dots\right)$$

enthält. Wegen (2.7) gilt dann für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left\|\tilde{x}_k - \overline{x}_{n_k}^{(k)}\right\|_{\tilde{X}} = \lim_{m\to\infty} \left\|x_m^{(k)} - x_{n_k}^{(k)}\right\| \le 1/k, \tag{2.8}$$

mithin

$$\begin{aligned}\left\|x_{n_k}^{(k)} - x_{n_m}^{(m)}\right\| &= \left\|\overline{x}_{n_k}^{(k)} - \overline{x}_{n_m}^{(m)}\right\|_{\tilde{X}} \\ &\le \left\|\overline{x}_{n_k}^{(k)} - \tilde{x}_k\right\|_{\tilde{X}} + \|\tilde{x}_k - \tilde{x}_m\|_{\tilde{X}} + \left\|\tilde{x}_m - \overline{x}_{n_m}^{(m)}\right\|_{\tilde{X}} \\ &\le \|\tilde{x}_k - \tilde{x}_m\|_{\tilde{X}} + 1/k + 1/m. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Da $(\tilde{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\tilde{X}$ ist, ist $\hat{x}$ in der Tat eine Cauchyfolge in X. Wir zeigen nun noch, dass $\|\tilde{x}_k - [\hat{x}]\|_{\tilde{X}} \to 0$ für $k \to \infty$. In der Tat gilt wegen (2.8)

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}_k - [\hat{x}]\|_{\tilde{X}} &\le \left\|\tilde{x}_k - \overline{x}_{n_k}^{(k)}\right\|_{\tilde{X}} + \left\|\overline{x}_{n_k}^{(k)} - [\hat{x}]\right\|_{\tilde{X}} \\ &\le \left\|\overline{x}_{n_k}^{(k)} - [\hat{x}]\right\|_{\tilde{X}} + 1/k. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Wir haben

$$\left\|[\hat{x}] - \overline{x}_{n_k}^{(k)}\right\|_{\tilde{X}} = \lim_{p\to\infty} \left\|x_{n_p}^{(p)} - x_{n_k}^{(k)}\right\|$$

$$\leq_{(2.9)} \lim_{p\to\infty} \|\tilde{x}_p - \tilde{x}_k\|_{\tilde{X}} + 1/k$$

und wegen $\|\tilde{x}_p - \tilde{x}_k\|_{\tilde{X}} < \varepsilon$ für alle $k, p \geq N_\varepsilon$ folgt

$$\lim_{k\to\infty} \left\|[\hat{x}] - \overline{x}_{n_k}^{(k)}\right\|_{\tilde{X}} = 0,$$

also mit (2.10)

$$\lim_{k\to\infty} \|\tilde{x}_k - [\hat{x}]\|_{\tilde{X}} = 0.$$

(3) Wir definieren eine Abbildung $J\colon X \to \tilde{X}$ durch

$$x \mapsto J(x) := [(x, x, x, \dots)].$$

Offenbar ist J isometrisch und injektiv. Zu zeigen bleibt, dass es zu jedem $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in X$ gibt, so dass $\|\tilde{x} - J(x)\|_{\tilde{X}} < \varepsilon$. Zu $\tilde{x} = [(x_n)] \in \tilde{X}$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, für alle $n, m \geq n_0$. Dann gilt

$$\|\tilde{x} - J(x_{n_0})\|_{\tilde{X}} = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{n_0}\| < \varepsilon.$$

Damit ist das Theorem bewiesen. □

Bemerkung 2.27. Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Prä-Hilbertraum, so überträgt sich die Parallelogrammgleichung von $(X, \|\cdot\|)$ auf $\left(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}}\right)$. Daher ist dann $\left(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}}\right)$ ein Hilbertraum.

2.3.1 Übungen

Aufgabe 2.8. Man zeige, dass der Prä-Hilbertraum $\mathcal{E} := (C[-1,1], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit dem Skalarprodukt aus Beispiel 2.20 nicht vollständig ist.
Hinweis: Konstruieren Sie eine Cauchyfolge in $\mathcal{E}$, die punktweise gegen eine unstetige Funktion konvergiert.

Aufgabe 2.9. Man zeige, dass der Folgenraum ℓ_2 vollständig ist.
Hinweis: Für eine Cauchyfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \ell_2$, $a_k = \left(\alpha_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ gilt $\|a_k\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\alpha_n^{(k)}\right|^2 < \infty$ und $\lim_{k,l\to\infty} \|a_k - a_l\| = 0$. Man betrachte $a = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\alpha_n := \lim_{k\to\infty} \alpha_n^{(k)}$ und zeige $a \in \ell_2$ und $\|a - a_k\| \to 0$, $k \to \infty$. Hierfür ist es günstig, zunächst nur endliche Summen der Form $\sum_{1\leq n\leq n_0} \left|\alpha_n - \alpha_n^{(k)}\right|^2$ zu verwenden.

Aufgabe 2.10. Zeigen Sie, dass die direkte Summe $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ der Hilberträume $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ wieder ein Hilbertraum ist.

Kapitel 3

Orthogonalität und der Darstellungssatz von Riesz

Im Prä-Hilbertraum ermöglicht die Existenz eines Skalarprodukts das Studium von Winkeln zwischen zwei Vektoren. Von zentraler Bedeutung für die Geometrie des Hilbertraums ist der rechte Winkel und damit der Begriff der Orthogonalität.

3.1 Orthogonalität

Definition 3.1. Sei $\mathcal{E}$ ein Prä-Hilbertraum.

(1) Wir nennen $f, g \in \mathcal{E}$ *orthogonal*, falls $\langle f, g\rangle = 0$ ist; in Zeichen $f \perp g$.

(2) Für eine Teilmenge $M \subset \mathcal{E}$ definieren wir

$$M^\perp := \{f \in \mathcal{E}; \forall g \in M : \ f \perp g\}.$$

Bemerkung 3.2. Eine Menge $G \subset \mathcal{E}$ ist abgeschlossen, wenn für alle Folgen $(x_n) \subset G$ mit $x_n \to x$ in $\mathcal{E}$ bereits $x \in G$ gilt. Man sieht leicht, dass $M^\perp$ abgeschlossen ist (siehe Theorem 3.7(i)).

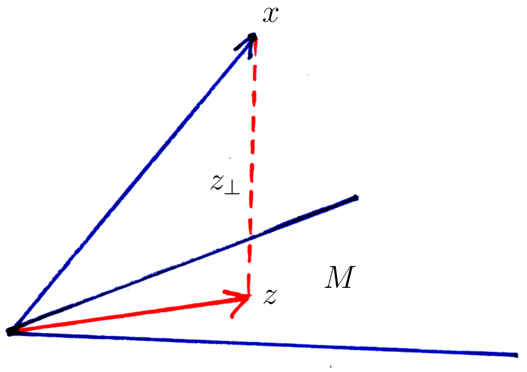
Theorem 3.3 (Pythagoras). *Sei $\mathcal{E}$ ein Prä-Hilbertraum und seien $f, g \in \mathcal{E}$ mit $f \perp g$. Dann gilt*

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 .$$

Beweis. Dies folgt durch Ausrechnen der linken Seite. □

Definition 3.4. Sei $\mathcal{E}$ ein Prä-Hilbertraum, $M \subset \mathcal{E}$ ein linearer Teilraum und sei $f \in \mathcal{E}$. Ein Vektor $g \in M$ heißt *Orthogonalprojektion von f auf M*, falls $f - g \in M^\perp$ ist.

Der nachfolgende Satz ist einer der zentralen Sätze der Funktionalanalysis und etabliert die Zerlegung $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$, wenn M ein abgeschlossener Teilraum des Hilbertraums $\mathcal{H}$ ist.



Theorem 3.5 (Der Projektionssatz). *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $M \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann besitzt jedes $x \in \mathcal{H}$ eine Orthogonalprojektion auf M; diese ist eindeutig bestimmt. Genauer existieren zu jedem $x \in \mathcal{H}$ eindeutig bestimmte Vektoren $z \in M$ und $z_\perp \in M^\perp$ mit*

$$x = z + z_\perp.$$

Insbesondere haben wir die Zerlegung

$$\mathcal{H} = M \oplus M^\perp.$$

Beweis. Sei $x \in \mathcal{H}$ und d der Abstand von x zu M:

$$d := \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Nach Definition des Infimums gibt es eine Folge $(y_n) \subset M$ mit $\|x - y_n\| \to d$ für $n \to \infty$. Dabei gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ zugleich $\|x - y_n\| \geq d$. Wir behaupten nun, dass (y_n) eine Cauchy-Folge ist. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}
\|y_m - y_k\|^2 &= \|(x - y_m) - (x - y_k)\|^2 \\
&=_{(2.4)} 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_k\|^2 - \|2x - y_m - y_k\|^2 \\
&= 2\left(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_k\|^2\right) - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_m + y_k)\right\|^2 \\
&\leq 2\left(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_k\|^2\right) - 4d^2,
\end{aligned}$$

da $\frac{1}{2}(y_m + y_k) \in M$. Damit folgt

$$\|y_m - y_k\|^2 \to 2(d^2 + d^2) - 4d^2 = 0, \quad m, k \to \infty,$$

und wir haben die Cauchy-Eigenschaft bewiesen. Da $\mathcal{H}$ vollständig ist, existiert ein $z \in \mathcal{H}$ mit $y_n \to z$, $n \to \infty$. Wegen $M = \overline{M}$ und $(y_n) \subset M$ muss schon $z \in M$ gelten. Weiter folgt wegen der Stetigkeit der Norm

$$\|x - z\| = \left\|x - \lim_{n \to \infty} y_n\right\| = \lim_{n \to \infty} \|x - y_n\| = d.$$

Wir definieren jetzt $z_\perp := x - z$, so dass $x = z + z_\perp$ gilt, und weisen noch $z_\perp \in M^\perp$ sowie die Eindeutigkeit der Zerlegung nach. Für beliebiges $y \in M$ und $t \in \mathbb{R}$ ist $z + ty \in M$, also

$$d^2 \leq \|x - (z+ty)\|^2 = \|z_\perp - ty\|^2 = d^2 - 2t \operatorname{Re} \langle z_\perp, y\rangle + t^2 \|y\|^2 ,$$

also

$$2t \operatorname{Re} \langle z_\perp, y\rangle \leq t^2 \|y\|^2 , \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

mithin $\operatorname{Re} \langle z_\perp, y\rangle = 0$. Analog zeigt man $\operatorname{Im} \langle z_\perp, y\rangle = 0$. Damit ist $\langle z_\perp, y\rangle = 0$ für alle $y \in M$, d.h. $z_\perp \in M^\perp$. Sei nun $x = w + w_\perp$ eine weitere Zerlegung von x mit $w \in M$ und $w_\perp \in M^\perp$. Dann gilt $0 = (z - w) + (z_\perp - w_\perp)$ mit $z - w \in M$ und $z_\perp - w_\perp \in M^\perp$. Nach dem Satz des Pythagoras muss dann

$$0 = \|z - w\|^2 + \|z_\perp - w_\perp\|^2$$

gelten. Es folgt $z = w$ und $z_\perp = w_\perp$. □

Bemerkung 3.6. Da $M, M^\perp$ als abgeschlossene Teilräume von $\mathcal{H}$ selbst Hilberträume sind, kann man die Notation $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ wie in Beispiel 2.21 interpretieren.

Theorem 3.7. *Seien M, N lineare Teilräume des Hilbertraums $\mathcal{H}$. Dann gilt:*

(1) *$M^\perp$ ist ein abgeschlosser linearer Teilraum von $\mathcal{H}$.*

(2) *Aus $M \subset N$ folgt $N^\perp \subset M^\perp$.*

(3) $\overline{M}^\perp = M^\perp$.

(4) $\overline{M} = M^{\perp\perp} (:= (M^\perp)^\perp)$.

(5) *Es gilt $\overline{M} = \mathcal{H}$ genau dann, wenn $M^\perp = \{0\}$.*

Beweis. Aufgabe 3.1. □

3.1.1 Übungen

Aufgabe 3.1. Beweisen Sie Theorem 3.7.
Hinweis: Für den Beweis von (4) und (5) verwende man den Projektionssatz.

Aufgabe 3.2. Im Folgenraum ℓ_2 betrachten wir die Unterräume

$$M = \left\{ x \in \ell_2 ; x_{2k} = \frac{1}{k} x_{2k-1}, \, \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

und

$$N = \{ x \in \ell_2 ; x_{2k} = 0, \, \forall k \in \mathbb{N} \} .$$

Man zeige:

(a) M und N sind abgeschlossen.

(b) $M \cap N = \{0\}$.

(c) $M + N \neq \overline{M + N} = \ell_2$.

3.2 Lineare Funktionale

Definition 3.8.

(1) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum. Eine (stetige) lineare Abbildung $\ell\colon X \to \mathbb{C}$ heißt ein *(stetiges) lineares Funktional.*

(2) Ein lineares Funktional $\ell\colon X \to \mathbb{C}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit
$$|\ell(x)| \leq C \|x\|_X, \quad \forall x \in X. \tag{3.1}$$

Bemerkung 3.9. Für $X = \mathbb{R}^d$ oder $X = \mathbb{C}^d$ sind alle linearen Funktionale stetig. I. Allg. kann es aber unstetige lineare Funktionale geben. Des ist nicht leicht zu zeigen und erfordert die Anwendung des Auswahlaxioms.

Lemma 3.10. *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum und sei $\ell\colon X \to \mathbb{C}$ ein lineares Funktional. Dann gilt:*

$$\ell \text{ ist stetig} \iff \ell \text{ ist stetig bei } 0 \iff \ell \text{ ist beschränkt.}$$

Beweis. Aufgabe 3.3. □

Definition 3.11. Für ein stetiges lineares Funktional $\ell\colon X \to \mathbb{C}$ definieren wir die Norm von ℓ durch
$$\|\ell\| \coloneqq \sup\{|\ell(x)|; x \in X,\ \|x\|_X \leq 1\}. \tag{3.2}$$

Bemerkung 3.12. Die Zahl $\|\ell\|$ ist das Infimum der Konstanten C mit (3.1). Dieses Infimum wird angenommen für $C = \|\ell\|$; insbesondere gilt $|\ell(x)| \leq \|\ell\| \|x\|$. Dies werden wir später unter allgemeineren Bedingungen zeigen.

Sei $\mathcal{E}$ ein Prä-Hilbertraum. Unter Verwendung der Schwarzschen Ungleichung sieht man, dass jedes $g \in \mathcal{E}$ eine stetige lineare Abbildung $\ell_g\colon \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ vermöge $f \mapsto \ell_g(f) \coloneqq \langle f, g\rangle$ erzeugt. Die Stetigkeit sieht man entweder mit Lemma 3.10 und $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \|g\|$ oder direkt: Aus $f_n \to f$ in $\mathcal{E}$ folgt

$$|\ell_g(f_n) - \ell_g(f)| = |\langle f_n - f, g\rangle| \leq \|f_n - f\| \|g\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt auch sofort, dass $\|\ell_g\| \leq \|g\|$. Wegen $\ell_g(g) = \|g\|^2$ erhalten wir $\|\ell_g\| = \|g\|$.

Eine der wichtigsten Anwendungen des Projektionssatzes ist der Beweis des Darstellungssatzes von Riesz. Er besagt, dass es zu jedem stetigen linearen Funktional ℓ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ein $g \in \mathcal{H}$ mit der Eigenschaft $\ell = \ell_g$ gibt.

Theorem 3.13 (Riesz). *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\ell\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ linear und stetig. Dann gibt es genau ein $g \in \mathcal{H}$ mit*

$$\ell(f) = \langle f, g\rangle, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Beweis.

(1) Da ℓ linear ist, ist

$$M := \ker(\ell) = \{x \in \mathcal{H}; \ell(x) = 0\}$$

ein linearer Teilraum von $\mathcal{H}$. Da ℓ stetig ist, ist $M = \overline{M}$. Wir dürfen o.E. $M \neq \mathcal{H}$ annehmen, da andernfalls das Theorem mit der Wahl $g = 0$ folgt. Nach dem Projektionssatz existiert nun ein $h \in M^\perp$, $h \neq 0$. Wir machen den Ansatz $g = ch$, wobei wir $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ so wählen, dass $\ell(g) = \langle g, g\rangle$ gilt. Die Zahl c ergibt sich also aus der Gleichung

$$c\,\ell(h) = |c|^2 \langle h, h\rangle\,, \tag{3.3}$$

mit $\ell(h) \neq 0$ und $\langle h, h\rangle = \|h\|^2 > 0$. Wenn wir $c = re^{\mathrm{i}\vartheta}$ schreiben, lautet (3.3)

$$re^{\mathrm{i}\vartheta}\ell(h) = r^2 \langle h, h\rangle$$

und es ist $\overline{c} = re^{-\mathrm{i}\vartheta} = \ell(h)/\|h\|^2$.

(2) Sei nun $f \in \mathcal{H}$. Wegen

$$\ell\left(f - \frac{\ell(f)}{\ell(g)}g\right) = \ell(f) - \frac{\ell(f)}{\ell(g)}\ell(g) = 0$$

ist

$$f - \frac{\ell(f)}{\ell(g)}g \in M.$$

Mit $g \in M^\perp$ und $\ell(g) = \langle g, g\rangle$ erschließen wir

$$0 = \left\langle f - \frac{\ell(f)}{\ell(g)}g, g\right\rangle = \langle f, g\rangle - \ell(f)\frac{\langle g, g\rangle}{\ell(g)} = \langle f, g\rangle - \ell(f).$$

(3) Wir zeigen noch die Eindeutigkeit: Die Annahme $\ell_g = \ell_{g'}$ mit $g, g' \in \mathcal{H}$ impliziert $\langle u, g\rangle = \langle u, g'\rangle$ für alle $u \in \mathcal{H}$. Mit der Wahl $u = g - g'$ erhalten wir $\|g - g'\| = 0$ und schließlich $g = g'$. □

Definition 3.14. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Wir definieren

$$\mathcal{H}^* := \{\ell\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}; \ell \text{ linear und stetig}\},$$

versehen mit der Norm aus (3.2). Das Paar $(\mathcal{H}^*, \|\cdot\|)$ heißt der *Dualraum von $\mathcal{H}$*.

Korollar 3.15. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Dann ist $\mathcal{H}^*$ (anti-)isomorph zu $\mathcal{H}$.*

Beweis. Sei $j\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ definiert durch

$$g \mapsto j(g) := \ell_g = \langle \cdot, g\rangle \in \mathcal{H}^*.$$

Wegen $\|\ell_g\| = \|g\|$ ist
$$\|j(g)\|_{\mathcal{H}^*} = \|\ell_g\|_{\mathcal{H}^*} = \|g\|$$
und folglich ist $j\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ isometrisch und damit injektiv. Nach dem Darstellungssatz von Riesz ist j aber auch surjektiv. Wegen
$$\langle \cdot, \alpha g + \beta h\rangle = \overline{\alpha}\,\langle \cdot, g\rangle + \overline{\beta}\,\langle \cdot, h\rangle$$
ist j konjugiert linear (= anti-linear). Zusammenfassend ist j anti-unitär, mithin sind $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}^*$ anti-isomorph. □

Der Darstellungssatz von Riesz motiviert die in der Quantenmechanik häufig verwendete *bra-ket-Notation (Dirac-Notation)* für Elemente des Hilbertraums ("ket-Vektoren") $|\varphi\rangle$ und seines Dualraums ("bra-Vektoren") $\langle\psi|$.

3.2.1 Übungen

Aufgabe 3.3. Beweisen Sie Lemma 3.10.

3.3 Orthonormalbasen

Definition 3.16. Sei $\mathcal{E}$ ein Prä-Hilbertraum und sei A eine beliebige Indexmenge. Eine Familie $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset \mathcal{E}$ heißt ein *Orthonormalsystem* (ONS), wenn
$$\begin{cases} \|x_\alpha\| = 1, & \forall \alpha \in A, \\ \langle x_\alpha, x_\beta\rangle = 0, & \forall \alpha, \beta \in A,\ \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{3.4}$$
Für (3.4) verwendet man auch die Kronecker-Notation $\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta}$.

Beispiel 3.17.

(1) Im Hilbertraum ℓ_2 wird das Standard-ONS $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gegeben durch
$$e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots),$$
mit der 1 an der i-ten Position.

(2) Im Prä-Hilbertraum $C[0, 2\pi]$ mit dem Skalarprodukt
$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$
bilden die Funktionen $f_k(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx$, $k \in \mathbb{N}$, ein ONS.

Definition 3.18. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

(1) Ein linearer Teilraum $V \subset \mathcal{H}$ heißt *dicht in* $\mathcal{H}$, wenn $\overline{V} = \mathcal{H}$ ist. (Zu jedem $x \in \mathcal{H}$ existiert dann eine Folge $(v_n) \subset V$ mit $\|x - v_n\| \to 0$ für $n \to \infty$.)

(2) Ein ONS $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ im Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt eine *Orthonormalbasis* (ONB), wenn $\operatorname{span}\{x_\alpha; \alpha \in A\}$ ein dichter Teilraum von $\mathcal{H}$ ist; in Zeichen:

$$\mathcal{H} = \overline{\operatorname{span}\{x_\alpha; \alpha \in A\}}. \tag{3.5}$$

Lemma 3.19. *Ein ONS $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ im Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist genau dann eine ONB, wenn gilt:*

$$(\langle x, x_\alpha\rangle = 0, \quad \forall \alpha \in A) \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0. \tag{3.6}$$

Beweis. Sei (3.5) erfüllt und sei $\langle x, x_\alpha\rangle = 0$ für alle $\alpha \in A$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Linearkombination

$$y_\varepsilon = \sum_{i=1}^{m} a_i x_{\alpha_i}$$

mit $\|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$. Dann ist

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle x, x - y_\varepsilon\rangle + \langle x, y_\varepsilon\rangle \le \|x\| \, \|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon \, \|x\| \,,$$

da $\langle x, y_\varepsilon\rangle = 0$. Also muss $x = 0$ sein. Sei nun (3.6) erfüllt. Aus der Annahme

$$M := \overline{\operatorname{span}\{x_\alpha; \alpha \in A\}} \neq \mathcal{H}$$

folgt nach dem Projektionssatz die Existenz eines $0 \neq x \in M^\perp$. Offenbar erfüllt dieses x dann $\langle x, x_\alpha\rangle = 0$ für alle $\alpha \in A$, im Widerspruch zu (3.6). □

Theorem 3.20 (Die Besselsche Ungleichung). *Sei $\mathcal{E}$ ein Prä-Hilbertraum und sei $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset \mathcal{E}$ ein ONS. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{E}$*

$$\sum_{\alpha\in A} |\langle f, x_\alpha\rangle|^2 \le \|f\|^2 \,. \tag{3.7}$$

Theorem 3.21 (Die Parsevalsche Gleichung). *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und sei $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset \mathcal{H}$ eine ONB. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{H}$*

$$f = \sum_{\alpha\in A} \langle f, x_\alpha\rangle \, x_\alpha, \quad \|f\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\langle f, x_\alpha\rangle|^2. \tag{3.8}$$

Beweis. Wir schreiben $f_\alpha := \langle f, x_\alpha\rangle$ für $\alpha \in A$.

(1) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, beliebige Zahlen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ und beliebige Indizes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ rechnen wir

$$\begin{aligned}\left\| f - \sum_{j=1}^{n} c_j x_{\alpha_j} \right\|^2 &= \left\langle f - \sum_{j=1}^{n} c_j x_{\alpha_j}, f - \sum_{j=1}^{n} c_j x_{\alpha_j} \right\rangle \\ &= \|f\|^2 - \left\langle f, \sum_{j=1}^{n} c_j x_{\alpha_j} \right\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{n} c_j x_{\alpha_j}, f \right\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\langle \sum_{j=1}^{n} c_j x_{\alpha_j}, \sum_{j=1}^{n} c_j x_{\alpha_j} \right\rangle \\
&= \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j f_{\alpha_j} - \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{f}_{\alpha_j} + \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \\
&= \|f\|^2 + \sum_{j=1}^{n} |f_{\alpha_j} - c_j|^2 - \sum_{j=1}^{n} |f_{\alpha_j}|^2.
\end{aligned}
$$

Für gegebene $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ wird daher das Minimum von $\left\| f - \sum_{j=1}^{n} c_j x_{\alpha_j} \right\|$ für die Wahl

$$
c_j := f_{\alpha_j}, \quad j = 1, \ldots, n,
$$

angenommen. Damit sehen wir, dass

$$
\left\| f - \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right\| = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |f_{\alpha_j}|^2,
$$

mithin

$$
\sum_{j=1}^{n} |f_{\alpha_j}|^2 \leq \|f\|^2 . \tag{3.9}
$$

Aus (3.9) folgt: Es kann höchstens ein $\alpha \in A$ geben mit $|f_\alpha|^2 \geq \frac{1}{2} \|f\|^2$, es kann höchstens vier Indizes $\alpha \in A$ geben mit $|f_\alpha|^2 \geq \frac{1}{4} \|f\|^2$, etc. Allgemein kann es für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ höchstens 2^k Indizes $\alpha \in A$ geben mit $|f_\alpha|^2 \geq 2^{-k} \|f\|^2$. Daher gibt es höchstens abzählbar unendlich viele Indizes $\alpha \in A$ mit $f_\alpha \neq 0$; diese bezeichnen wir mit $(\tilde{\alpha}_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Für alle $\alpha \in A \backslash \{\tilde{\alpha}_j ; j \in \mathbb{N}\}$ ist $f_\alpha = 0$. Aus (3.9) folgt nun $\sum_{1 \leq j \leq N} |f_{\tilde{\alpha}_j}|^2 \leq \|f\|^2$, für alle $N \in \mathbb{N}$. Mit $N \to \infty$ folgt daraus

$$
\sum_{j=1}^{\infty} |f_{\tilde{\alpha}_j}|^2 \leq \|f\|^2 \tag{3.10}
$$

und damit sofort die Besselsche Ungleichung (3.7).

(2) Sei nun $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine ONB. Nach (1) gibt es zu jedem $f \in \mathcal{H}$ höchstens abzählbar unendlich viele $\alpha \in A$ mit $\langle f, x_\alpha \rangle \neq 0$. Diese Indizes nennen wir $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und schreiben wieder $f_{\alpha_j} := \langle f, x_{\alpha_j} \rangle$ mit $j \in \mathbb{N}$. Wir behaupten

$$
f = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j}.
$$

Die Folge der Partialsummen $g_n := \sum_{1 \leq j \leq n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j}$ ist eine Cauchyfolge, denn für $m < n$ gilt wegen (3.10)

$$
\|g_n - g_m\|^2 = \left\| \sum_{j=m+1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right\|^2 = \sum_{m < j \leq n} |f_{\alpha_j}|^2 \to 0, \quad m, n \to \infty.
$$

Wir setzen

$$\tilde{f} := \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j}$$

und zeigen

$$\left\langle f - \tilde{f}, x_\alpha \right\rangle = 0, \quad \forall \alpha \in A.$$

Wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{f}, x_{\alpha_k} \right\rangle &= \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j}, x_{\alpha_k} \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j}, x_{\alpha_k} \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} \left\langle x_{\alpha_j}, x_{\alpha_k} \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} \delta_{j,k} \\
&= f_{\alpha_k},
\end{aligned}$$

so dass

$$\left\langle f - \tilde{f}, x_{\alpha_k} \right\rangle = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Für $\alpha \in A \backslash \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ gilt

$$\left\langle \tilde{f}, x_\alpha \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j}, x_\alpha \right\rangle = 0$$

und $\langle f, x_\alpha \rangle = 0$. Somit ist $\left\langle f - \tilde{f}, x_\alpha \right\rangle = 0$ für alle $\alpha \in A$ und es folgt $f = \tilde{f}$ oder

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle f, x_{\alpha_j} \right\rangle x_{\alpha_j};$$

das ist der erste Teil des Satzes von Parseval. Weiter können wir nun ausrechnen

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 = \left\|\tilde{f}\right\|^2 &= \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |f_{\alpha_j}|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |f_{\alpha_j}|^2,
\end{aligned}$$

was die zweite Aussage des Satzes von Parseval ergibt. □

Theorem 3.22. *Jeder Hilbertraum besitzt eine ONB.*

Bemerkung 3.23. Diesen Satz werden wir nur für *separable* Hilberträume beweisen, vgl. die nachfolgende Definition. Für nicht-separable Hilberträume verwendet man als Hilfsmittel im Beweis das *Lemma von Zorn*, das zum Auswahlaxiom äquivalent ist.

Definition 3.24. Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare Teilmenge $\{y_k; k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}$ gibt mit

$$\overline{\operatorname{span}\{y_k; k \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{H}.$$

Bemerkung 3.25.

(1) Offenbar ist $\mathcal{H}$ genau dann separabel, wenn es zu jedem $x \in \mathcal{H}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ endliche Linearkombinationen $y = \sum_{j=1}^{m} c_j y_{k_j}$ gibt, mit geeigneten $m \in \mathbb{N}$, $c_j \in \mathbb{C}$ und $k_j \in \mathbb{N}$ so, dass $\|x - y\| < \varepsilon$.

(2) O.E. sei in Definition 3.24 $y_1 \neq 0$. Falls $y_k \in \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_{k-1}\}$, so können wir y_k streichen. Dies führen wir für alle $k \in \mathbb{N}$ durch und erhalten *entweder* endlich viele linear unabhängige $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_N \in \{y_k; k \in \mathbb{N}\}$ mit

$$\operatorname{span}\{\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_N\} = \operatorname{span}\{y_k; k \in \mathbb{N}\} = \mathcal{H}$$

oder abzählbar unendlich viele linear unabhängige $\{\tilde{y}_k; k \in \mathbb{N}\} \subset \{y_k; k \in \mathbb{N}\}$ mit

$$\overline{\operatorname{span}\{\tilde{y}_k; k \in \mathbb{N}\}} = \overline{\operatorname{span}\{y_k; k \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{H}.$$

Im ersten Fall ist $\mathcal{H}$ endlichdimensional, d.h. $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^N$.

Beweis von Theorem 3.22. Es sei (y_k) wie in Definition 3.24. Wir nehmen dabei zusätzlich $y_1 \neq 0$ an und dass

$$y_{k+1} \notin \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_k\}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren induktiv

$$x_1 := \frac{1}{\|y_1\|} y_1$$

und

$$\xi_2 := y_2 - \langle y_2, x_1 \rangle x_1, \quad x_2 := \frac{1}{\|\xi_2\|} \xi_2.$$

Dabei ist $\xi_2 \neq 0$, denn y_1 und y_2 sind linear unabhängig. Weiter gilt $\operatorname{span}\{x_1, x_2\} = \operatorname{span}\{y_1, y_2\}$,

$$\langle \xi_2, x_1 \rangle = \langle y_2, x_1 \rangle - \langle y_2, x_1 \rangle \langle x_1, x_1 \rangle = 0$$

und $\|x_2\| = 1$. Insgesamt haben wir erreicht, dass $x_2 \perp x_1$ und $\|x_2\| = 1$. Wenn wir annehmen, dass $x_1, \ldots, x_n$ bereits konstruiert sind, mit $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j}$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und

$$\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} = \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_n\},$$

so setzen wir

$$\xi_{n+1} := y_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \langle y_{n+1}, x_j \rangle x_j \tag{3.11}$$

und haben $\langle \xi_{n+1}, x_k \rangle = 0$, $k \in \{1, \dots, n\}$, und

$$\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n, \xi_{n+1}\} = \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_n, y_{n+1}\}.$$

Wir setzen

$$x_{n+1} := \frac{1}{\|\xi_{n+1}\|} \xi_{n+1}.$$

Die Aussage von Theorem 3.22 folgt durch vollständige Induktion (Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren). □

Bemerkung 3.26. Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und $M \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$. Es gebe eine ONB $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und eine Indexmenge $A \subset \mathbb{N}$ so, dass $(\eta_k)_{k \in A}$ eine ONB von M ist. Für $x \in \mathcal{H}$ sei $x = z + z_\perp$ die Zerlegung von x nach dem Projektionssatz, d.h. $z \in M$ und $z_\perp \in M^\perp$. Man sieht sofort, dass

$$z = \sum_{k \in A} \langle x, \eta_k \rangle \, \eta_k, \quad z_\perp = \sum_{k \notin A} \langle x, \eta_k \rangle \, \eta_k.$$

Insbesondere sieht man, dass man beim Gram-Schmidtschen Verfahren in Gleichung (3.11) die Orthogonalprojektion von y_{n+1} auf den Teilraum $\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ subtrahiert; vgl. Aufgabe 3.6.

Wir nennen einen Hilbertraum *endlich-dimensional* oder einen *Euklidischen Vektorraum*, wenn $\mathcal{H}$ eine endliche ONB $\{x_1, \dots, x_n\}$ besitzt. Wir können $\mathcal{H}$ dann mit $\mathbb{C}^n$ identifizieren. In einem separablen, nicht endlich-dimensionalen Hilbertraum ist nach Bemerkung 3.25 jede ONB abzählbar. Wir vereinbaren, dass *separabel* im Folgenden bedeuten soll, dass $\mathcal{H}$ eine abzählbare ONB besitzt; genauer unterscheiden wir zwischen den folgenden drei Klassen von Hilberträumen:

- endlich-dimensionale oder Euklidische Vektorräume über $\mathbb{C}$,
- Hilberträume mit abzählbarer ONB,
- Hilberträume, die nicht endlich-dimensional sind und die auch keine abzählbare ONB besitzen.

Der zweite Fall ist dabei der interessanteste und für die Anwendungen wichtigste.

3.3.1 Übungen

Aufgabe 3.4. Für $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ periodisch mit Periode 2π seien

$$c_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(t) \, dt, \quad b_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-int} f'(t) \, dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Man zeige der Reihe nach:

(a) Es ist $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|^2 < \infty$ und $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2 < \infty$.

(b) Es ist $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$.

(c) Die Folge der Partialsummen

$$g_M(x) := \sum_{n=-M}^{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_n e^{\mathrm{i}nx}, \quad M \in \mathbb{N},$$

konvergiert für $M \to \infty$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion g.

(d) Man zeige, dass der gleichmäßige Limes g der Folge $(g_M)_{M\in\mathbb{N}}$ mit f übereinstimmt.
Hinweis: Man darf ohne Beweis benutzen, dass durch $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\mathrm{i}nt}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine ONB von $C[0, 2\pi]$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle u, v\rangle = \int_0^{2\pi} u(t)\overline{v(t)}\,\mathrm{d}t$ gegeben ist. Daher gilt nach Parseval $\|f - g_M\| \to 0$ für $M \to \infty$.

Aufgabe 3.5. Man wende das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Funktionen $1, x, x^2, x^3$ auf dem Intervall $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$ an.
Hinweis: Nutzen Sie bei der Rechnung Symmetrien aus.

Aufgabe 3.6.

(a) Sei M ein abgeschlossener Teilraum eines Hilbertraums $\mathcal{H}$. Es seien $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ und $\{\psi_\beta\}_{\beta\in B}$ Orthonormalbasen von M bzw. von $M^\perp$. Dann gilt für jede Zerlegung von $x \in \mathcal{H}$ der Form $x = z + z_\perp$, $z \in M$ und $z_\perp \in M^\perp$, nach dem Projektionssatz

$$z = \sum_{\alpha\in A} \langle x, \varphi_\alpha\rangle\, \varphi_\alpha, \quad z_\perp = \sum_{\beta\in B} \langle x, \psi_\beta\rangle\, \psi_\beta.$$

(b) Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit ONB $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ und es sei $\ell\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass das Element $g := \sum_{\alpha\in A} \overline{\ell(x_\alpha)} x_\alpha$ die Eigenschaft

$$\ell(f) = \langle f, g\rangle\,, \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

besitzt.

Aufgabe 3.7.

(a) Sei $\mathcal{E} := (C[0, 1], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ der Prä-Hilbertraum aus Beispiel 2.20. Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}$ separabel ist (d.h. $\mathcal{E}$ besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge).

(b) Man zeige, dass der Hilbertraum $L_2(a, b)$ aus Beispiel 2.20 für $-\infty \le a < b \le \infty$ separabel ist.

Aufgabe 3.8 (Ein nicht-separabler Prä-Hilbertraum). Es sei $\mathcal{E}$ der Vektorraum der trigonometrischen Polynome auf der reellen Achse, d.h. $\mathcal{E}$ besteht aus allen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Form

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\mathrm{i}\alpha_k t},$$

mit beliebigen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$ und (paarweise verschiedenen) $\alpha_k \in \mathbb{R}$, für $k = 1, \ldots, n$.

(1) Zeigen Sie, dass
$$\langle f, g \rangle := \lim_{A \to \infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$
ein Skalarprodukt auf $\mathcal{E}$ definiert.
Hinweis: Für $f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\mathrm{i}\alpha_k t}$ gilt $\langle f, f \rangle = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$.

(b) Zeigen Sie, dass die Familie von Funktionen $(g_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ mit $g_\alpha(t) := e^{\mathrm{i}\alpha t}$ ein ONS in $\mathcal{E}$ bildet.

Aufgabe 3.9.

(a) Zeigen Sie, dass jeder separable Hilbertraum $\mathcal{H}$ isomorph zum Folgenraum ℓ_2 ist.

(b) Sei $\mathcal{E}$ ein Prä-Hilbertraum, der eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ enthält, so dass $\operatorname{span}\{x_n\}$ dicht in $\mathcal{E}$ ist. Man zeige (ohne Theorem 2.26 zu verwenden), dass $\mathcal{E}$ zu einem separablen Hilbertraum vervollständigt werden kann.

3.4 Schwache Konvergenz

Im $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ besitzt jede beschränkte Folge nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge. Dies ist in einem separablen Hilbertraum nicht mehr wahr. Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ ein ONS. Wenn wir (x_k) als Folge betrachten, so gilt
$$\|x_k - x_j\|^2 = 2, \quad k \neq j.$$
Die Folge (x_k) besitzt daher *keine* konvergente Teilfolge. Aus diesem Grund wollen wir einen schwächeren Konvergenzbegriff finden und führen dazu das Konzept der schwachen Konvergenz ein. Hierbei nutzen wir aus, dass wir $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}^*$ nach Korollar 3.15 miteinander identifizieren können.

Definition 3.27.

(1) Eine Folge $(f_n) \subset \mathcal{H}$ heißt *schwach konvergent*, wenn die komplexen Zahlenfolgen $(\langle f_n, u \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $u \in \mathcal{H}$ konvergieren.

(2) Die Folge (f_n) *konvergiert schwach gegen* $f \in \mathcal{H}$, wenn
$$\langle f_n, u \rangle \to \langle f, u \rangle\,, \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$
Man schreibt dann $f_n \xrightarrow{\mathrm{w}} f$ oder $f_n \to f$ (schwach), $w - \lim_{n \to \infty} f_n = f$, $f_n \rightharpoonup f$.

Bemerkung 3.28.

(1) Schwache Konvergenz bedeutet "koordinatenweise Konvergenz" und ist äquivalent mit der Konvergenz von $(\ell(f_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ für alle $\ell \in \mathcal{H}^*$.

(2) Der schwache Limes ist eindeutig.

Theorem 3.29. *Schwach konvergente Folgen sind beschränkt.*

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem *Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit (Uniform Boundedness Principle)* in Verbindung mit der Isomorphie von $\mathcal{H}^{**}$ und $\mathcal{H}$. Wir wollen hier einen Spezialfall des Uniform Boundedness Principle beweisen, der genau zu unserer Anwendung passt. Ziel ist es, aus *punktweiser* Beschränktheit (plus Linearität) auf *gleichmäßige* Beschränktheit zu schließen.

Theorem 3.30. *Sei X ein vollständiger normierter Vektorraum und seien*

$$\varphi_n \colon X \to \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N},$$

lineare und stetige Abbildungen. Weiterhin gelte

$$\forall x \in X : \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)| < \infty.$$

Dann gibt es eine Zahl $C \geq 0$ mit $\|\varphi_n\| \leq C$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Angenommen die Folge $(\|\varphi_n\|)$ wäre nicht beschränkt. Wir konstruieren dann induktiv Folgen $(x_k) \subset X$ und $(n_k) \subset \mathbb{N}$ so, dass

$$\|x_k\| \leq 2^{-k} \min_{j<k} \frac{1}{1 + \|\varphi_{n_j}\|} = \frac{2^{-k}}{1 + \max_{1\leq j<k} \|\varphi_{n_j}\|} \tag{3.12}$$

und

$$|\varphi_{n_k}(x_k)| \geq k + \sum_{j=1}^{k-1} |\varphi_{n_k}(x_j)|. \tag{3.13}$$

Wie können wir (3.12) und (3.13) erfüllen? Wenn x_j und n_j für $j < k$ fest gewählt sind, so ist die rechte Seite von (3.12) eine positive Zahl α_k und nach Voraussetzung ist

$$C_j \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x_j)| < \infty, \quad j < k;$$

setze $\beta_k \coloneqq k + \sum_{j=1}^{k-1} C_j$. Wähle n_k so, dass $\|\varphi_{n_k}\| > \beta_k/\alpha_k$. Nach Definition der Norm eines linearen Funktionals gibt es dann ein $y = y_{n_k} \in X$ mit $\|y\| = 1$ und $|\varphi_{n_k}(y)| > \beta_k/\alpha_k$. Mit $x_{n_k} \coloneqq \alpha_k y$ gilt dann offensichtlich $|\varphi_{n_k}(x_k)| \geq \beta_k$ und $\|x_k\| \leq \alpha_k$.

Wir setzen nun

$$x \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} x_k;$$

wegen $\|x_k\| \leq 2^{-k}$ konvergiert die Reihe auf der rechten Seite. Weiter folgt aus (3.12), dass für $k > j$

$$|\varphi_{n_j}(x_k)| \leq \left\|\varphi_{n_j}\right\| \|x_k\| \leq \left\|\varphi_{n_j}\right\| 2^{-k} \frac{1}{1 + \left\|\varphi_{n_j}\right\|} \leq 2^{-k},$$

also $\sum_{k \geq j+1} |\varphi_{n_j}(x_k)| \leq 1$ oder

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} |\varphi_{n_k}(x_j)| \leq 1. \tag{3.14}$$

Damit ergibt sich für alle $k \in \mathbb{N}$ wegen (3.13) und (3.14)

$$\begin{aligned}
|\varphi_{n_k}(x)| &= \left|\varphi_{n_k}\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\right)\right| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{n_k}(x_j)\right| \\
&\geq |\varphi_{n_k}(x_k)| - \sum_{j=1}^{k-1} |\varphi_{n_k}(x_j)| - \sum_{j=k+1}^{\infty} |\varphi_{n_k}(x_j)| \\
&\geq k - 1,
\end{aligned}$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung $\sup\{|\varphi_k(x)|; k \in \mathbb{N}\} < \infty$ steht. $\square$

Beweis von Theorem 3.29. Sei $(u_n) \subset \mathcal{H}$ eine schwach konvergente Folge. Dann gibt es zu jedem $x \in \mathcal{H}$ ein $C_x \geq 0$ mit

$$|\langle u_n, x \rangle| \leq C_x, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daher erfüllen die linearen Funktionale ℓ_n, $n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$\ell_n(f) := \langle u_n, f \rangle, \quad f \in \mathcal{H},$$

die Voraussetzungen von Theorem 3.30. Folglich gibt es eine Konstante $c \geq 0$ mit $\|\ell_n\| \leq c$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und somit

$$\|u_n\| = \|\ell_n\| \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dies beendet unseren Beweis. $\square$

Theorem 3.31 (Schwache Folgenvollständigkeit des Hilbertraums). *Es sei $(f_n) \subset \mathcal{H}$ eine schwach konvergente Folge im Sinne von Definition 3.27(1). Dann gibt es ein $f \in \mathcal{H}$ mit*

$$f_n \xrightarrow{\mathrm{w}} f$$

im Sinne von Definition 3.27(2).

Beweis. Durch

$$\ell(v) := \lim_{n\to\infty} \langle v, f_n \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{H},$$

wird ein lineares Funktional auf $\mathcal{H}$ definiert. Mit der Schwarzschen Ungleichung und Theorem 3.29 haben wir

$$|\ell(v)| = \lim_{n\to\infty} |\langle v, f_n \rangle| \leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|\right) \|v\| \leq C \|v\|;$$

mithin ist ℓ beschränkt und somit stetig. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es ein $f \in \mathcal{H}$ mit

$$\ell(v) = \langle v, f \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Theorem 3.32. *Sei $(u_n) \subset \mathcal{H}$ und sei $u \in \mathcal{H}$. Dann gilt:*

(1) *Aus $u_n \to u$ folgt $u_n \xrightarrow{\text{w}} u$.*

(2) *Aus $u_n \xrightarrow{\text{w}} u$ folgt $\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|$.*

(3) *Aus $u_n \xrightarrow{\text{w}} u$ und $\|u\| \geq \limsup_{n\to\infty} \|u_n\|$ folgt $u_n \to u$.*

(4) *Sei $M = \overline{M}$ ein Unterraum von $\mathcal{H}$, $u \in \mathcal{H}$ und $(u_n) \subset M$ mit $u_n \xrightarrow{\text{w}} u$. Dann gilt $u \in M$.*

Beweis. Aufgabe 3.10.

Theorem 3.33. *Die abgeschlossene Einheitskugel im Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist* schwach folgenkompakt, *d.h. zu jeder Folge $(x_n) \subset \mathcal{H}$ mit $\|x_n\| \leq 1$ gibt es eine schwach konvergente Teilfolge.*

Beispiel 3.34. Sei $(x_k) \subset \mathcal{H}$ ein ONS. Dann gilt $x_k \xrightarrow{\text{w}} 0$, denn für alle $f \in \mathcal{H}$ ist nach der Besselschen Ungleichung $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle x_k, f \rangle|^2 < \infty$, mithin gilt für alle $f \in \mathcal{H}$

$$\langle x_k, f \rangle \to 0, \quad k \to \infty.$$

Aber es gibt keine norm-konvergente Teilfolge, da stets $\|x_k - x_j\|^2 = 2$, $j \neq k$, gilt.

Beweis von Theorem 3.33. Sei $\overline{B} := \{u \in \mathcal{H}; \|u\| \leq 1\}$ und sei $(x_n) \subset \overline{B}$. Dann ist

$$M := \overline{\operatorname{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}}$$

separabel oder endlich-dimensional. Wir verfolgen nur den separablen Fall weiter, da der endlich-dimensionale Fall durch den Satz von Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{C}^d$ abgedeckt wird. Sei $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine ONB von M. Die komplexe Zahlenfolge $(\langle x_n, e_1 \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach der Schwarzschen Ungleichung beschränkt; daher gibt es eine Teilfolge $\left(\left\langle x_n^{(1)}, e_1 \right\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset (\langle x_n, e_1 \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass die Folge $\left(\left\langle x_n^{(1)}, e_1 \right\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ konvergiert. Wir wählen für $k = 2, 3, \ldots$ sukzessive Teilfolgen

$$\left(x_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \left(x_n^{(k-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ldots \subset \left(x_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

so aus, dass die komplexen Zahlenfolgen $\left(\left\langle x_n^{(k)}, e_k\right\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Wir definieren dann die Entwicklungskoeffizienten des Grenzelements x bezüglich des ONS (e_k) durch

$$\alpha_k := \lim_{n\to\infty} \left\langle x_n^{(k)}, e_k\right\rangle, \quad k \in \mathbb{N},$$

wobei die Folge $\left(x_n^{(n)}\right)$ gemäß dem folgenden Schema *Diagonalfolge* genannt wird.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$\cdots$
$k=1$	$\boldsymbol{x_1^{(1)}}$	$x_2^{(1)}$	$x_3^{(1)}$	$x_4^{(1)}$	$\cdots$
$k=2$	$x_1^{(2)}$	$\boldsymbol{x_2^{(2)}}$	$x_3^{(2)}$	$x_4^{(2)}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\cdots$	$\boldsymbol{x_k^{(k)}}$	$\cdots$

Wir setzen

$$x := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, \tag{3.15}$$

und zeigen $x \in \overline{B}$ und $x_n^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{w}} x$. Zunächst wollen wir überlegen, dass die Reihe in (3.15) konvergiert. Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(x_n^{(N)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \left(x_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \forall 1 \leq k \leq N,$$

und somit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k|^2 &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left|\left\langle x_n^{(k)}, e_k\right\rangle\right|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left|\left\langle x_n^{(N)}, e_k\right\rangle\right|^2 \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|x_n^{(N)}\right\|^2 \\
&\leq 1,
\end{aligned}$$

wobei wir die Besselsche Ungleichung verwendet haben. Wegen $|\alpha_k|^2 \geq 0$ konvergiert die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k|^2$ und es ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \leq 1.$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{m\leq k\leq n} |\alpha_k|^2 < \varepsilon$ für alle $n \geq m \geq N_\varepsilon$, mithin auch

$$\left\|\sum_{k=m}^{n} \alpha_k e_k\right\|^2 = \sum_{k=m}^{n} |\alpha_k|^2 < \varepsilon.$$

Daraus folgt die Konvergenz der Reihe in (3.15) sowie die Abschätzung $\|x\| \leq 1$ bzw. $x \in \overline{B}$. Zur Vereinfachung der Notation sei nun $u_n := x_n^{(n)}$. Für $f \in M^\perp$ ist $\langle u_n, f\rangle = 0$ und $\langle x, f\rangle = 0$, also $\langle u_n, f\rangle \to \langle x, f\rangle$. Wegen $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ müssen wir noch $f \in M$ betrachten: Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} \eta_k e_k \right\| < \varepsilon, \quad \eta_k := \langle f, e_k\rangle .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |\langle u_n, f\rangle - \langle x, f\rangle| &= |\langle u_n - x, f\rangle| \\ &\leq \left| \left\langle u_n - x, \sum_{k=1}^{N} \eta_k e_k \right\rangle \right| + \left| \left\langle u_n - x, f - \sum_{k=1}^{N} \eta_k e_k \right\rangle \right| . \end{aligned}$$

Für den zweiten Term auf der rechten Seite haben wir die Abschätzung

$$\left| \left\langle u_n - x, f - \sum_{k=1}^{N} \eta_k e_k \right\rangle \right| \leq \|u_n - x\| \left\| f - \sum_{k=1}^{N} \eta_k e_k \right\| \leq 2\varepsilon.$$

Für den ersten Term gilt

$$\left\langle u_n - x, \sum_{k=1}^{N} \eta_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{N} \eta_k (\langle u_n, e_k\rangle - \alpha_k) \to 0,$$

da $\langle u_n, e_k\rangle \to \alpha_k = \langle x, e_k\rangle$, $n \to \infty$. Hierbei verwenden wir, dass

$$\left(x_n^{(n)}\right)_{n \geq k} \subset \left(x_n^{(k)}\right)_{n \in \mathbb{N}},$$

d.h. ab dem laufenden Index $n = k$ ist die Diagonalfolge eine Teilfolge von $\left(x_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Damit haben wir gezeigt, dass $\langle u_n, f\rangle \to \langle x, f\rangle$ für alle $f \in \mathcal{H}$. □

Lemma 3.35. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $D \subset \mathcal{H}$ eine dichte Teilmenge. Weiter sei $(u_n) \subset \mathcal{H}$ eine beschränkte Folge und es sei $u \in \mathcal{H}$. Dann gilt:*

$$u_n \xrightarrow{\text{w}} u \quad \Longleftrightarrow \quad \forall f \in D: \ \langle u_n, f\rangle \to \langle u, f\rangle .$$

Beweis. Aufgabe 3.11. □

Bemerkung 3.36. Lemma 3.35 wendet man häufig mit $D = \operatorname{span}\{x_k\}$ an, wenn $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine ONB von $\mathcal{H}$ ist. Für beschränkte Folgen (u_n) erhält man dann das folgende Kriterium:

$$u_n \xrightarrow{\text{w}} u \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}: \ \langle u_n, x_k\rangle \to \langle u, x_k\rangle , \quad n \to \infty.$$

Wir wollen den Begriff der schwachen Konvergenz noch etwas genauer untersuchen und erinnern an den Begriff der Metrik aus Bemerkung 2.11.

Theorem 3.37. *Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum mit der ONB $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und sei $\overline{B} = \{u \in \mathcal{H}; \|u\| \leq 1\}$.*

(1) *Durch*

$$d_w(f,g) := \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \left|\langle f-g, e_j\rangle\right|, \quad f,g \in \mathcal{H},$$

wird auf $\mathcal{H}$ eine Metrik erzeugt.

(2) *Für $(u_n) \subset \overline{B}$ und $u \in \overline{B}$ gilt:*

$$u_n \xrightarrow{\mathrm{w}} u \quad \Longleftrightarrow \quad d_w(u_n,u) \to 0.$$

Beweis. Aufgabe 3.12. □

Bemerkung 3.38. Die Einschränkung auf die Kugel $\overline{B}$ in Teil (2) ist wesentlich, vgl. Aufgabe 3.13.

3.4.1 Übungen

Aufgabe 3.10. Beweisen Sie Theorem 3.32.
Hinweis: Für Folgen $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ gilt: Aus $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\liminf a_n \leq \liminf b_n$. Weiter gilt $\liminf a_n \leq \limsup a_n$ und man hat Gleichheit mit $\lim a_n$, falls (a_n) konvergiert.

Aufgabe 3.11.

(a) Sei $D \subset \mathcal{H}$ eine dichte Teilmenge des Hilbertraums $\mathcal{H}$, sei $(u_n) \subset \mathcal{H}$ eine beschränkte Folge und sei $u \in \mathcal{H}$. Dann ist die schwache Konvergenz $u_n \xrightarrow{\mathrm{w}} u$ äquivalent zu

$$\langle u_n, f\rangle \to \langle u, f\rangle, \quad \forall f \in D.$$

(b) Man gebe ein Beispiel einer dichten Teilmenge $D \subset \mathcal{H}$ und einer unbeschränkten Folge $(u_n) \subset \mathcal{H}$ an mit $\langle u_n, f\rangle \to \langle u, f\rangle$, für alle $f \in D$.

Aufgabe 3.12. Beweisen Sie Theorem 3.37.
Hinweis: Für den Beweis von (2) verwende man Aufgabe 3.11.

Aufgabe 3.13. Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zeigen Sie, dass es keine Metrik

$$d\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to [0,\infty)$$

geben kann mit der Eigenschaft, dass die schwache Konvergenz in $\mathcal{H}$ äquivalent wäre zur Konvergenz bezüglich der Metrik d.
Hinweis: Theorem 3.29.

Kapitel 4

Beschränkte Operatoren im Hilbertraum

4.1 Beschränkte Operatoren

Definition 4.1. Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume. Eine lineare Abbildung

$$A\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$$

heißt ein *(linearer) Operator*. Ein Operator heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt mit

$$\|Ax\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\,\|x\|_{\mathcal{H}_1}\,, \quad \forall x \in \mathcal{H}_1. \tag{4.1}$$

Für einen beschränkten Operator A heißt das Infimum aller Konstanten C wie in (4.1) die *Norm von* A, in Zeichen $\|A\|$, und es gilt $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$.

Bemerkung 4.2. Ein lineares Funktional ℓ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist ein linearer Operator $\ell\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$. Wie im Falle linearer Funktionale zeigt man für lineare Operatoren A:

$$A \text{ ist stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ ist stetig bei } 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ ist beschränkt.}$$

Theorem 4.3. *Sei $A\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ wie in Definition 4.1. Dann gilt:*

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_{\mathcal{H}_2}\,; \|x\|_{\mathcal{H}_1} \leq 1\}. \tag{4.2}$$

Beweis. Zunächst überlegen wir, dass

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|<1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \tag{4.3}$$

gilt. Sei $B = \{x \in \mathcal{H}_1; \|x\| < 1\}$. Wegen

$$\|Ax\| = \|x\| \left\| A\frac{x}{\|x\|} \right\|, \quad x \neq 0, \tag{4.4}$$

ist $\sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\| \le \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|$ und wegen $\partial B \subset \overline{B}$ ist natürlich auch

$$\sup_{\|x\|=1}\|Ax\| \le \sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\|$$

erfüllt. Also gilt $\sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|$.

Wir zeigen noch, dass

$$\sup_{\|x\|=1}\|Ax\| = \sup_{\|x\|<1}\|Ax\|$$

gilt. Sei also $S \coloneqq \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|$. Dann gilt $\|Ax\| \le S$, für alle $x \in \mathcal{H}_1$ mit $\|x\| = 1$, und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $w \in \mathcal{H}_1$ mit $\|w\| = 1$ und $\|Aw\| > S - \varepsilon$. Für alle $y \in \mathcal{H}_1$ mit $\|y\| < 1$ gilt wegen (4.4) offenbar $\|Ay\| \le S$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Nach der Definition von S existiert ein $x_0 \in \mathcal{H}_1$ mit $\|x_0\| = 1$ und der Eigenschaft $\|Ax_0\| > S - \varepsilon/2$. Wir dürfen ferner $\|A\| > 0$ annehmen. Sei

$$y_0 \coloneqq x_0\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\|A\|}\right).$$

Dann gilt

$$\|Ay_0\| \ge \|Ax_0\| - \|A(y_0 - x_0)\| > S - \frac{\varepsilon}{2} - \|A\|\,\|x_0\|\,\frac{\varepsilon}{2\|A\|} = S - \varepsilon.$$

Mithin ist S die kleinste obere Schranke der Menge $\{\|Ay\|\,;\|y\| < 1\}$, in Zeichen $S = \sup_{\|y\|<1}\|Ay\|$.

Für $x \ne 0$ gilt

$$\|Ax\| = \|x\|\left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\| \le \|x\|\sup_{\|y\|=1}\|Ay\|.$$

Also muss $\|A\| \le \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|$ sein. Umgekehrt folgt aus der Definition des Infimums, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$\|Ax\| \le (\|A\| + \varepsilon)\,\|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{H}_1,$$

gilt. Folglich ist $\sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\| \le \|A\| + \varepsilon$. □

Bemerkung 4.4. Aus Gleichung (4.2) folgt für die Komposition der beschränkten Operatoren $A\colon \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3$ und $B\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, dass $AB\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_3$ beschränkt ist mit

$$\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|. \tag{4.5}$$

Wir stellen eine Reihe von Beispielen vor, auf die wir im Folgenden häufiger zurückkommen werden.

Beispiel 4.5. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und sei $I\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $x \mapsto x$, die Identität. Dann ist I ein beschränkter Operator mit $\|I\| = 1$.

Beispiel 4.6. In ℓ_2 betrachten wir den *Links-Shift*

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) \coloneqq (x_2, x_3, \ldots),$$

für alle Folgen $(x_k) \in \ell_2$. Dann ist S ein beschränkter Operator mit $\|S\| = 1$. Auch der *Rechts-Shift* $R\colon \ell_2 \to \ell_2$ definiert durch

$$R(x_1, x_2, \ldots) \coloneqq (0, x_1, x_2, \ldots)$$

ist ein beschränkter Operator mit der Norm 1.

Beispiel 4.7. Sei $M = \overline{M}$ ein Unterraum des Hilbertraums $\mathcal{H}$. Nach dem Projektionssatz können wir jedes $x \in \mathcal{H}$ eindeutig zerlegen in der Form

$$x = x_M + x_{M^\perp}$$

mit $x_M \in M$ und $x_{M^\perp} \in M^\perp$. Die Abbildung

$$P_M\colon x \mapsto x_M$$

ist linear und beschränkt mit $\|P_M\| = 1$, falls $M \neq \{0\}$.

Beispiel 4.8. Sei $\mathcal{H} = \ell_2$ und es sei eine beschränkte Folge $(m_k) \subset \mathbb{C}$ gegeben. Die Abbildung

$$A_m\colon \ell_2 \to \ell_2, \quad (x_k) \mapsto (m_k x_k)$$

ist ein beschränkter linearer Operator mit der Norm

$$\|A_m\| = \sup\{|m_k|; k \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Beispiel 4.9 (Integraloperatoren auf $\mathcal{H} = L_2(a, b)$). Für $-\infty < a < b < \infty$ sei $\mathcal{E} \coloneqq (C[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Dann ist $\mathcal{E}$ ein Prä-Hilbertraum; seine Vervollständigung ist $L_2(a, b)$ (diesen Hilbertraum hatten wir in Beispiel 2.20 als Vervollständigung von $C_c(a, b)$ erhalten). Weiter sei eine stetige Funktion

$$k\colon [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{C}$$

gegeben. Dann erzeugt k einen *Integraloperator*

$$K\colon C[a, b] \to C[a, b], \quad (Kf)(x) \coloneqq \int_a^b k(x, y) f(y)\,\mathrm{d}y;$$

die Funktion k heißt auch *Integralkern*. Man überegt sich leicht, dass K ein beschränkter Operator ist, dessen Norm durch

$$\|K\| \leq (b-a) \max\{|k(s,t)|; (s,t) \in [a,b]^2\}$$

abgeschätzt werden kann: Sei $\kappa := \max\{|k(s,t)|; (s,t) \in [a,b]^2\}$. Für $f \in \mathcal{E}$ gilt

$$\begin{aligned}
\|Kf\|^2 &= \int_a^b |(Kf)(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b \left| \int_a^b k(x,y) f(y) \,\mathrm{d}y \right|^2 \mathrm{d}x \\
&\leq \kappa^2 \int_a^b \left(\int_a^b |f(y)| \cdot 1 \,\mathrm{d}y \right)^2 \mathrm{d}x = \kappa^2 \int_a^b \langle |f|, 1 \rangle^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leq_{(2.2)} \kappa^2 \int_a^b \|f\|^2 \|1\|^2 \,\mathrm{d}x = \kappa^2 \|f\|^2 (b-a)^2.
\end{aligned}$$

Weiter besitzt K eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung zu einem beschränkten Operator $K\colon L_2(a,b) \to L_2(a,b)$; vgl. Aufgabe 4.1.

Beispiel 4.10 (Unendliche Matrizen). Sei $\mathcal{H} = \ell_2$ mit der Standard-ONB (e_j).

(1) Zu jedem beschränkten Operator $A\colon \ell_2 \to \ell_2$ gehört die unendliche Matrix

$$a := (a_{ij}), \quad a_{ij} := \langle Ae_j, e_i \rangle .$$

Für jedes $x \in \ell_2$ gilt dann

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j, \quad i \in \mathbb{N};$$

die Reihe konvergiert, denn nach der Besselschen Ungleichung sind die Zeilen und Spalten der Matrix a Elemente von ℓ_2. (Zum Beweis für die Spalten benötigt man den zu A adjungierten Operator A^*, den wir im nächsten Unterabschnitt einführen.) Aus der Beschränktheit von $A\colon \ell_2 \to \ell_2$ (bzw. A^*) erhält man zwei *notwendige* Bedingungen an die Matrix a, nämlich

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \leq \alpha < \infty, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \tag{4.6}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \leq \beta < \infty, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Eine Matrix mit (4.6) und (4.7) wird i. Allg. allerdings *keinen* beschränkten Operator $\ell_2 \to \ell_2$ erzeugen.

(2) Eine *hinreichende* Bedingung dafür, dass eine gegebene unendliche Matrix von einem beschränkten Operator stammt: Sei (α_{ij}) eine unendliche Matrix mit

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 < \infty.$$

Dann gibt es einen beschränkten Operator $A\colon \ell_2 \to \ell_2$ mit

$$\langle Ae_j, e_i\rangle = \alpha_{ij}, \quad \forall i,j \in \mathbb{N},$$

vgl. Aufgabe 4.4.

(3) *Das Lemma von Schur (ohne Beweis).* Seien $a_{ij} \geq 0$, $p_i > 0$ und $q_j > 0$, für $i, j \in \mathbb{N}$, und es gebe $\beta, \gamma > 0$ mit

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} p_i \leq \beta q_j, \quad j \in \mathbb{N};$$
$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} q_j \leq \gamma p_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Dann gibt es einen beschränkten Operator $A\colon \ell_2 \to \ell_2$ mit $\langle Ae_j, e_i\rangle = a_{ij}, \forall i,j \in \mathbb{N}$.

(4) *Beispiel: Die Hilbert-Matrix.*
Sei $a_{ij} := \frac{1}{i+j+1}$, für $i, j \in \mathbb{N}_0$. Dann erzeugt die Hilbert-Matrix (a_{ij}) einen beschränkten Operator in ℓ_2. Dies folgt durch Anwenden des Lemmas von Schur.

(5) Eine wichtige Klasse von unendlichen Matrizen bilden die *Tridiagonal-Matrizen* oder *Jacobi-Matrizen*, bei denen nur die Diagonale und die beiden Nebendiagonalen besetzt sind; alle anderen Matrixelemente sind Null. Jacobi-Matrizen sind in der Spektraltheorie intensiv untersucht worden, insbesondere auch dann, wenn die Koeffizienten zufällig sind. Ein Beispiel findet man in Aufgabe 4.6.

Häufig kennt man einen beschränkten Operator zunächst nur auf einem dichten Teilraum des Hilbertraums. Möchte man ihn auf den ganzen Raum fortsetzen, ist das sog. BLT-Theorem ein häufig verwendetes Hilfsmittel.

Theorem 4.11 (BLT-Theorem). *Sei $D \subset \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum des Hilbertraums $\mathcal{H}$ und sei $A\colon D \to \mathcal{H}$ ein beschränkter Operator. Dann gibt es genau einen beschränkten Operator $B\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit $B\restriction_D = A$. Weiter ist $\|B\| = \|A\|$.*

Beweis. Aufgabe 4.1.

Bemerkung 4.12. Man schreibt auch $\overline{A} := B$ für die Fortsetzung von A. Die Bezeichnung "BLT" für Bounded Linear Transformation wird in [23] eingeführt.

4.1.1 Übungen

Aufgabe 4.1. Beweisen Sie Theorem 4.11.

Aufgabe 4.2. Man führe die Annahme zum Widerspruch, die Kommutatorrelation

$$AB - BA = -\mathrm{i}I$$

könne für zwei beschränkte Operatoren $A, B\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ bestehen.
Anleitung: Man leite aus der Annahme $AB - BA = -\mathrm{i}I$ zunächst für alle $n \in \mathbb{N}$ die Relation $AB^n - B^n A = -\mathrm{i}nB^{n-1}$ her.

4.2 Der adjungierte Operator

Sei $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter Operator. Wir suchen einen beschränkten Operator $A^*\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit der Eigenschaft

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \,, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}. \tag{4.8}$$

Der Operator A^* mit der Eigenschaft (4.8) heißt *der zu A adjungierte Operator*. Wir zeigen zunächst die Existenz und Eindeutigkeit des Adjungierten.

Theorem 4.13. *Sei $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ beschränkt. Dann gibt es genau einen beschränkten Operator A^* mit* (4.8). *Weiter gilt $\|A^*\| \leq \|A\|$.*

Beweis. Für festes $y \in \mathcal{H}$ wird durch

$$\ell_y(x) := \langle Ax, y \rangle \,, \quad \forall x \in \mathcal{H},$$

ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{H}$ definiert, denn nach der Schwarzschen Ungleichung gilt

$$|\ell_y(x)| \leq \|Ax\| \, \|y\| \leq \|A\| \, \|x\| \, \|y\| \,,$$

mithin $\|\ell_y\| \leq \|A\| \, \|y\|$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert genau ein $y^* \in \mathcal{H}$ mit

$$\ell_y(x) = \langle x, y^* \rangle \,, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Wir setzen $A^* y := y^*$. Die Abbildung $A^*\colon y \mapsto y^*$ ist linear, denn für $x, y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\langle x, A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) - \alpha A^* y_1 - \beta A^* y_2 \rangle \\
&\qquad = \langle x, A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle - \langle x, \alpha A^* y_1 \rangle - \langle x, \beta A^* y_2 \rangle \\
&\qquad = \overline{\alpha} \, \langle Ax, y_1 \rangle + \overline{\beta} \, \langle Ax, y_2 \rangle - \overline{\alpha} \, \langle Ax, y_1 \rangle - \overline{\beta} \, \langle Ax, y_2 \rangle \\
&\qquad = 0.
\end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\|A^* y\| = \|y^*\| = \|\ell_y\| \leq \|A\| \, \|y\|$$

und daher muss $\|A^*\| \leq \|A\|$ gelten. □

Theorem 4.14. *Seien $A, B\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ beschränkte Operatoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$ und sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

(1) $(A+B)^* = A^* + B^*$ *und* $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$,

(2) $(AB)^* = B^* A^*$,

(3) $A^{**} = A$,

(4) *Sei A invertierbar und A^{-1} sei ebenfalls beschränkt. Dann ist auch A^* invertierbar und es gilt $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Beweis. Aufgabe 4.5. □

Theorem 4.15. *Sei $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ beschränkt. Dann gilt $\|A^*\| = \|A\| = \|A^*A\|^{1/2}$.*

Beweis. Für $x \in \mathcal{H}$ mit $\|x\| = 1$ gilt

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle \leq \|A^*Ax\| \, \|x\| \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\| \, \|A\| ,$$

nach (4.5). Es folgt

$$\|A\|^2 = \left(\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \right)^2 = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|^2 \leq \|A^*\| \, \|A\| ,$$

also $\|A\| \leq \|A^*\|$. Die Behauptung folgt nun mit Theorem 4.13. □

Bemerkung 4.16. Wegen $A^{**} = A$ gilt mit Theorem 4.13

$$\|A\| = \|A^{**}\| \leq \|A^*\| .$$

Dies ergibt einen besonders einfachen Beweis für $\|A^*\| = \|A\|$.

Beispiel 4.17. Wir knüpfen an die Beispiele 4.5 – 4.10 an.

(1) Für den Links-Shift-Operator $S\colon \ell_2 \to \ell_2$ gilt

$$S^*(y_1, y_2, \ldots) = (0, y_1, y_2, \ldots) = R(y_1, y_2, \ldots), \tag{4.9}$$

mit dem Rechts-Shift $R\colon \ell_2 \to \ell_2$, für alle Folgen $y = (y_j) \in \ell_2$. Für $x = (x_j) \in \ell_2$ ist nämlich

$$\langle Sx, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_{j+1}\overline{y}_j = \sum_{j=2}^{\infty} x_j \overline{y}_{j-1},$$

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, S^*y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{(S^*y)_j},$$

und wenn wir $x = e_k$, $k \in \mathbb{N}$, wählen, folgt (4.9) ("Koeffizientenvergleich").

(2) Für die Operatoren P_M gilt $P_M = P_M^*$; dies beweisen wir im Kapitel über Projektionen.

(3) Der Operator A_m^* bewirkt die Multiplikation mit der Folge $\overline{m} = (\overline{m}_k)$.

(4) Der Operator K^* ist der Integraloperator mit dem Kern $\overline{k(y,x)}$.

(5) Sei $A\colon \ell_2 \to \ell_2$ beschränkt und sei (a_{ij}) die zu A gehörende unendliche Matrix. Zum adjungierten Operator A^* gehört dann die Matrix $(\overline{a}_{ji})$.

Definition 4.18. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Wir bezeichnen den Vektorraum der beschränkten linearen Operatoren $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Mit der Norm

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|\,;\|x\| \le 1\}$$

ist $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein normierter Vektorraum.

Theorem 4.19. *Der Raum $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist vollständig, also ein Banachraum.*

Beweis. Sei (A_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, d.h.

$$\|A_n - A_m\| \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Für alle $f \in \mathcal{H}$ ist dann $(A_n f) \subset \mathcal{H}$ eine Cauchyfolge. Weil $\mathcal{H}$ vollständig ist, existiert ein $g = g_f$ mit $A_n f \to g$. Wir definieren einen Operator $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ durch

$$Af \coloneqq g_f, \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

und zeigen, dass $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\|A_n - A\| \to 0$ gilt.

(1) Offenbar ist A linear.

(2) Weil $(A_n) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine Cauchyfolge ist, ist $(\|A_n\|)$ eine beschränkte Folge. Denn sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\|A_{n_0} - A_n\| \le 1$ für alle $n \ge n_0$. Dann folgt $\|A_n\| \le \|A_{n_0}\| + \|A_n - A_{n_0}\| \le \|A_{n_0}\| + 1$ für $n \ge n_0$. Sei nun

$$C \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|\,.$$

Für $f \in \mathcal{H}$ folgt

$$\|Af\| = \left\|\lim_{n\to\infty} A_n f\right\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n f\| \le \limsup_{n\to\infty} \|A_n\|\,\|f\| \le C\,\|f\|\,,$$

also $\|A\| \le C < \infty$.

(3) Zu $\varepsilon > 0$ finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$, für alle $n, m \ge N$. Dann gilt für ein beliebiges $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}\|(A_n - A)f\| &= \left\|A_n f - \lim_{m\to\infty} A_m f\right\| = \lim_{m\to\infty} \|A_n f - A_m f\| \\ &\le \limsup_{m\to\infty} \|A_n - A_m\|\,\|f\| \le \varepsilon\,\|f\|\,, \quad \forall n \ge N,\end{aligned}$$

also $\|A_n - A\| \le \varepsilon$ für alle $n \ge N$. $\square$

Bemerkung 4.20. Der Raum $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ hat noch mehr Struktur: Genauer ist $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine (nicht-kommutative) Banach-Algebra mit Eins und Involution (nämlich der Abbildung $A \mapsto A^*$; eine Algebra wegen $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$). Für separables $\mathcal{H}$ (also nicht endlich-dimensional) ist $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *nicht* separabel.

Besonders wichtig in Theorie und Anwendungen sind die symmetrischen Operatoren.

Definition 4.21. Ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt *symmetrisch* (oder *selbstadjungiert*), wenn $A^* = A$ gilt, und *normal*, falls $A^*A = AA^*$ gilt.

Wegen Bemerkung 2.5, (1) gilt $A = A^*$ genau dann, wenn $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$, für alle $x \in \mathcal{H}$.

Beispiel 4.22. Wir knüpfen wieder an einige der Beispiele 4.5 – 4.10 an.

(1) Für symmetrisches A und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist αA symmetrisch, während αA für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ nur normal ist.

(2) Die Multiplikation $m \colon \ell_2 \to \ell_2$ mit einer beschränkten Folge $m = (m_k)$ ist normal, und symmetrisch genau dann, wenn alle m_k reell sind.

(3) Der Links-Shift $S \colon \ell_2 \to \ell_2$ ist nicht normal.

(4) Der Integraloperator K mit Kern $k(s,t)$ ist genau dann symmetrisch, wenn $k(t,s) = \overline{k(s,t)}$ für alle s, t gilt.

Theorem 4.23. *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ symmetrisch. Dann gilt*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} | \langle Ax, x \rangle |$$

Beweis. Aufgabe 4.7. □

Für beschränktes $A \colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ seien

$$N(A) := \{x \in \mathcal{H}_1; Ax = 0\} \quad \text{und} \quad R(A) = \{Ax; x \in \mathcal{H}_1\}$$

der Kern und das Bild von A.

Lemma 4.24. *Für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt*

$$R(A)^\perp = N(A^*), \quad R(A^*)^\perp = N(A), \quad N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}, \quad N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}.$$

Beweis. Wegen $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ gilt offenbar

$$\begin{aligned} y \in N(A^*) \quad &\iff \quad \forall x \in \mathcal{H} : \langle x, A^*y \rangle = 0 \quad \iff \quad \forall x \in \mathcal{H} : \langle Ax, y \rangle = 0 \\ &\iff \quad y \perp R(A). \end{aligned}$$

Dies beweist die erste Aussage. Die zweite folgt, wenn wir A durch A^* ersetzen, die dritte und vierte ergeben sich durch Anwendung von $\perp$ auf die erste und die zweite Gleichung. □

Bemerkung 4.25. Für symmetrisches $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ vereinfacht sich Lemma 4.24 zu

$$\overline{R(A)} = N(A)^\perp, \quad R(A)^\perp = N(A).$$

4.2.1 Übungen

Aufgabe 4.3. Es sei $\mathcal{M}_n := \mathbb{C}^{n\times n}$ die Menge aller komplexen $n \times n$-Matrizen. Für $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ sei $\overline{A} = (\overline{a_{ji}})$ die zu A *adjungierte Matrix* und

$$\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

die *Spur von A*.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(AB^*), \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_n,$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{M}_n$ erzeugt wird.

(b) Beweisen Sie die Ungleichung

$$|\operatorname{tr}(AB^*)|^2 \le \operatorname{tr}(AA^*)\operatorname{tr}(BB^*), \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_n.$$

Aufgabe 4.4. Sei (e_n) die Standard-ONB im Folgenraum ℓ_2.

(a) Sei $A\colon \ell_2 \to \ell_2$ ein beschränkter Operator und $a_{ij} := \langle Ae_j, e_i\rangle$, $i, j \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^\infty |a_{ij}|^2 < \infty$ und $\sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^\infty |a_{ij}|^2 < \infty$ gilt (*Hinweis:* Theorem 3.21). Weiter gilt $(Ax)_i = \sum_{j=1}^\infty a_{ij}x_j$, $i \in \mathbb{N}$, für alle $x \in \ell_2$.

(b) Seien $A, B\colon \ell_2 \to \ell_2$ beschränkte Operatoren und sei $C = AB$. Nach (a) können wir den Operatoren A, B, C die Matrizen a, b, c zuordnen. Man zeige, dass $c = ab$ gilt.

(c) Sei (α_{ij}) eine unendliche Matrix mit $\sum_{i,j=1}^\infty |\alpha_{ij}|^2 < \infty$. Dann existiert ein beschränkter Operator $A\colon \ell_2 \to \ell_2$ mit $\langle Ae_j, e_i\rangle = \alpha_{ij}$.

Aufgabe 4.5. Beweisen Sie Theorem 4.14.

Aufgabe 4.6. Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Wir nennen einen Vektor $f \in \mathcal{H}$ *zyklisch für A*, falls $\operatorname{span}\{f, Af, A^2f, \ldots\}$ dicht in $\mathcal{H}$ ist. Sei f ein zyklischer Vektor für A und sei $(e_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ die ONB von $\mathcal{H}$, die aus der Folge $(A^k f)_{k\in\mathbb{N}_0}$ nach dem Gram-Schmidt-Verfahren erzeugt wurde. Zu A gehört dann die Matrix $a = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_{ij} = \langle Ae_i, e_j\rangle$.
Man zeige: Wenn A symmetrisch ist, dann ist a eine symmetrische Tridiagonalmatrix mit positiven Koeffizienten in der Nebendiagonalen, d.h. $a_{ij} = 0$, falls $j \ge i + 2$, $a_{ij} > 0$ für $j = i + 1$, und $a_{ij} = a_{ji}$.

Aufgabe 4.7.

(a) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ symmetrisch und nicht-negativ, d.h. $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Dann gilt
$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle \,.$$
Hinweis: Man wende die Schwarzsche Ungleichung an auf
$$\|A\| = \sup_{\|f\|\leq 1} \sup_{\|g\|\leq 1} |\, \langle Af, g\rangle \,|.$$

(b) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ symmetrisch. Dann gilt:
$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\, \langle Ax, x\rangle \,|.$$
Hinweis: Teil (b) folgt nicht aus Teil (a). Zum Beweis von (b) schreibe man $\|Af\|^2 = \langle Af, Af\rangle = \left\langle A(\lambda f), \frac{1}{\lambda} Af\right\rangle$, für $\lambda > 0$, und wende die Polarisierungsidentität an.

4.3 Projektionen

Projektionen liefern die Möglichkeit, abgeschlossene Teilräume eines Hilbertraums durch lineare Operatoren eindeutig zu beschreiben, vgl. Beispiel 4.7.

Definition 4.26. Ein beschränkter Operator $P\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit $P^2 = P$ heißt *Projektion*, und *Orthogonalprojektion*, falls
$$P^2 = P = P^*,$$
d.h. wenn P symmetrisch und idempotent ist. Im weiteren Verlauf soll aber Projektion stets Orthogonalprojektion bedeuten.

Lemma 4.27. *Für $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $P^2 = P = P^*$ gilt:*

(1) *Das Bild $R(P)$ ist abgeschlossen.*

(2) *Es ist $Px = 0$ genau dann, wenn $x \perp R(P)$.*

(3) *Es ist $Px = x$ genau dann, wenn $x \in R(P)$.*

Beweis. Aufgabe 4.8.

Korollar 4.28. *Die Beschreibung von Projektionen in Beispiel 4.7 ist konsistent mit Definition 4.26. Genauer gilt für $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$:*
$$P^2 = P = P^* \quad \Longleftrightarrow \quad P = P_M \text{ mit } M := R(P).$$

Beweis.
"$\Longrightarrow$": Sei $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $P^2 = P = P^*$ und sei $M := R(P)$. Nach Lemma 4.27 ist $M = \overline{M}$. Nach dem Projektionssatz besitzt jedes $x \in \mathcal{H}$ eine eindeutige Zerlegung $x = x_M + x_{M^\perp}$ mit $x_M \in M$ und $x_{M^\perp} \in M^\perp$. Sei P_M der lineare Operator, der x auf x_M abbildet. Nach Lemma 4.27 gilt dann

$$\begin{aligned} P_M x &= x = Px, \quad \forall x \in M, \\ P_M x &= 0 = Px, \quad \forall x \in M^\perp, \end{aligned}$$

also $P = P_M$.
"$\Longleftarrow$": Sei umgekehrt $M = \overline{M} \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum und sei $P_M : x \mapsto x_M$ wie oben. Wir zeigen, dass P_M eine Projektion ist mit $R(P_M) = M$. Wegen $P_M x = x_M$ und $P_M x_M = x_M$ ist

$$P_M^2 x = P_M(P_M x) = P_M x_M = x_M = P_M x,$$

also $P_M^2 = P_M$. Für $x, y \in \mathcal{H}$ gilt weiter

$$\begin{aligned} \langle P_M x, y \rangle &= \langle P_M x, P_M y + y - P_M y \rangle \\ &= \langle P_M x, P_M y \rangle \ \text{ (da } y - P_M y \in M^\perp) \\ &= \langle x + P_M x - x, P_M y \rangle \\ &= \langle x, P_M y \rangle \ \text{ (da } x - P_M x \in M^\perp), \end{aligned}$$

also $P_M^2 = P_M = P_M^*$. □

Bemerkung 4.29. Sei $P^2 = P = P^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|P\| = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad P = 0, \\ \|P\| = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad P \neq 0. \end{aligned}$$

Weiter ist $P \geq 0$, d.h. $\langle Px, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$.

Definition 4.30. Seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ symmetrisch. Wir schreiben $A \leq B$, falls

$$\langle Ax, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Lemma 4.31. *Für zwei Projektionen P und Q gilt*

$$P \leq Q \quad \Longleftrightarrow \quad R(P) \subset R(Q) \quad \Longleftrightarrow \quad PQ = QP = P.$$

Beweis. Aufgabe 4.9. □

Beispiel 4.32 (Wahrscheinlichkeitsdichte). Ein wichtiges Beispiel für Projektionen in der Quantenmechanik: Für $G \subset \mathbb{R}^d$ offen betrachten wir den Hilbertraum

$L_2(G)$, den man durch Vervollständigung des Prä-Hilbertraums $(C_c(G), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_G f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

erhält. Für messbares $\Omega \subset G$ (etwa Ω offen oder abgeschlossen) sei $\chi_\Omega(x) = 1$ für $x \in \Omega$ und $\chi_\Omega(x) = 0$ sonst. Dann ist

$$f \mapsto \chi_\Omega f, \quad f \in L_2(G),$$

eine Projektion. Ist $\|f\| = 1$, so interpretiert man $|f(x)|^2$ in der Quantenmechanik als Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\|\chi_\Omega f\|^2 = \int_\Omega |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, ein quantenmechanisches Teilchen in Ω anzutreffen; typischerweise wäre hier $G = \mathbb{R}^3$.

4.3.1 Übungen

Aufgabe 4.8. Beweisen Sie Lemma 4.27.

Aufgabe 4.9.

(a) Seien $A \in \mathcal{L}(H)$ symmetrisch und $M \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Teilraum mit zugehöriger Orthogonalprojektion P_M. Dann gilt:

$$AM \subset M \quad \Longleftrightarrow \quad AM^\perp \subset M^\perp \quad \Longleftrightarrow \quad AP_M = P_M A.$$

(b) Beweisen Sie Lemma 4.31.

Aufgabe 4.10. Sei $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unitär (d.h. $R(U) = \mathcal{H}$ und $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{H}$) und es sei P die Orthogonalprojektion auf den Unterraum

$$N(U - I) = \{x \in \mathcal{H}; Ux = x\},$$

den Kern von $U - I$; dabei ist I die Identität auf $\mathcal{H}$, $Ix = x$.
Dann gilt für alle $f \in \mathcal{H}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} U^k f = Pf.$$

Anleitung: Man gehe in den folgenden Schritten vor:

(a) $Uf = f \Longleftrightarrow U^* f = f$.

(b) Für $f \in R(U - I)$ gilt $n^{-1} \sum_{k=0}^{n} U^k f \to 0$.

(c) $Pf = 0 \Longleftrightarrow f \in \overline{R(U - I)}$.

(d) Für $f \in N(U - I)$ gilt $n^{-1} \sum_{k=0}^{n} U^k f \to f$.

4.4 Kompakte Operatoren

Die einfachste Klasse von Operatoren bilden die Operatoren mit *endlichem Rang*,

$$Af = \sum_{j=1}^{N} \langle f, x_j \rangle \, y_j, \quad f \in \mathcal{H},$$

mit $N \in \mathbb{N}$ und fest gewählten $x_j, y_j \in \mathcal{H}$, $j = 1, \dots, N$; dabei brauchen die x_j, y_j nicht orthonormiert zu sein. Kompakte Operatoren sind Limites von Operatoren mit endlichem Rang in $(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$. Unsere Ausgangsdefinition sieht aber ganz anders aus.

Definition 4.33. Ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt *kompakt* (oder *vollstetig*), wenn es zu jeder beschränkten Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ gibt mit $(Af_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ (stark) konvergent.

Bemerkung 4.34. Die Voraussetzung, dass A beschränkt ist, ist eigentlich überflüssig: Man kann zeigen, dass A genau dann kompakt ist, wenn die Menge

$$M := A(\{x \in \mathcal{H}; \|x\| \le 1\}) = \{Ax; \|x\| \le 1\} \subset \mathcal{H}$$

präkompakt ist (d.h., wenn $\overline{M}$ kompakt ist), siehe etwa [23, S. 97ff. und S. 199]. Jede präkompakte Teilmenge Y eines vollständigen metrischen Raums X ist beschränkt, denn die Kugeln $\{B_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sind eine offene Überdeckung von $\overline{Y}$, zu der man eine endliche Teilüberdeckung finden kann. Folglich existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $Y \subset B_{n_0}(0)$. Weil M als präkompakte Menge beschränkt ist, muss $\sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| < \infty$ sein. Mithin ist ein kompakter Operator A automatisch stetig.

Theorem 4.35. *Ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist genau dann kompakt, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:*

$$f_n \xrightarrow{\mathrm{w}} f \quad \Longrightarrow \quad Af_n \to Af \ \textit{(stark)}. \tag{4.10}$$

Beweis.
"$\Longrightarrow$": Es sei A kompakt und $(f_n) \subset \mathcal{H}$ mit $f_n \xrightarrow{\mathrm{w}} f$. Zu zeigen ist die starke Konvergenz $Af_n \to Af$. Angenommen, (Af_n) konvergiert nicht gegen Af. Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (f_n)$ und $\varepsilon_0 > 0$ mit

$$\left\| Af_{n_j} - Af \right\| \ge \varepsilon_0, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{4.11}$$

Weil A kompakt ist, existieren eine weitere Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ und ein $g \in \mathcal{H}$ mit

$$Af_{n_k} \to g, \quad k \to \infty. \tag{4.12}$$

Andererseits gilt für alle $x \in \mathcal{H}$

$$\langle Af_n, x \rangle = \langle f_n, A^*x \rangle \to \langle f, A^*x \rangle = \langle Af, x \rangle ,$$

da $f_n \xrightarrow{\text{w}} f$. Also muss $g = Af$ sein, oder, mit (4.12),

$$Af_{n_k} \to Af, \quad k \to \infty,$$

im Widerspruch zu (4.11).
"$\Longleftarrow$": Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ eine beschränkte Folge. Nach Theorem 3.33 gibt es eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $f \in \mathcal{H}$ mit $f_{n_j} \xrightarrow{\text{w}} f$, $j \to \infty$. Mit (4.10) folgt $Af_{n_j} \to Af$. Also ist A nach Definition 4.33 kompakt. □

Beispiel 4.36. Wir verwenden die Notation aus den Beispielen 4.6, 4.8 und 4.9.

(1) Der Links-Shift S ist *nicht* kompakt. Hingegen ist der gewichtete Links-Shift $S_w \colon \ell_2 \to \ell_2$,
$$S_w x := (w_2 x_2, w_3 x_3, \ldots, w_k x_k, \ldots)$$
genau dann kompakt, wenn (w_k) eine Nullfolge ist; vgl. Aufgabe 5.2.

(2) Der Multiplikationsoperator $m \colon \ell_2 \to \ell_2$ mit $\|m\|_\infty := \sup\{|m_k|; k \in \mathbb{N}\} < \infty$ ist genau dann kompakt, wenn $m_k \to 0$ gilt.

(3) Der Integraloperator
$$Kf = \int_a^b k(\cdot, s) f(s) \,\mathrm{d}s$$
im Prä-Hilbertraum $\mathcal{E} = (C[a,b], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit stetigem Kern $k(t,s)$ ist kompakt. Dies folgt aus dem Satz von Arzelà-Ascoli aus der reellen Analysis.

Definition 4.37. Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall.

(1) Eine Menge $M \subset C[a,b]$ heißt *gleichgradig (gleichmäßig) stetig (engl.: equicontinuous)*, wenn gilt
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall g \in M: \quad |x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |g(x) - g(y)| < \varepsilon,$$
d.h. zu gegebenem $\varepsilon > 0$ kann man ein $\delta > 0$ unabhängig von den $g \in M$ mit der o.g. Eigenschaft finden.

(2) Eine Menge $M \subset C[a,b]$ heißt *gleichmäßig beschränkt*, wenn es ein $C > 0$ mit der Eigenschaft
$$\|g\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |g(x)| \le C, \quad \forall g \in M,$$
gibt.

Theorem 4.38 (Arzelà-Ascoli). *Sei $M \subset C[a,b]$ gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt. Dann gibt es zu jeder Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ eine Teilfolge $(g_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ und ein $g \in C[a,b]$ mit*
$$\left\|g - g_{n_j}\right\|_\infty \to 0, \quad j \to \infty.$$

Der Satz von Arzelà-Ascoli kann auf Integraloperatoren K wie in Beispiel 4.9 angewendet werden; siehe auch Beispiel 4.36:
Sei $(f_n) \subset \mathcal{E}$ mit $\|f_n\|^2 = \int_a^b |f_n(t)|^2 \,\mathrm{d}t \leq 1$. Man rechnet leicht nach, dass die Menge $\{Kf_n; n \in \mathbb{N}\}$ die Voraussetzungen von Theorem 4.38 erfüllt: In der Tat gilt

$$\begin{aligned} |(Kf_n)(t)| &\leq \int_a^b |k(t,s)||f_n(s)| \,\mathrm{d}s \\ &\leq \left(\int_a^b |k(t,s)|^2 \,\mathrm{d}s\right)^{1/2} \left(\int_a^b |f_n(s)|^2 \,\mathrm{d}s\right)^{1/2} \\ &\leq (b-a)^{1/2} \max_{(t,s)\in[a,b]^2} |k(t,s)|. \end{aligned}$$

Die gleichgradige Stetigkeit zeigt man ähnlich. Nach Theorem 4.38 existieren daher eine Teilfolge $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ und ein $g \in C[a,b]$ mit

$$\max_{a \leq t \leq b} |(Kf_{n_j})(t) - g(t)| \to 0, \quad j \to \infty.$$

Also gilt auch $\left\|Kf_{n_j} - g\right\| \to 0$ für $j \to \infty$ und K ist kompakt.

Lemma 4.39. *Seien $A, A_n, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(1) *A kompakt $\Longrightarrow$ λA kompakt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.*

(2) *A, B kompakt $\Longrightarrow$ $A + B$ kompakt.*

(3) *A kompakt $\Longrightarrow$ AB und BA kompakt.*

(4) *A kompakt $\Longleftrightarrow$ A^* kompakt $\Longleftrightarrow$ A^*A kompakt.*

(5) *A_n kompakt und $\|A - A_n\| \to 0 \Longrightarrow A$ kompakt.*

Beweis. Aufgabe 4.11. □

4.4.1 Übungen

Aufgabe 4.11. Beweisen Sie Lemma 4.39.
Hinweis: Man überlege für (4) zunächst, dass aus $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt und $u_n \xrightarrow{\mathrm{w}} u$ bereits $\langle Au_n, u_n\rangle \to \langle Au, u\rangle$ folgt.

Kapitel 5

Der Spektralsatz für kompakte Operatoren im Hilbertraum

5.1 Die Spektraldarstellung kompakter Operatoren

Wir beginnen mit den Eigenwerten und Eigenvektoren eines kompakten, symmetrischen Operators.

Definition 5.1. Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt ein *Eigenwert von* A, wenn es einen Vektor $x \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$ gibt mit

$$Ax = \lambda x.$$

Der Vektor x heißt dann *Eigenvektor von* A *zum Eigenwert* λ. Der Vektorraum $N(A - \lambda I)$ heißt der *Eigenraum von* A *zum Eigenwert* λ,

$$P_{\{\lambda\}} \coloneqq P_{N(A-\lambda I)}$$

die zu λ gehörende *Eigenprojektion.*

Lemma 5.2. *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt und sei $(u_n) \subset \mathcal{H}$ mit $u_n \stackrel{\mathrm{w}}{\longrightarrow} u$ für ein $u \in \mathcal{H}$. Dann gilt*

$$\langle Au_n, u_n \rangle \to \langle Au, u \rangle\,, \quad n \to \infty.$$

Beweis. Es ist

$$|\,\langle Au_n, u_n \rangle - \langle Au, u \rangle\,| \leq |\,\langle Au, u - u_n \rangle\,| + |\,\langle Au - Au_n, u_n \rangle\,|.$$

Wegen $u_n \stackrel{\mathrm{w}}{\longrightarrow} u$ konvergiert der erste Term auf der rechten Seite gegen Null. Wegen Theorem 4.35 ist $\|Au_n - Au\| \to 0$ und daher konvergiert auch der zweite Term gegen Null. $\square$

Wir betrachten im folgenden kompakte, symmetrische Operatoren.

Proposition 5.3. *Sei $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt und es sei*

$$\lambda := \sup_{\|x\| \leq 1} \langle Ax, x \rangle > 0.$$

Dann ist λ ein Eigenwert von A, d.h. es gibt ein $f \in \mathcal{H} \backslash \{0\}$ mit $Af = \lambda f$.

Beweis.

(1) Nach Definition des Supremums existiert eine Folge $(f_n) \subset \mathcal{H}$ mit $\|f_n\| \leq 1$ und

$$\langle Af_n, f_n \rangle \to \lambda, \quad n \to \infty.$$

Nach Theorem 3.33 gibt es ein $f \in \mathcal{H}$ und eine Teilfolge $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ mit $f_{n_j} \xrightarrow{\mathrm{w}} f$, $j \to \infty$. Insbesondere ist dann $\|f\| \leq 1$. Wir zeigen, dass $\langle Af, f \rangle = \lambda$ und $\|f\| = 1$ gilt. Aus $f_{n_j} \xrightarrow{\mathrm{w}} f$ und mit der Kompaktheit von A folgt mit Lemma 5.2, dass

$$\langle Af, f \rangle = \lim_{j \to \infty} \left\langle Af_{n_j}, f_{n_j} \right\rangle = \lambda.$$

Insbesondere ist dann $f \neq 0$. Wäre $\|f\| < 1$, so würde mit $\hat{f} := f / \|f\|$ folgen, dass $\left\| \hat{f} \right\| = 1$ und

$$\left\langle A\hat{f}, \hat{f} \right\rangle = \frac{1}{\|f\|^2} \lambda > \lambda,$$

im Widerspruch zur Definition von λ.

(2) Für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathcal{H}$ sind auch die Elemente

$$\frac{1}{\|f + tx\|}(f + tx) \in \mathcal{H}$$

zur Konkurrenz bei der Bildung des Supremums zugelassen, d.h. es gilt

$$\langle A(f + tx), f + tx \rangle \leq \lambda \|f + tx\|^2, \quad \forall t \in \mathbb{R},\, x \in \mathcal{H}.$$

Ausmultiplizieren liefert wegen $\|f\| = 1$, $\langle Af, f \rangle = \lambda$ und $A = A^*$

$$2t \operatorname{Re} \langle Af, x \rangle + t^2 \langle Ax, x \rangle \leq \lambda \left(2t \operatorname{Re} \langle f, x \rangle + t^2 \|x\|^2 \right).$$

Für $t > 0$ folgt

$$2 \operatorname{Re} \langle (A - \lambda) f, x \rangle \leq t(\lambda \|x\|^2 - \langle Ax, x \rangle)$$

und mit $t \downarrow 0$ also

$$\operatorname{Re} \langle (A - \lambda) f, x \rangle \leq 0.$$

Analoge Rechnungen mit $t < 0$ liefern

$$\operatorname{Re} \langle (A - \lambda) f, x \rangle \geq 0.$$

Analog erhalten wir mit it an Stelle von t die Aussage

$$\operatorname{Im}\langle (A-\lambda)f, x\rangle = 0.$$

Mithin gilt

$$\langle (A-\lambda)f, x\rangle = 0, \quad \forall x \in \mathcal{H},$$

also $Af = \lambda f$. □

Wir betrachten nun den Spezialfall $A = A^*$ kompakt mit $A \geq 0$ und beweisen den Spektralsatz für diese Klasse von Operatoren.

Theorem 5.4. *Sei $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt mit $A \geq 0$ und $\dim R(A) = \infty$. Dann gibt es eine Folge $(\lambda_k) \subset (0,\infty)$ und ein ONS $(u_k) \subset \mathcal{H}$, so dass*

$$Au_k = \lambda_k u_k, \tag{5.1}$$
$$\lambda_k \geq \lambda_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5.2}$$
$$\lambda_k \to 0, \quad k \to \infty, \tag{5.3}$$

und

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, u_k\rangle u_k, \quad x \in \mathcal{H}. \tag{5.4}$$

Insbesondere gilt $\overline{R(A)} = \overline{\operatorname{span}\{u_k; k \in \mathbb{N}\}}$, d.h. (u_k) ist eine ONB von $\overline{R(A)}$, und es gilt $Au = 0$ für alle $u \in R(A)^\perp$.

Beweis.

(1) Wir konstruieren zunächst induktiv die Folge (λ_k) und das ONS (u_k), so dass (5.1)–(5.3) erfüllt sind.

(i) Der *Induktionsanfang* wird durch Proposition 5.3 gegeben; wegen der Voraussetzung $\dim R(A) > 0$ ist dabei $\lambda_1 > 0$.

(ii) *Induktionsvoraussetzung:* Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{H}$ bereits konstruiert mit

$$\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{i,j}, \quad i,j = 1,\dots,n, \tag{5.5}$$
$$Au_i = \lambda_i u_i, \quad i = 1,\dots,n, \tag{5.6}$$
$$\lambda_k = \sup\{\langle Ax, x\rangle\,;\, \|x\| = 1,\ \langle x, u_j\rangle = 0,\ j = 1,\dots,k-1\}, \quad k = 1,\dots,n, \tag{5.7}$$
$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n > 0. \tag{5.8}$$

(iii) *Induktionsschritt*: Wir definieren nun

$$\mathcal{M}_n := \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\} \quad \text{und} \quad \mathcal{H}_n := \mathcal{M}_n^\perp.$$

Wegen $A\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_n$ und $A = A^*$ folgt sofort

$$A\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_n,$$

denn für $x \in \mathcal{H}_n$ und $y \in \mathcal{M}_n$ gilt $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = 0$. Also ist die Einschränkung

$$A_n \coloneqq A\restriction_{\mathcal{H}_n}$$

ein beschränkter, symmetrischer, nicht-negativer und kompakter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}_n$. Wir setzen

$$\lambda_{n+1} \coloneqq \sup\{\langle A_n x, x\rangle\,; x \in \mathcal{H}_n,\ \|x\| = 1\}.$$

Es ist $\lambda_{n+1} > 0$, denn andernfalls wäre nach der Polarisierungsidentität $A_n = 0$ und damit $R(A) \subset \mathcal{M}_n$, d.h. $\dim R(A) = n < \infty$. Nach Proposition 5.3 gibt es daher ein $u_{n+1} \in \mathcal{H}_n$ mit $\|u_{n+1}\| = 1$ und $A_n u_{n+1} = \lambda_{n+1} u_{n+1}$. Wegen $u_{n+1} \in \mathcal{M}_n^\perp$ und $u_k \in \mathcal{M}_n$, $k = 1, \dots, n$, ist auch $\langle u_{n+1}, u_k\rangle = 0$, $k = 1, \dots, n$. Wegen $A_n = A\restriction_{\mathcal{H}_n}$ und $u_{n+1} \in \mathcal{H}_n$ ist schließlich $Au_{n+1} = A_n u_{n+1} = \lambda_{n+1} u_{n+1}$. Da die λ_k gemäß (5.7) als Suprema definiert sind und die Mengen, über die das Supremum gebildet wird, mit wachsendem k kleiner werden, gilt $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n$. Dies beendet die induktive Konstruktion der Eigenwerte und Eigenvektoren.

(2) Wir zeigen jetzt $\lambda_k \to 0$ für $k \to \infty$: Weil (u_k) ein ONS ist, haben wir $u_k \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$, $k \to \infty$. Mit Lemma 5.2 folgt

$$\lambda_k = \langle Au_k, u_k\rangle \to 0.$$

(3) Sei

$$\mathcal{M} \coloneqq \overline{\bigoplus_{k=1}^{\infty} u_k} = \overline{\operatorname{span}\{u_k; k \in \mathbb{N}\}},$$

also

$$\mathcal{M}^\perp = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} u_k\right)^\perp = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n^\perp.$$

Wir zeigen $A\restriction_{\mathcal{M}^\perp} = 0$: Für $x \in \mathcal{M}^\perp$ gilt nach (5.7), dass

$$0 \leq \langle Ax, x\rangle \leq \lambda_n \|x\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

mithin $\langle Ax, x\rangle = 0$ wegen $\lambda_n \to 0$. Mit der Polarisierungsidentität oder Theorem 4.23 folgt nun $A\restriction_{\mathcal{M}^\perp} = 0$.

(4) Jedes $x \in \mathcal{H}$ lässt sich schreiben als

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k + \xi$$

mit $c_k = \langle x, u_k\rangle$ und einem $\xi \in \mathcal{M}^\perp$. Wegen $A\xi = 0$ nach (3) folgt

$$Ax = A\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k A u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, u_k\rangle\, u_k.$$

Dies beweist die Darstellung (5.4) und beendet unseren Beweis. □

Wir lassen nun die Voraussetzung $A \geq 0$ fallen und betrachten kompakte, symmetrische Operatoren.

Theorem 5.5. *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt und symmetrisch und sei $\dim R(A) = \infty$. Dann gibt es eine Folge $(\lambda_k) \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und ein ONS $(u_k) \subset \mathcal{H}$ mit*

$$\begin{aligned} &\lambda_k \to 0, \quad k \to \infty, \\ &Au_k = \lambda_k u_k, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

und

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, u_k \rangle u_k, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Beweis. Wie im Beweis zu 5.4 konstruieren wir die Folgen (λ_k) und (u_k) durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang: Sei

$$\Lambda_1^+ := \sup\{\langle Ax, x\rangle\,;\|x\| \leq 1\} \quad \text{und} \quad \Lambda_1^- := \inf\{\langle Ax, x\rangle\,;\|x\| \leq 1\}.$$

Wegen $\dim R(A) > 0$ ist $\Lambda_1^+ \neq 0$ oder $\Lambda_1^- \neq 0$. Außerdem ist $\pm\Lambda_1^\pm \geq 0$ und wir setzen

$$\lambda_1 := \begin{cases} \Lambda_1^+ & \text{falls } \Lambda_1^+ \geq |\Lambda_1^-|, \\ \Lambda_1^- & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Proposition 5.3 ist λ_1 ein Eigenwert von A und es existiert ein $u_1 \in \mathcal{H}$ mit $\|u_1\| = 1$ und

$$Au_1 = \lambda_1 u_1.$$

Induktionsschritt: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ und ein ONS $\{u_1, \ldots, u_k\} \subset \mathcal{H}$ bereits konstruiert mit

$$\begin{aligned} &Au_i = \lambda_i u_i, \quad i = 1, \ldots, k, \\ &|\lambda_{j+1}| \leq |\lambda_j|, \quad j = 1, \ldots, k-1, \end{aligned}$$

und $|\lambda_j| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle|;\, x \perp \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_{j-1}\},\, \|x\| \leq 1\}$, $j = 1, \ldots, k$. Sei

$$\mathcal{M}_k := \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\} \quad \text{und} \quad \mathcal{H}_k := \mathcal{M}_k^\perp.$$

Wegen $A\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_k$ und $A = A^*$ folgt wie im Beweis zu Theorem 5.4

$$A\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}_k$$

und $A_k := A\restriction_{\mathcal{H}_k}$ ist ein symmetrischer, kompakter Operator. Wir definieren

$$\Lambda_{k+1}^+ := \sup\{\langle A_k x, x\rangle\,; x \in \mathcal{H}_k,\, \|x\| \leq 1\},$$

$$\Lambda_{k+1}^- := \inf\{\langle A_k x, x\rangle\,; x \in \mathcal{H}_k,\ \|x\| \leq 1\}.$$

Wäre $\Lambda_{k+1}^+ = \Lambda_{k+1}^- = 0$, so folgte mit der Polarisierungsidentität $A_k = 0$ und damit $R(A) \subset \mathcal{M}_k$ und $\dim R(A) < \infty$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $\Lambda_{k+1}^+ \neq 0$ oder $\Lambda_{k+1}^- \neq 0$. Falls $\Lambda_{k+1}^+ \geq |\Lambda_{k+1}^-|$, so setzen wir

$$\lambda_{k+1} := \Lambda_{k+1}^+,$$

andernfalls $\lambda_{k+1} := \Lambda_{k+1}^-$. Der Rest des Beweises verläuft analog zum Beweis von Theorem 5.4. □

Bemerkung 5.6.

(1) Für symmetrisches A gilt nach Theorem 4.23

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|.$$

Daher ist für kompakte, symmetrische Operatoren stets $+\|A\|$ oder $-\|A\|$ ein Eigenwert von A, d.h. es ist $\lambda_1 = \|A\|$ oder $\lambda_1 = -\|A\|$.

(2) Falls A kompakt ist, $A = A^*$ und $\dim R(A) < \infty$ gilt, etwa $\dim R(A) = k \in \mathbb{N}$, so liefert der Beweis zu Theorem 5.5 genau k Eigenwerte $\lambda_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, k$, und ein ONS $\{u_j\}_{j=1,\ldots,k}$. Es gilt dann analog zur Aussage von Theorem 5.5

$$Ax = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle x, u_j\rangle u_j, \quad x \in \mathcal{H}.$$

(3) Sei wieder A symmetrisch. Falls $\overline{R(A)} \neq \mathcal{H}$, so ist $\mathcal{M}^\perp \neq \{0\}$ und dann ist 0 ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenraum

$$N(A) = \mathcal{M}^\perp = R(A)^\perp.$$

Während $\dim N(A - \lambda_i I) < \infty$ ist, für alle $i \in \mathbb{N}$, kann durchaus $\dim N(A) = \infty$ sein.

(4) Der Operator A besitzt keine weiteren Eigenwerte und Eigenvektoren (siehe Aufgabe 5.4).

Definition 5.7. Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Die Menge

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I \text{ bijektiv}, (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\}$$

heißt die *Resolventenmenge von A*;

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A)$$

heißt das *Spektrum von A*. Die Menge der Eigenwerte von A nennt man das *Punktspektrum von A*,

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I \text{ nicht injektiv}\} \subset \sigma(A).$$

Theorem 5.8. *Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und sei $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt. Sei J eine Indexmenge, $J = \mathbb{N}$ oder $J = \{1, \dots, K\}$ für ein $K \in \mathbb{N}$. Sei $(\lambda_j)_{k\in J} \subset \mathbb{R}$ die Menge der Eigenwerte von A nach Theorem 5.5. Dann gilt*

$$\sigma(A) = \{\lambda_k; k \in J\} \cup \{0\}.$$

Beweis. Offenbar gilt $\{\lambda_k; k \in J\} \subset \sigma_p(A) \subset \sigma(A)$. Für $\lambda \neq 0$ und $\lambda \notin \{\lambda_k; k \in J\}$ kann man für die Inverse von $A - \lambda I$ eine Formel angeben (vgl. Aufgabe 5.5): Wenn wir

$$R_\lambda x := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_j} \langle x, u_j\rangle\, u_j - \frac{1}{\lambda} P_{N(A)} x, \quad x \in \mathcal{H},$$

definieren, so ist $R_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, denn wegen $\lambda \neq 0$ und $\lambda_j \to 0$ ist $\sup_j \frac{1}{|\lambda - \lambda_j|} < \infty$. Weiter rechnet man nach, dass

$$R_\lambda(A - \lambda I)x = (A - \lambda I)R_\lambda x = x,$$

für alle $x \in \mathcal{H}$. Also ist $A - \lambda I$ bijektiv mit beschränkter Inverser R_λ. Damit ist $\lambda \in \rho(A)$ gezeigt. Es bleibt zu zeigen, dass $0 \in \sigma(A)$ gilt. Wenn A nicht injektiv ist, so ist $0 \in \sigma_p(A)$. Wenn A injektiv ist, so ist $\dim R(A) = \infty$. Dann ist nach Theorem 5.5 die Indexmenge $J = \mathbb{N}$, d.h. es gibt eine Folge von Eigenwerten $\lambda_k \to 0$, $\lambda_k \neq 0$, mit einem zugehörigen ONS (u_k) von Eigenfunktionen. Dann gilt

$$\|u_k\| = 1, \quad \|Au_k\| = |\lambda_k| \to 0,\ k \to \infty.$$

Mithin kann A keine beschränkte Inverse besitzen, denn ein bijektiver Operator B ist genau dann stetig invertierbar, wenn es ein $\eta > 0$ gibt mit $\|Bu\| \geq \eta \|u\|$, für alle $u \in \mathcal{H}$. □

Bemerkung 5.9.

(1) Für kompakte, symmetrische Operatoren A liefert der Spektralsatz die Darstellung $A = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} \lambda\, P_{\{\lambda\}}$, wobei die Reihe in der Operatornorm konvergiert, und die Zerlegung $\mathcal{H} = \oplus_{\lambda\in\sigma(A)} N(A - \lambda I)$.

(2) Für $A = A^*$ kompakt und $A \geq 0$ kann man durch $B := \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j}\, P_{\{\lambda_j\}}$ einen kompakten, symmetrischen und nicht-negativen Operator mit der Eigenschaft $B^2 = A$ definieren; man schreibt dann $B = \sqrt{A}$. Allgemeiner kann man für $f \in C(\sigma(A); \mathbb{C})$ *Funktionen von Operatoren* $f(A) = \sum_{j=1}^{\infty} f(\lambda_j)\, P_{\{\lambda_j\}}$ erklären.

(3) Eine weitere Variante des Spektralsatzes: Jeder kompakte, symmetrische Operator A ist unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator auf ℓ_2. Man betrachtet dazu die Koordinatenabbildung $U\colon \mathcal{H} \to \ell_2$, $x \mapsto (\langle x, u_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$. Die Abbildung U ist unitär und UAU^{-1} ist die Multiplikation mit der Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Schließlich betrachten wir allgemeine (d.h. nicht notwendig symmetrische) kompakte Operatoren. Es gibt kompakte Operatoren, die *keine* Eigenwerte besitzen. Im $\mathbb{C}^n$ hat hingegen jede lineare Abbildung mindestens einen Eigenwert.

Theorem 5.10. *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt und $\dim N(A)^\perp = \infty$. Dann gibt es eine Folge $(\mu_n) \subset (0,\infty)$ mit $\mu_n \to 0$ für $n \to \infty$ und ONSe $(u_n), (v_n) \subset \mathcal{H}$ mit*

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, u_n \rangle v_n, \quad x \in \mathcal{H}. \tag{5.9}$$

Bemerkung 5.11. Die μ_n sind i. Allg. keine Eigenwerte von A, vielmehr ist μ_n^2 ein Eigenwert von A^*A. Selbst wenn A positive, reelle Eigenwerte besitzen sollte, so werden diese i. Allg. nicht unter den Zahlen μ_n vorkommen. Als Beispiel kann die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dienen. Man nennt die μ_n die *singulären Werte von A*.

Lemma 5.12. *Für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt $N(A^*A) = N(A)$.*

Beweis. Die Inklusion $N(A) \subset N(A^*A)$ ist trivial. Aus $A^*Au = 0$ folgt $\langle A^*Au, u \rangle = \|Au\|^2 = 0$ und daher ist auch $N(A^*A) \subset N(A)$. □

Beweis von Theorem 5.10. Es ist A^*A kompakt, symmetrisch und nicht-negativ. Weiter ist

$$\dim R(A^*A) = \infty$$

wegen $\overline{R(A^*A)} = N(A^*A)^\perp = N(A)^\perp$ und $\dim N(A)^\perp = \infty$ nach Voraussetzung. Nach Theorem 5.4 existieren eine monoton fallende Folge $(\alpha_n) \subset (0,\infty)$ mit $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$, und ein ONS $(u_n) \subset \mathcal{H}$ und es ist

$$\begin{aligned} A^*Au_n &= \alpha_n u_n, \quad n \in \mathbb{N}, \\ A^*Ax &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x, u_n \rangle u_n, \quad x \in \mathcal{H}; \end{aligned}$$

weiter ist (u_n) eine ONB in $\overline{R(A^*A)}$. Wir setzen nun

$$\begin{aligned} \mu_n &:= \sqrt{\alpha_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ v_n &:= \frac{1}{\mu_n} Au_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die v_n bilden wieder ein ONS, denn es gilt

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_j \rangle &= \frac{1}{\mu_i \mu_j} \langle Au_i, Au_j \rangle = \frac{1}{\mu_i \mu_j} \langle A^*Au_i, u_j \rangle \\ &= \frac{\mu_i^2}{\mu_i \mu_j} \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Es bleibt noch die Darstellungsformel (5.9) zu beweisen. Zunächst konvergiert die Reihe

$$B := \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \langle \cdot, u_i \rangle v_i \tag{5.10}$$

in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$: Wenn wir $B_n = \sum_{1 \le i \le n} \mu_i \langle \cdot, u_i \rangle v_i$ für die Partialsummen schreiben, so gilt für $p > n$ und alle $x \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \|B_p x - B_n x\|^2 &= \left\| \sum_{i=n+1}^{p} \mu_i \langle x, u_i \rangle v_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{p} \mu_i^2 |\langle x, u_i \rangle|^2 \\ &\le \mu_n^2 \sum_{i=n+1}^{p} |\langle x, u_i \rangle|^2 \le \mu_n^2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

wobei wir $0 \le \mu_i \le \mu_n$ für $i \ge n$ verwendet haben. Wegen $\mu_n \to 0$ für $n \to \infty$ folgt daher

$$\sup_{p>n} \|B_p - B_n\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

und daher ist $(B_n) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ konvergiert die Reihe in (5.10). Weiter gilt für alle $j \in \mathbb{N}$, dass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \langle u_j, u_i \rangle v_i = \mu_j v_j = \mu_j \left(\frac{1}{\mu_j} A u_j \right) = A u_j.$$

Damit ist gezeigt, dass (5.9) für alle $x \in \operatorname{span}\{u_j; j \in \mathbb{N}\}$ gilt, also auch für alle $x \in \overline{\operatorname{span}\{u_j; j \in \mathbb{N}\}} = \overline{R(A^*A)}$. Wegen $R(A^*A)^\perp = N(A)$ liefern beide Seiten von (5.9) für $x \in N(A)$ einfach 0. Daher gilt (5.9) für alle $x \in N(A) \oplus N(A)^\perp = \mathcal{H}$. □

Korollar 5.13. *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt. Dann gibt es eine Folge von Operatoren $(A_n) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\dim R(A_n) < \infty$, so dass*

$$\|A - A_n\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Umgekehrt gilt: Wenn eine Folge von Operatoren mit endlichem Rang in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ konvergiert, so ist der Grenzwert A kompakt.

Bemerkung 5.14.

(1) Es ist (v_j) eine ONB in $\overline{R(A)}$, während (u_i) eine ONB von $N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}$ bildet. In der Tat liefert (5.9) sofort eine Zerlegung von A^* in der Gestalt

$$A^* x = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, v_n \rangle u_n, \quad x \in \mathcal{H}.$$

(2) Sei A kompakt und sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Eigenwert von A. Dann ist

$$\dim N(A - \lambda I) < \infty.$$

Andernfalls existierte ein ONS $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset N(A - \lambda I)$. Wegen $x_k \xrightarrow{\text{w}} 0$ wäre dann $\langle A x_k, x_k \rangle \to 0$, während andererseits $\langle A x_k, x_k \rangle = \lambda \|x_k\|^2 = \lambda \ne 0$ gilt.

(3) Aus der Zerlegung (5.9) kann man insbesondere die *polare Zerlegung* von A gewinnen: Jeder beschränkte Operator A besitzt eine Zerlegung der Form

$$A = U|A|,$$

mit dem *Absolutbetrag* $|A| = \sqrt{A^*A}$ von A und einer *partiellen Isometrie* U. (Eine partielle Isometrie bildet einen Teilraum M isometrisch ab, während $M^\perp$ auf 0 abgebildet wird.) Für kompaktes A können wir $|A|$ explizit angeben:

$$|A|x := \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_n}\, \langle x, u_n \rangle\, u_n, \quad x \in \mathcal{H};$$

U wird in diesem Fall gegeben durch die Abbildung $u_j \mapsto v_j$.

5.1.1 Übungen

Aufgabe 5.1. Beweisen Sie Korollar 5.13.
Hinweis: Theorem 5.10 und Lemma 4.39.

Aufgabe 5.2.

(a) Sei $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine Nullfolge und sei $M\colon \ell_2 \to \ell_2$ der von (m_k) erzeugte Multiplikationsoperator,

$$Mx := (m_k x_k)_{k\in\mathbb{N}}, \quad x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_2.$$

Zeigen Sie, dass M kompakt ist.
Hinweis: Korollar 5.13.

(b) Sei $S\colon \ell_2 \to \ell_2$ der Links-Shift und seien (m_k) und M wie in (a). Dann ist MS kompakt. Bestimmen Sie die Eigenwerte von MS, insbesondere für den Fall, dass alle $m_k \neq 0$ sind.

Aufgabe 5.3 (Eigenwerte symmetrischer Operatoren). Sei $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A ist, so muss λ reell sein.

(b) Wenn zusätzlich $A \geq 0$ ist, so sind alle Eigenwerte von A nicht-negativ.

(c) Es seien $\lambda \neq \mu$ Eigenwerte von A und $u, v \in \mathcal{H}$ mit $Au = \lambda u$ und $Av = \mu v$ gegeben. Dann gilt $\langle u, v \rangle = 0$.

Bemerkung: A braucht nicht kompakt zu sein. Über die Existenz von Eigenwerten bei symmetrischen Operatoren wird hier nichts ausgesagt.

Aufgabe 5.4. Sei $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt mit $\dim R(A) = \infty$ und der spektralen Zerlegung

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, u_k \rangle u_k, \quad x \in \mathcal{H},$$

wie in Theorem 5.5. Es sei $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Eigenwert von A, d.h. es gebe ein $u \in \mathcal{H} \backslash \{0\}$ mit $Au = \lambda u$. Zeigen Sie: Es gibt ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $\lambda = \lambda_{j_0}$. Weiter ist u eine Linearkombination von denjenigen u_k, für die $\lambda_k = \lambda_{j_0}$ ist.

Aufgabe 5.5. Sei A ein kompakter, symmetrischer Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit unendlich-dimensionalem Bild und der Spektraldarstellung $A = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \langle \cdot, u_j \rangle u_j$ gemäß Theorem 5.5. Weiter sei

$$\mathcal{M} := \overline{R(A)} = \overline{\operatorname{span}\{u_j; j \in \mathbb{N}\}}.$$

(a) Sei $p(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k z^k$ ein Polynom *ohne* konstanten Term, mit $n \in \mathbb{N}$ und $c_k \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $p(A) := \sum_{k=1}^{n} c_k A^k$ die Spektraldarstellung

$$p(A) = \sum_{j=1}^{\infty} p(\lambda_j) \langle \cdot, u_j \rangle u_j$$

besitzt.
Hinweis: Man unterscheide die Fälle $x \in \mathcal{M}$ und $y \in \mathcal{M}^{\perp} = N(A)$.

(b) Sei $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ mit $\lambda \neq \lambda_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und sei $P_{N(A)}$ die Projektion auf $N(A) = \mathcal{M}^{\perp}$. Zeigen Sie, dass

$$R_\lambda x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_j} \langle x, u_j \rangle u_j - \frac{1}{\lambda} P_{N(A)} x, \quad x \in \mathcal{H},$$

einen beschränkten Operator definiert, für den

$$R_\lambda (A - \lambda I) x = (A - \lambda I) R_\lambda x$$

gilt.

Aufgabe 5.6. Zeigen Sie, dass der auf $L_2[-\pi, \pi]$ (oder auf $\mathcal{E} := C[-\pi, \pi]$) durch

$$(Kf)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x - t) f(t) \, \mathrm{d}t, \quad f \in \mathcal{E},$$

definierte Integraloperator genau die Eigenwerte 0, i/2 und −i/2 besitzt.
Anleitung: Man zeige zunächst, dass es zwei orthogonale Funktionen $u, v \in \mathcal{E}$ gibt mit

$$2\pi K f = \langle f, v \rangle u - \langle f, u \rangle v, \quad f \in \mathcal{E}.$$

Es folgt $K^* = -K$. Man bestimme anschließend Bild und Kern von K.

5.2 Klassen kompakter Operatoren

Wir beschreiben abschließend einige wichtige Klassen kompakter Operatoren.

Definition 5.15. Wir bezeichnen den Vektorraum der kompakten Operatoren $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\mathcal{J}_0(\mathcal{H})$ (oder $\mathcal{B}_0, \mathcal{K}, \mathcal{J}_\infty, \mathcal{B}_\infty$).

Bemerkung 5.16. Der Raum $\mathcal{J}_0(\mathcal{H})$ ist ein zweiseitiges $*$-Ideal in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Definition 5.17. Die Klasse der *Hilbert-Schmidt-Operatoren* besteht aus denjenigen Operatoren $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, für die

$$\|A\|_{\mathrm{HS}}^2 := \sum_{n=1}^{\infty} \|Ax_n\|^2 < \infty,$$

für eine beliebige ONB $(x_n) \subset \mathcal{H}$.

Man überlegt leicht, dass $\|A\|_{\mathrm{HS}}$ tatsächlich wohldefiniert ist, vgl. Aufgabe 5.7. Jeder Hilbert-Schmidt-Operator A ist kompakt. Wenn (μ_n) die singulären Werte von A bezeichnet, dann gilt

$$\|A\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2,$$

vgl. Aufgabe 5.8. Die Hilbert-Schmidt-Operatoren bilden einen normierten Vektorraum $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2(\mathcal{H})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle A, B\rangle_{\mathrm{HS}} := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Ax_n, Bx_n\rangle\,,$$

für eine beliebige ONB $(x_n) \subset \mathcal{H}$. Der Raum $\mathcal{J}_2$ ist vollständig, also ein Hilbertraum.

Theorem 5.18. *Sei $\mathcal{H} = \ell_2$ und sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit zugehöriger Matrix $a := (a_{ij})$, $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i\rangle$. Dann gilt*

$$A \in \mathcal{J}_2(\ell_2) \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty.$$

Beweis. Aufgabe 5.7. □

Bemerkung 5.19. Analog gilt für Integraloperatoren K mit Kern $k(\cdot,\cdot)$ im Hilbertraum $\mathcal{H} = L_2(M)$:

$$K \in \mathcal{J}_2(L_2(M)) \quad\Longleftrightarrow\quad \int_{M\times M} |k(s,t)|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Dabei kann M ein kompaktes Intervall sein oder auch ein allgemeiner Maßraum.

Im Folgenden berichten wir noch kurz über die Schatten-von Neumann-Klassen. Als Referenzen kommen insbesondere [3, 11, 21, 23, 25, 31, 28] in Frage.

Definition 5.20. Für $p \in [1,\infty)$ definiert man die *p-te Schatten-von Neumann-Klasse* $\mathcal{J}_p$ durch

$$\mathcal{J}_p(\mathcal{H}) := \left\{ A \in \mathcal{J}_0(\mathcal{H}); \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^p < \infty \right\},$$

wobei $\mu_n = \mu_n(A)$ die singulären Werte von A bezeichnen.

Bemerkung 5.21. Für $p \in [1,\infty)$ gilt $A \in \mathcal{J}_p \iff (\mu_n) \subset \ell_p$. Offenbar ist $\mathcal{J}_q \subset \mathcal{J}_p$ für $1 \leq q \leq p < \infty$. Beispielsweise gilt $\mathcal{J}_1 \subsetneqq \mathcal{J}_2$. Die Zugehörigkeit von A zu einem der Räume $\mathcal{J}_p$ ist also ein Maß für die "Geschwindigkeit", mit der die μ_n gegen Null konvergieren.

Definition 5.22. Die Klasse $\mathcal{J}_1(\mathcal{H})$ heißt *Spurklasse (engl.: trace class)*. Für $A \in \mathcal{J}_1$ ist

$$\|A\|_{\mathcal{J}_1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle |A| x_n, x_n \rangle$$

für eine beliebige ONB $(x_n) \subset \mathcal{H}$, wobei

$$|A| := \sqrt{A^* A} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n \langle \cdot, u_n \rangle \, u_n$$

den *Absolutbetrag von* A bezeichnet; μ_n und u_n sind wie in Theorem 5.10.

Theorem 5.23. *Für $A \in \mathcal{J}_1$ ist die* Spur von A,

$$\operatorname{tr}(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle A x_n, x_n \rangle ,$$

mit einer beliebigen ONB $(x_n) \subset \mathcal{H}$, wohldefiniert.

Beweis. Wie in Theorem 5.10 schreiben wir $A = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_j \langle \cdot, u_j \rangle \, v_j$. Dann gilt

$$\langle A x_n, x_n \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \langle x_n, u_j \rangle \langle v_j, x_n \rangle$$

und daher

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \langle A x_n, x_n \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \langle x_n, u_j \rangle \langle v_j, x_n \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, u_j \rangle \langle v_j, x_n \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \langle v_j, u_j \rangle .
\end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J}|\mu_j \langle x_n, u_j\rangle \langle v_j, x_n\rangle | \le \sum_{j=1}^{J}\mu_j \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2}| \langle u_j, x_n\rangle |^2 + \frac{1}{2}| \langle v_j, x_n\rangle |^2\right) \le \|A\|_{\mathcal{J}_1}$$

für alle $J, N \in \mathbb{N}$, ist die Vertauschung der Summationsreihenfolge zulässig. Das letzte Gleichheitszeichen folgt mit dem Satz von Parseval, wenn man u_j und v_j bezüglich der ONB (x_n) darstellt. □

Theorem 5.24. *Es gilt:*

(1) *Aus $A, B \in \mathcal{J}_2$ folgt $AB \in \mathcal{J}_1$.*

(2) *Zu jedem $C \in \mathcal{J}_1$ gibt es eine Zerlegung $C = AB$ mit $A, B \in \mathcal{J}_2$.*

Beweis. Seien $A, B \in \mathcal{J}_2$ und sei $C = AB$. Für beliebige ONSe $(x_n), (y_n) \subset \mathcal{H}$ gilt

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} | \langle Cx_j, y_j\rangle |\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} | \langle Bx_j, A^* y_j\rangle |\right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^{\infty}\|Bx_j\|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|A^* y_j\|^2\right).$$

Wenn wir für $(x_j), (y_j)$ nun die ONBen der Darstellung von C nach Theorem 5.10 einsetzen, so ergibt sich unmittelbar $\|C\|_{\mathcal{J}_1} \le \|A\|_{\mathcal{J}_2}\|B\|_{\mathcal{J}_2}$. Ist umgekehrt $C \in \mathcal{J}_1$ mit $C = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n \langle \cdot, u_n\rangle v_n$, so definieren wir kompakte Operatoren A und B durch

$$A := \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\mu_n}\,\langle \cdot, v_n\rangle v_n, \quad B := \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\mu_n}\,\langle \cdot, u_n\rangle v_n.$$

Offensichtlich gilt dann $A, B \in \mathcal{J}_2$ und $AB = C$. □

Bemerkung 5.25 (Anwendungen der Spurklasse).

(1) Jedes $B \in \mathcal{J}_1$ erzeugt durch

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}, \quad A \mapsto \operatorname{tr}(BA)$$

ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Damit erzeugt man auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ die sogenannte *ultraschwache Topologie*, eine lokalkonvexe Topologie, die in der Quanteninformationstheorie Anwendungen findet.

(2) Spurklassebedingungen haben zahlreiche Anwendungen in der quantenmechanischen Spektral- und Streutheorie.

Wir bezeichnen die paarweise verschiedenen Eigenwerte eines kompakten Operators A mit $\Lambda_j \in \mathbb{C}$, $j \in M$, wobei $M = \emptyset$, $M = \mathbb{N}$ oder $M = \{1, \ldots, K\} \subset \mathbb{N}$ ist. Ein nicht-symmetrischer kompakter Operator A wird i. Allg. keine oder nur wenige Eigenwerte besitzen. Wir bezeichnen die *algebraische Vielfachheit* eines Eigenwerts Λ_j mit m_j,

$$m_j = \sup_{k\in\mathbb{N}} \dim N\left[(A - \Lambda_j I)^k\right].$$

Das Supremum ist für jedes j endlich, sofern $\Lambda_j \neq 0$. Genauer gibt es zu jedem $\Lambda_j \neq 0$ ein $k_j \in \mathbb{N}$ mit

$$N\left[(A - \Lambda_j I)^{k_j+1}\right] = N\left[(A - \Lambda_j I)^{k_j}\right],$$

d.h. für $k \geq k_j$ sind die Nullräume von $(A - \Lambda_j I)^k$ immer gleich.

Theorem 5.26 (Schur-Lalesco-Weyl). *Es sei $p \in [1, \infty)$ und $A \in \mathcal{J}_p$ mit Eigenwerten Λ_j, $j \in M$, und den singulären Werten $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt*

$$\sum_{j\in M} m_j |\Lambda_j|^p \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n^p.$$

Insbesondere ist $\sum_{j\in M} m_j |\Lambda_j| < \infty$ für $A \in \mathcal{J}_1$.

Beweis. Siehe [25, S. 318f.]. □

Theorem 5.27 (Lidskij). *Für $A \in \mathcal{J}_1$ gilt*

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{j\in M} m_j \Lambda_j.$$

Beweis. Siehe [25, S. 328f.]. □

5.2.1 Übungen

Aufgabe 5.7.

(a) Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Orthonormalbasen im Hilbertraum $\mathcal{H}$ und es sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ax_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|A^* y_n\|^2,$$

wobei der Wert $+\infty$ zugelassen ist.
Hinweis: Satz von Parseval.

(b) Man folgere aus (a), dass für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ die Zahl

$$\|A\|_{\mathrm{HS}}^2 := \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ax_n\|^2 \in [0, \infty]$$

nicht von der Wahl der ONB $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abhängt.

(c) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\|A\|_{\mathrm{HS}} < \infty$. Dann ist A kompakt.
Hinweis: Korollar 5.13.

(d) Es sei nun speziell $\mathcal{H} = \ell_2$ und (a_{ij}) die zu A gehörende unendliche Matrix. Man zeige:

$$\|A\|_{\mathrm{HS}}^2 < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty.$$

Aufgabe 5.8. Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein Hilbert-Schmidt-Operator mit den singulären Werten $\mu_n = \mu_n(A) > 0$, $n \in \mathbb{N}$, wie in Theorem 5.10. Zeigen Sie:

$$\|A\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2(A).$$

Hinweis: Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ ein ONS mit $A^*Ax_n = \mu_n^2 x_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Man ergänze das ONS (x_n) zu einer ONB von $\mathcal{H}$.

Kapitel 6

Unbeschränkte Operatoren

Die meisten Operatoren, die für Anwendungen in der Physik oder Technik von Bedeutung sind, sind Differentialoperatoren. Diese kann man *nicht* als beschränkte Operatoren auf dem ganzen Hilbertraum erklären. Unter den unbeschränkten Operatoren zeichnen wir die *symmetrischen* Operatoren aus und unter den symmetrischen die *selbstadjungierten*. Letztere korrespondieren zu den symmetrischen Operatoren im beschränkten Fall. Insbesondere besitzen die selbstadjungierten Operatoren eine spektrale Zerlegung.

Definition 6.1. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und sei $D \subset \mathcal{H}$ ein linearer Teilraum. Eine Abbildung $T \colon D \to \mathcal{H}$ heißt ein *(linearer) Operator*. Wir nennen $D = D(T)$ den *Definitionsbereich von* T.

Beispiel 6.2.

(1) **Der Ortsoperator.** Im Hilbertraum $L_2(\mathbb{R})$ betrachten wir den Multiplikationsoperator $Q = M_x$ definiert durch

$$\begin{aligned} D(M_x) &\coloneqq \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}); \int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \right\}, \\ (M_x f)(x) &\coloneqq xf(x), \quad \forall f \in D,\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es gibt keine Konstante $C \geq 0$, so dass

$$\|M_x f\| \leq C \|f\|, \quad \forall f \in D,$$

denn für $f_n \coloneqq \chi_{(n,n+1)}$ gilt

$$\|M_x f_n\| \geq n \|f_n\|.$$

(2) **Der Impulsoperator.** Im Hilbertraum $\mathcal{H} = L_2(0, \pi)$ sei $D = C^\infty([0, \pi])$ und $T \colon D \to \mathcal{H}$ definiert durch

$$T\varphi \coloneqq -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi = -\mathrm{i}\varphi'(x).$$

Auch der Impulsoperator ist unbeschränkt; man wähle beispielsweise $\varphi_n(x) = \sin(nx)$; vgl. Aufgabe 6.1.

Für das Studium unbeschränkter Operatoren sind Graphen ein wichtiges Hilfsmittel.

Definition 6.3. Ein *(linearer) Graph* ist ein linearer Teilraum von $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Der *Definitionsbereich* $D(G)$ eines Graphen G ist

$$D(G) \coloneqq \{f \in \mathcal{H}; \exists g \in \mathcal{H} \colon (f, g) \in G\}.$$

Definition 6.4. Sei $T \colon D(T) \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator. Dann heißt

$$G(T) \coloneqq \{(f, Tf); f \in D(T)\}$$

der *Graph von T*.

Bemerkung 6.5. Man überzeugt sich leicht davon, dass ein Graph G genau dann Graph eines linearen Operators ist, wenn

$$(0, g) \in G \quad \Longleftrightarrow \quad g = 0.$$

Definition 6.6. Ein Operator T heißt *abgeschlossen*, wenn sein Graph $G(T)$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ ist.

Definition 6.7. Seien S und T Operatoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$. S heißt *Fortsetzung* von T, in Zeichen $S \supset T$, falls $G(S) \supset G(T)$.

Bemerkung 6.8. Offenbar ist $S \supset T$ genau dann, wenn $D(S) \supset D(T)$ und $Sf = Tf$ für alle $f \in D(T)$.

Definition 6.9. Ein Operator T heißt *abschließbar*, wenn er eine abgeschlossene Fortsetzung besitzt. Die kleinste abgeschlossene Fortsetzung eines abschließbaren Operators T wird die *Abschließung* von T genannt und mit $\overline{T}$ bezeichnet.

Bemerkung 6.10. Für abschließbares T hat man

$$G(\overline{T}) = \cap\{G(S); S \supset T,\, S \text{ abgeschlossen}\}.$$

Offenbar ist $G(\overline{T})$ wieder Graph eines Operators.

Zwar kann man den Graphen eines linearen Operators T immer abschließen und erhält einen abgeschlossenen linearen Teilraum von $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, dieser wird dann aber i. Allg. nicht mehr Graph eines Operators sein. Jedoch gilt das folgende Theorem.

Theorem 6.11. *Für abschließbares T gilt $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$.*

Beweis. Aufgabe 6.2. □

Theorem 6.12. *Sei $T \colon D \to \mathcal{H}$ ein Operator. Dann gilt:*

(1) *T ist genau dann abgeschlossen, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Für alle Folgen $(f_n) \subset D$ gilt:*

$$f_n \to f \in \mathcal{H} \text{ und } Tf_n \to g \in \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad f \in D \text{ und } Tf = g.$$

(2) *T ist genau dann abschließbar, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Für alle Folgen $(f_n) \subset D$ gilt:*

$$f_n \to 0, \text{ und } Tf_n \to g \in \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad g = 0.$$

(3) *Für abschließbares T gilt*

$$\begin{aligned} D(\overline{T}) &= \{f \in \mathcal{H}; \exists (f_n) \subset D, \exists g \in \mathcal{H}\colon f_n \to f, Tf_n \to g\}, \\ \overline{T}f &= g, \quad \forall f \in D(\overline{T}). \end{aligned}$$

Beweis. Aufgabe 6.2. □

Bemerkung 6.13. Der Begriff der Abschließung ist eine Abschwächung des Stetigkeitsbegriffs, denn T ist stetig, wenn aus $f_n \to 0$ schon $Tf_n \to 0$ folgt. Hingegen wird diese Eigenschaft für abschließbares T nur für Nullfolgen $(f_n) \subset D(T)$, für die zusätzlich die Bildfolge Tf_n konvergiert, verlangt.

Definition 6.14. Ein Operator $T\colon D \to \mathcal{H}$ heißt *dicht definiert*, wenn $D \subset \mathcal{H}$ dicht ist.

Bemerkung 6.15. Jeder dicht definierte beschränkte Operator A ist nach dem BLT-Theorem abschließbar mit $\overline{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Außerdem besitzt A neben $\overline{A}$ keine weiteren abgeschlossenen Fortsetzungen.

Wir wollen nun den zu T adjungierten Operator T^* definieren, wobei wir die Relation

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle, \quad u \in D(T), \quad v \in D(T^*),$$

anstreben.

Definition 6.16. Sei $T\colon D \to \mathcal{H}$ dicht definiert. Der *zu T adjungierte Operator T^** ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} D(T^*) &:= \{v \in \mathcal{H}; \exists w_v \in \mathcal{H}\, \forall u \in D(T)\colon \langle Tu, v\rangle = \langle u, w_v\rangle\}, \\ T^*v &:= w_v, \quad \forall v \in D(T^*). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Bemerkung 6.17.

(1) Wegen $\overline{D} = \mathcal{H}$ ist $w = T^*v$ eindeutig bestimmt und daher ist T^* wohldefiniert.

(2) Nach dem Darstellungssatz von Riesz gilt:

$$v \in D(T^*) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists C > 0\colon |\langle Tu, v\rangle| \le C\,\|u\|, \quad \forall u \in D(T).$$

(3) Im allgemeinen ist $D(T^*)$ nicht dicht in $\mathcal{H}$.

(4) $S \supset T \Longrightarrow T^* \supset S^*$.

(5) $N(T^*) = R(T)^\perp$.

Als Hilfsmittel in mehreren Beweisen werden wir auch den adjungierten Graphen benötigen.

Definition 6.18. Sei $\tau\colon \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \to \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ definiert durch

$$\tau(f,g) := (-g,f), \quad \forall (f,g)\in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}.$$

Für einen Graphen G definieren wir den *adjungierten Graphen* G^* durch

$$G^* := (\tau(G))^\perp = \tau(G^\perp).$$

In unserer Definition bezieht sich $\perp$ auf $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. Weiterhin gilt $\tau^2 = -I_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$.

Lemma 6.19. *Für jeden Teilraum $M \subset \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ kommutieren die Operationen $\perp$ und τ, d.h. es ist*

$$(\tau M)^\perp = \tau(M^\perp).$$

Beweis. Wegen $(f,g)\in M \iff (-g,f)\in \tau M$ rechnen wir

$$\begin{aligned}(u,v)\in(\tau M)^\perp &\iff \langle (u,v),(-g,f)\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} = 0, \quad \forall (f,g)\in M,\\ &\iff -\langle u,g\rangle + \langle v,f\rangle = 0, \quad \forall (f,g)\in M,\\ &\iff (v,-u)\in M^\perp\\ &\iff (u,v)\in \tau M^\perp,\end{aligned}$$

mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$ aus Beispiel 2.21. Damit folgt die Behauptung. □

Theorem 6.20. *Sei $T\colon D\to\mathcal{H}$ dicht definiert und sei T^* wie in Definition 6.16. Dann gilt für die Graphen von T und T^**

$$G(T^*) = G(T)^* = \tau(G(T))^\perp.$$

Insbesondere ist T^* stets abgeschlossen.

Beweis. Nach Definition 6.16 gilt für $v\in D(T^*)$

$$\begin{aligned}T^*v = w &\iff \langle Tu,v\rangle = \langle u,w\rangle\,, \quad \forall u\in D(T),\\ &\iff -\langle Tu,v\rangle + \langle u,w\rangle = 0, \quad \forall u\in D(T),\\ &\iff \langle(-Tu,u),(v,w)\rangle_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} = 0, \quad \forall u\in D(T).\end{aligned}$$

Also ist gezeigt:

$$(v,w)\in G(T^*) \quad\iff\quad (v,w)\perp(-Tu,u), \quad \forall u\in D(T),$$

d.h. $G(T^*) = \tau(G(T))^\perp = G(T)^*$. □

Bemerkung 6.21. Für dicht definiertes abschließbares T folgt außerdem $T^* = \overline{T}^*$ wegen

$$G(\overline{T}^*) = G(\overline{T})^* = \overline{G(T)}^* = G(T)^* = G(T^*).$$

Wenn auch T^* dicht definiert ist, so kann man T^{**} bilden. Hierbei gilt der folgende fundamentale Zusammenhang.

Theorem 6.22. *Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ dicht definiert. Dann gilt:*

$$T \text{ abschließbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{D(T^*)} = \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad \overline{T} = T^{**}.$$

Beweis. Es ist

$$\overline{G(T)} = G(T)^{\perp\perp} = (\tau^2 G(T))^{\perp\perp} = (\tau(\tau G(T))^{\perp})^{\perp} = G(T^*)^*.$$

Aus $\overline{D(T^*)} = \mathcal{H}$ folgt $\overline{G(T)} = G(T^{**})$ und $T^{**} \supset T$; mithin ist T abschließbar. Mit Theorem 6.11 folgt sogar $\overline{T} = T^{**}$. Ist $D(T^*)$ nicht dicht in $\mathcal{H}$, dann finden wir $0 \neq \psi \in D(T^*)^{\perp}$ mit $(\psi, 0) \in G(T^*)^{\perp}$. Also ist $(0, \psi) \in \tau(G(T^*)^{\perp}) = G(T^*)^* = \overline{G(T)}$ und T ist nicht abschließbar. □

Für T dicht definiert und abschließbar haben wir

$$T^* = (T^*)^{**} = T^{***} = \overline{T}^*$$

gezeigt.

Definition 6.23. Ein unbeschränkter Operator T heißt *symmetrisch*, wenn T dicht definiert ist und zudem $T \subset T^*$ gilt.

Bemerkung 6.24. Offenbar ist $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ genau dann symmetrisch, wenn T dicht definiert ist und

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle\,, \quad \forall x, y \in D(T)$$

gilt. Insbesondere ist jeder symmetrische Operator abschließbar.

Definition 6.25. Ein symmetrischer Operator heißt *selbstadjungiert*, falls $T^* = T$ gilt.

Bemerkung 6.26.

(1) Der Unterschied zwischen Symmetrie und Selbstadjungiertheit besteht darin, dass die Definitionsbereiche von T und T^* im selbstadjungierten Fall "austariert" sein müssen; man beachte, dass aus $T \subset S$ stets $S^* \subset T^*$ folgt.

(2) Es gilt: $\overline{T}$ ist selbstadjungiert $\Longleftrightarrow$ T und T^* sind beide symmetrisch.

(3) Sind S, T selbstadjungierte Operatoren mit $T \subset S$, dann gilt bereits $T = S$; vgl. Aufgabe 6.3.

(4) Für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ fallen die Begriffe Symmetrie und Selbstadjungiertheit zusammen.

(5) Selbstadjungierte Operatoren spielen eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik, wo sie zur Beschreibung von Messprozessen verwendet werden. Selbstadjungierte Operatoren besitzen eine Spektraldarstellung (Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren).

Wir sind nun an einem Kriterium für die Selbstadjungiertheit eines Operators interessiert und beweisen den folgenden Satz und das zugehörige Korollar. Im Folgenden sei $T - z$ die Kurzform von $T - zI \restriction_{D(T)}$.

Theorem 6.27. *Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ symmetrisch und es gebe ein $z \in \mathbb{C}$ mit*

$$R(T - z) = R(T - \overline{z}) = \mathcal{H}.$$

Dann ist T selbstadjungiert.

Beweis. Weil T symmetrisch ist, haben wir $T \subset T^*$. Wir müssen also noch $D(T) \supset D(T^*)$ zeigen. Sei $f \in D(T^*)$. Nach Voraussetzung finden wir ein $g \in D(T)$ mit

$$(T - z)g = (T^* - z)f.$$

Wegen $T \subset T^*$ folgt $f - g \in N(T^* - z) = R(T - \overline{z})^\perp = \mathcal{H}^\perp = \{0\}$, mithin $f = g \in D(T)$. □

Korollar 6.28. *Sei $D \subset \mathcal{H}$ ein linearer Teilraum und $T\colon D \to \mathcal{H}$ sei ein Operator mit $\langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle$ für alle $f, g \in D$. Weiter gebe es ein $z \in \mathbb{C}$ so, dass*

$$R(T - z) = R(T - \overline{z}) = \mathcal{H}.$$

Dann ist T selbstadjungiert.

Beweis. Nach Theorem 6.27 müssen wir nur $\overline{D} = \mathcal{H}$ beweisen. Sei $h \in D^\perp$. Nach Voraussetzung existiert ein $v \in D$ mit $h = (T - z)v$. Für alle $f \in D$ gilt dann

$$\langle h, f\rangle = \langle (T - z)v, f\rangle = \langle v, (T - \overline{z})f\rangle = 0.$$

Da $T - \overline{z}$ surjektiv ist, muss $v = 0$ sein. Es folgt $h = 0$. □

Beispiel 6.29.

(1) Zu einer festen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ betrachten wir den Teilraum

$$D := \{a \in \ell_2; (x_n a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2\}$$

und den Operator

$$M\colon D \to \ell_2, \quad Ma := (x_n a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \forall a \in D.$$

Man nennt M den *maximalen Multiplikationsoperator zur Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir überlegen, dass M selbstadjungiert ist:

- Es sei $\ell_{2;\text{comp}}$ der Vektorraum der Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, für die jeweils nur endlich viele a_k von Null verschieden sind. Dann gilt $\ell_{2;\text{comp}} \subset D$ und $\overline{\ell_{2;\text{comp}}} = \ell_2$ und daher ist D dicht in ℓ_2.
- Offenbar ist M symmetrisch.
- Wir zeigen noch, dass $R(M \pm \mathrm{i}) = \ell_2$: Für $a \in \ell_2$ ist $\left(\frac{a_n}{x_n+\mathrm{i}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$, da $|x_n + \mathrm{i}| \geq 1$, und sogar in $\left(\frac{a_n}{x_n+\mathrm{i}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in D$, da $\left|x_n \frac{a_n}{x_n+\mathrm{i}}\right| \leq |a_n|$. Offensichtlich gilt
$$(M \pm \mathrm{i}) \left(\frac{a_n}{x_n + \mathrm{i}}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = a.$$

Die Behauptung folgt mit Theorem 6.27.

(2) Sei
$$L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}) := \left\{ v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}; v \text{ Lebesgue-meßbar}, \forall k > 0\colon \int_{(-k,k)} |v(x)| \,\mathrm{d}x < \infty \right\}$$
und sei $V \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$ reellwertig. Im Hilbertraum $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ sei M_V der maximale Multiplikationsoperator $D(M_V) \to \mathcal{H}$ gegeben durch
$$\begin{aligned} D(M_V) &:= \{f \in \mathcal{H}; Vf \in \mathcal{H}\}, \\ M_V f &:= Vf, \quad \forall f \in D(M_V). \end{aligned}$$

Dann ist M_V selbstadjungiert: Für $f, g \in D(M_V)$ gilt
$$\langle M_V f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} V(x) f(x) \overline{g(x)} \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{V(x) g(x)} \,\mathrm{d}x = \langle f, M_V g\rangle .$$

Sei nun $f \in \mathcal{H}$ und
$$g(x) := \frac{f(x)}{V(x) + \mathrm{i}}, \quad \text{f.ü.}$$

Dann ist $g \in D(M_V)$ wegen $|V(x) + \mathrm{i}| \geq 1$ und $\left|\frac{V(x)}{V(x)+\mathrm{i}}\right| \leq 1$. Für dieses g gilt aber offenbar $(M_V + \mathrm{i})g = f$ und damit $R(M_V + \mathrm{i}) = \mathcal{H}$. Genauso sieht man $R(M_V - \mathrm{i}) = \mathcal{H}$. Wir können nun Korollar 6.28 anwenden und sehen, dass M_V selbstadjungiert ist.

Mit der Wahl $V(x) = x$ sehen wir, dass der Ortsoperator auf seinem maximalen Definitionsbereich selbstadjungiert ist.

(3) Sei $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unitär und sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Dann ist auch $S := U^{-1}TU$ auf $D(S) := U^{-1}D(T)$ selbstadjungiert; vgl. Aufgabe 6.3. Dieses Resultat kann beispielsweise auf die Fouriertransformation $\mathcal{F}\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ angewendet werden. Nach dem Satz von Plancherel ist $\mathcal{F}$ unitär. Unter $\mathcal{F}$ ist M_x unitär äquivalent zu einer selbstadjungierten Realisierung von $-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, M_{x^2} zu $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ usw.

Nach einer Version des Spektralsatzes ist *jeder* selbstadjungierte Operator unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator in einem geeigneten $L_2(X, \mathrm{d}\mu(x))$. Mit Beispiel (2) haben wir daher schon den allgemeinen Fall eines selbstadjungierten Operators kennengelernt.

Wir kommen nun zur Konstruktion selbstadjungierter Fortsetzungen für (nach unten) halbbeschränkte Operatoren und beginnen mit dem folgenden Theorem, das auf Martin Schechter (geb. 1930) zurückgeht.

Theorem 6.30. *Es seien $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ Hilberträume mit den Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|$ und es gebe eine Konstante $c \geq 0$ mit*

$$\|x\| \leq c\,\|x\|_1\,, \quad \forall x \in \mathcal{H}_1. \tag{6.2}$$

Weiter sei $\mathcal{H}_1$ dicht in $\mathcal{H}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$. Dann gibt es einen selbstadjungierten Operator $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ mit $D(T) \subset \mathcal{H}_1$ und

$$D(T) = \{u \in \mathcal{H}_1; \exists w \in \mathcal{H}\, \forall v \in \mathcal{H}_1\colon\ \langle u, v\rangle_1 = \langle w, v\rangle\}\,, \tag{6.3}$$

$$\langle u, v\rangle_1 = \langle Tu, v\rangle\,, \quad \forall u \in D(T),\ v \in \mathcal{H}_1. \tag{6.4}$$

Weiter ist $D(T)$ dicht in $\mathcal{H}_1$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$. Der selbstadjungierte Operator T ist durch die Bedingungen $D(T) \subset \mathcal{H}_1$ und die Gleichung (6.4) *eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es sei $D(T)$ wie in (6.3) und $Tu := w$, für $u \in D(T)$. Dann ist T linear und es gilt für $x, y \in D(T)$:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, y\rangle_1 = \overline{\langle y, x\rangle_1} = \overline{\langle Ty, x\rangle} = \langle x, Ty\rangle\,.$$

Wir zeigen nun, dass T surjektiv ist: Wegen

$$|\langle w, v\rangle| \leq \|w\|\,\|v\| \leq c\,\|w\|\,\|v\|_1\,, \quad w \in \mathcal{H}, \quad v \in \mathcal{H}_1,$$

ist für jedes feste $w \in \mathcal{H}$ die Zuordnung $v \mapsto \langle w, v\rangle$ ein stetiges (anti-)lineares Funktional auf $\mathcal{H}_1$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz existiert genau ein $u \in \mathcal{H}_1$ mit

$$\langle w, v\rangle = \langle u, v\rangle_1\,, \quad \forall v \in \mathcal{H}_1,$$

mithin $u \in D(T)$ und $Tu = w$. Nach Korollar 6.28 (mit der Wahl $z = 0$) ist T selbstadjungiert. Der Operator T ist auch eindeutig, denn jeder selbstadjungierte Operator S mit $D(S) \subset \mathcal{H}_1$ und (6.4) wäre eine Einschränkung von T, d.h. $T = S$. Schließlich bleibt zu zeigen, dass $D(T)$ dicht in $\mathcal{H}_1$ liegt, bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein $g \neq 0$ mit $\langle g, f\rangle_1 = 0$, für alle $f \in D(T)$. Nach (6.4) gilt dann aber $\langle Tf, g\rangle = 0$, für alle $f \in D(T)$. Weil T surjektiv ist, muss $g = 0$ sein. Widerspruch! $\square$

Man beachte, dass T ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist (und nicht in $\mathcal{H}_1$). Wegen $\langle Tu, u\rangle = \|u\|_1^2 \geq c^{-1}\|u\|$ für alle $u \in D(T)$ ist T auch positiv definit mit der positiven unteren Schranke c^{-1}. Die Voraussetzung im Theorem von Schechter kann besser auch wie folgt formuliert werden: "Es gebe eine stetige, injektive, lineare Abbildung $j\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}$ mit dichtem Bild." Aus praktischen Gründen belassen wir es aber bei der einfacheren Formulierung $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$.

Definition 6.31. Ein symmetrischer Operator T heißt *(nach unten) halbbeschränkt*, wenn es ein $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\langle Tu, u\rangle \geq \gamma \|u\|^2, \quad \forall u \in D(T); \tag{6.5}$$

wir schreiben $T \geq \gamma$.

Ist T halbbeschränkt, so definiert

$$\langle u, v\rangle_1 = \langle Tu, v\rangle + (1-\gamma)\langle u, v\rangle, \quad u, v \in D(T), \tag{6.6}$$

ein Skalarprodukt auf $D(T)$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{H}_1$ die Vervollständigung des Prä-Hilbertraums $(D(T), \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ und beweisen nun, dass $\mathcal{H}_1$ die Voraussetzungen des Theorems von Schechter erfüllt. Dazu etablieren wir zunächst die *Konsistenz* der Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_1$.

Lemma 6.32. *Sei T symmetrisch und $T \geq 1$, sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $\|u_n\| \to 0$, $n \to \infty$, und $\|u_n - u_m\|_1 \to 0$, $n, m \to \infty$. Dann gilt $\|u_n\|_1 \to 0$, $n \to \infty$.*

Beweis. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \|u_n\|_1^2 &\leq |\langle u_n, u_n - u_m\rangle_1| + |\langle u_n, u_m\rangle_1| \\ &\leq \|u_n\|_1 \|u_n - u_m\|_1 + |\langle Tu_n, u_m\rangle| . \end{aligned}$$

Unsere Voraussetzung impliziert $\|u_n\|_1 \leq C$. Wegen $\|u_n - u_m\|_1 \to 0$, $n, m \to \infty$, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$, für $n, m \geq n_0$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ gilt weiter $\langle Tu_n, u_m\rangle \to 0$, da $\|u_m\| \to 0$. Daher gibt es zu jedem n ein $m_n \in \mathbb{N}$ mit $|\langle Tu_n, u_m\rangle| \leq \varepsilon$ für alle $m \geq m_n$. Damit folgt mit $m \to \infty$ bereits $\|u_n\|_1 \leq C\varepsilon + \varepsilon$, $n \geq n_0$. ☐

Lemma 6.33. *Sei T symmetrisch und $T \geq 1$ und sei $\mathcal{H}_1$ die Vervollständigung des Prä-Hilbertraums $\mathcal{E} := (D(T), \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$. Dann ist $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ mit stetiger Einbettung; insbesondere gibt es eine Konstante c wie in* (6.2) *und $\mathcal{H}_1$ ist dicht in $\mathcal{H}$ bezüglich $\|\cdot\|$.*

Beweis. Wegen $T \geq 1$ gilt

$$\langle Tu, u\rangle = \|u\|_1^2 \geq \|u\|^2 \tag{6.7}$$

und damit (6.2) mit $c = 1$. Nach Definition besteht $\mathcal{H}_1$ aus Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen in $\mathcal{E}$. Wir zeigen, dass zu jeder Äquivalenzklasse $\tilde{x} = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathcal{E}$ ein

$x \in \mathcal{H}$ existiert, das mit $\tilde{x}$ identifiziert werden kann. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{E}$ ist, ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen (6.7) auch eine Cauchyfolge in $\mathcal{H}$ und somit existiert ein $x \in \mathcal{H}$ mit $x_n \to x$ in $\mathcal{H}$. Die Zuordnung $\tilde{x} \mapsto x$ ist wohldefiniert: Gilt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so beudetet dies nach Definition $\|x_n - y_n\|_1 \to 0$. Weiter existiert ein $y \in \mathcal{H}$ mit $y_n \to y$ in $\mathcal{H}$. Wegen

$$\|x - y\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - y_n\|_1 + \|y_n - y\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

folgt schließlich $x = y$, was zu zeigen war. Weiter ist die Abbildung $\tilde{x} \mapsto x$ injektiv, denn sind $\tilde{x} = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], \tilde{y} = [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathcal{E}$ mit $x_n \to x$ und $y_n \to x$ in $\mathcal{H}$, so gilt wegen der Konsistenz der Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_1$, $\|x_n - y_n\| \to 0$ und $\|(x_n - y_n) - (x_m - y_m)\|_1 \to 0$ schließlich $\|x_n - y_n\|_1 \to 0$, also $\tilde{x} = \tilde{y}$. Offenbar liegt $\mathcal{H}_1$ auch dicht in $\mathcal{H}$ bezüglich $\|\cdot\|$, denn $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ ist symmetrisch, also dicht definiert, und $D(T) \subset \mathcal{H}_1$ nach Definition der Vervollständigung. □

Bemerkung 6.34.

(1) Sei T halbbeschränkt wie in (6.5) und (6.6) und sei T_γ der selbstadjungierte Operator nach Theorem 6.30. Insbesondere ist dann

$$T_F \coloneqq T_\gamma + \gamma - 1,$$

eine selbstadjungierte Fortsetzung von T, die man auch die *Friedrichssche Fortsetzung von T* nennt.

(2) Sei $D \subset \mathcal{H}$ und sei $T\colon D \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Operator. Dann ist $\mathcal{H}_2 \coloneqq (D, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ mit

$$\langle u, v\rangle_2 \coloneqq \langle Tu, Tv\rangle + \langle u, v\rangle, \quad u, v \in D(T),$$

ein Hilbertraum, der den Voraussetzungen von Theorem 6.30 genügt. Der zugehörige selbstadjungierte Operator wird mit $T^*T + 1$ bezeichnet. Insbesondere ist

$$D(T^*T + 1) = \{u \in D(T); Tu \in D(T^*)\} \subset \mathcal{H}$$

dicht.

Wir diskutieren zwei Beispiele aus der Physik: den Energie- und den Impulsoperator eines quantenmechanischen Teilchens. Die Methode von Friedrichs liefert zwar eine selbstadjungierte Fortsetzung, allerdings ist nicht klar, wie der Definitionsbereich dieser Fortsetzung konkret aussieht. Hierfür sind zusätzliche Untersuchungen notwendig.

Beispiel 6.35. Im Hilbertraum $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ seien $D \coloneqq C_c^\infty(\mathbb{R})$ und $T_0\colon D \to L_2(\mathbb{R})$ definiert durch

$$T_0\varphi \coloneqq -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\varphi = -\varphi''.$$

Dann ist T_0 dicht definiert und symmetrisch, denn partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\langle T_0\varphi, \psi\rangle &= \int_{-R}^{R} (-\varphi''(x))\psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \varphi'(x)\psi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-R}^{R} \varphi(x)(-\psi''(x))\,\mathrm{d}x = \langle \varphi, T_0\psi\rangle\,;\end{aligned}$$

$R > 0$ so groß, dass $\operatorname{supp}\varphi, \operatorname{supp}\psi \subset (-R, R)$. Weiter ist T_0 halbbeschränkt wegen

$$\langle T_0\varphi, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} |\varphi'(x)|^2\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Es gibt also die Friedrichssche Fortsetzung T_F von T_0. Man kann weiterhin zeigen, dass

$$D(T_F) = \{f \in L_2(\mathbb{R}); f, f' \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}),\ f', f'' \in L_2(\mathbb{R})\}\,;$$

hierbei ist $AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ der Raum der lokal absolutstetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Ein Vorteil der Friedrichsschen Methode liegt aber genau darin, dass wir einen selbstadjungierten Operator bekommen, ohne den Definitionsbereich genau beschreiben zu müssen. Der Definitionsbereich $D(T_F)$ ist gleich dem Sobolevraum $W_2^2(\mathbb{R})$. Außerdem besitzt T_0 keine weiteren selbstadjungierten Fortsetzungen.

Beispiel 6.36. Im $\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$ betrachten wir völlig analog $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, Ω offen und zusammenhängend, den Teilraum $D \coloneqq C_c^\infty(\Omega)$ und den dicht definierten Operator

$$T_0\colon D \to L_2(\mathbb{R}^d), \quad T_0\varphi \coloneqq -\Delta\varphi.$$

Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes hat man

$$\begin{aligned}\langle T_0\varphi, \psi\rangle &= \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi\,\mathrm{d}x \\ &= \langle \varphi, T_0\psi\rangle\,,\end{aligned}$$

wobei φ und ψ in der Nähe von $\partial\Omega$ identisch verschwinden. Weiterhin haben wir

$$\langle T_0\varphi, \varphi\rangle = \|\nabla\varphi\|^2 = \int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Nach Theorem (6.30) existiert die Friedrichssche Fortsetzung T_F von T_0. T_F ist der Laplaceoperator in Ω mit homogenen Dirichletschen Randbedingungen auf $\partial\Omega$. Der Hilbertraum $\mathcal{H}_1$ ist hier der Sobolevraum $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Wenn Ω beschränkt und $\partial\Omega$ hinreichend regulär ist, so hat man

$$D(T_F) = W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega).$$

Für beschränktes Ω ist $T_F\colon D(T_F) \to L_2(\Omega)$ bijektiv mit stetiger Inverser. Falls $\Omega = \mathbb{R}^d$, so ist T_F die einzige selbstadjungierte Fortsetzung von T_0. Falls Ω beschränkt ist, so gibt es unendlich viele selbstadjungierte Fortsetzungen, z.B. solche, die zu verschiedenen homogenen Randbedingungen gehören.

Beispiel 6.37. In diesem Beispiel studieren wir den Impulsoperator $-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ auf der reellen Achse, auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ sowie auf dem Halbstrahl $[0,\infty)$. Hier hängt es in entscheidender Weise vom zugrunde liegenden Modell ab, ob eine selbstadjungierte Fortsetzung existiert (und ob sie ggf. eindeutig bestimmt ist).

(1) In $L_2(0,\infty)$ kann man den Impulsoperator $T\varphi = -\mathrm{i}\varphi'$ nicht selbstadjungiert realisieren. Der Operator T auf dem Raum $C_c^\infty(0,\infty)$ ist symmetrisch, besitzt aber keine selbstadjungierte Fortsetzung.

(2) Auf dem Kompaktum $[0,1]$ ist der Impulsoperator $T = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ nicht wesentlich selbstadjungiert, d.h. die Abschließung von T auf $C_c^\infty(0,1)$ ist keine selbstadjungierte Fortsetzung von T. Allerdings gibt es überabzählbar viele selbstadjungierte Fortsetzungen, die durch eine Kreislinie parametrisiert werden:

$$D(T_\alpha) = \{\varphi; \varphi \in AC[0,1],\, \varphi(0) = \alpha\varphi(1)\}\,, \quad |\alpha| = 1,$$

$$T_\alpha u = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u, \quad u \in D(T_\alpha).$$

(3) Auf der reellen Achse definiert man $T\varphi = -\mathrm{i}\varphi'$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, und beweist, dass T wesentlich selbstadjungiert ist. Die (eindeutig bestimmte) selbstadjungierte Fortsetzung von T hat den Definitionsbereich $\{\varphi \in AC_{\mathrm{loc}}[0,1]; \varphi, \varphi' \in L_2[0,1]\}$.

6.1 Übungen

Aufgabe 6.1.

(a) Im Hilbertraum $\mathcal{H} := L_2(0,\pi)$ seien $D := C^\infty([0,\pi])$ und $T\colon D \to \mathcal{H}$ definiert durch
$$T\varphi := -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi = -\mathrm{i}\varphi'(x).$$
Zeigen Sie, dass T nicht beschränkt ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen $f_k := \sin kx$, $k \in \mathbb{N}$.

(b) Im Hilbertraum $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ seien $D := C_c^\infty(\mathbb{R})$ und die Operatoren $A, B\colon D \to \mathcal{H}$ definiert durch

$$(A\varphi)(x) := -\mathrm{i}\varphi'(x), \quad (B\varphi)(x) := x\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Man zeige, dass A und B nicht beschränkt sind. Beweisen Sie ferner die *Kommutatorrelation*
$$AB\varphi - BA\varphi = -\mathrm{i}\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 6.2. Sei D ein Teilraum des Hilbertraums $\mathcal{H}$ und sei $T\colon D \to \mathcal{H}$ ein Operator. Man zeige:

(a) T ist genau dann abgeschlossen, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Für alle Folgen $(f_n) \subset D$ gilt:

$$\begin{pmatrix} f_n \to f \in \mathcal{H} \\ Tf_n \to g \in \mathcal{H} \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad f \in D \text{ und } Tf = g.$$

(b) Für abschließbares T ist $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$.

(c) T ist genau dann abschließbar, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Für alle Folgen $(f_n) \subset D$ gilt:

$$\begin{pmatrix} f_n \to 0 \\ Tf_n \to g \in \mathcal{H} \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad g = 0.$$

Aufgabe 6.3.

(a) Es seien S und T selbstadjungierte Operatoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit $T \subset S$. Dann gilt bereits $T = S$.

(b) Seien $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Hilberträume, es sei $U\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ unitär und es sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}_1$ ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}_1$. Dann ist $S := UTU^{-1}$ auf $D(S) := UD(T)$ ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}_2$.

Aufgabe 6.4. Es seien A, B symmetrische Operatoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D} := D(AB) \cap D(BA)$ dicht in $\mathcal{H}$. Weiter gebe es eine Konstante $h > 0$ mit

$$[A, B]u = \frac{h}{2\pi \mathrm{i}} u, \quad u \in \mathcal{D};$$

dabei ist $[A, B] = AB - BA$ der Kommutator von A und B. Dann gilt:

$$\|Au\| \, \|Bu\| \geq \frac{h}{4\pi} \|u\|^2, \quad u \in \mathcal{D}.$$

Hinweis: Man zeige $\|u\|^2 = \frac{4\pi}{h} \operatorname{Im} \langle Au, Bu \rangle$.

Aufgabe 6.5. Es seien A, B selbstadjungierte Operatoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D} := D(A) \cap D(B)$ dicht in $\mathcal{H}$, die mit einem $h > 0$ der Vertauschungsrelation

$$ABu - BAu = \frac{h}{2\pi \mathrm{i}} u, \quad u \in \mathcal{D},$$

genügen. Für $\psi \in \mathcal{D}$, $\|\psi\| = 1$, sei $E_A(\psi) := \langle A\psi, \psi \rangle$ der *Erwartungswert der Observablen A im Zustand ψ*, und

$$v_A(\psi) := \|(A - E_A(\psi))\psi\|^2 = \|A\psi\|^2 - E_A(\psi)^2$$

die *mittlere quadratische Abweichung der Meßgröße vom Erwartungswert*. Man beweise mit Hilfe von Aufgabe 6.4 die *Heisenbergsche Unschärferelation*

$$v_A(\psi) v_B(\psi) \geq \frac{h^2}{16\pi^2}.$$

Aufgabe 6.6.

(a) Sei $S\colon D(S) \to \mathcal{H}$ symmetrisch. Dann gilt

$$\|(S+\mathrm{i})u\| \geq \|u\|, \quad u \in D(S).$$

(b) Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ symmetrisch und abgeschlossen mit $R(T+\mathrm{i}) = \mathcal{H}$ und $R(T-\mathrm{i}) \neq \mathcal{H}$. Dann besitzt T *keine* selbstadjungierte Fortsetzung.

Aufgabe 6.7. Im Hilbertraum ℓ_2 sei

$$\mathcal{D} := \left\{ a \in \ell_2; \exists N = N_a \in \mathbb{N} \text{ mit } a_m = 0 \text{ für } m > N \text{ und } \sum_{m=1}^{N} a_m = 0 \right\}.$$

Wir definieren einen Operator $A\colon \mathcal{D} \to \ell_2$ durch

$$(Aa)_n := \mathrm{i}\left(\sum_{m=1}^{n-1} a_m + \sum_{m=1}^{n} a_m\right) = \mathrm{i}\left(\sum_{m=1}^{n-1} a_m - \sum_{m=n+1}^{N} a_m\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige: $\mathcal{D}$ ist dicht in ℓ_2 und A ist symmetrisch; $R(A+\mathrm{i})$ ist dicht in ℓ_2; der Vektor $e_1 := (1,0,0,\ldots)$ gehört zum Definitionsbereich von A^* und es ist $(A^*+\mathrm{i})e_1 = 0$. Man folgere mit Aufgabe 6.6, dass A keine selbstadjungierte Fortsetzung besitzt.

Aufgabe 6.8.

(a) Es sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ symmetrisch und es gebe eine Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und eine ONB $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ mit $u_k \in D(T)$ und $Tu_k = \lambda_k u_k$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\overline{T}$ selbstadjungiert und es gilt $\sigma(\overline{T}) = \overline{\{\lambda_k; k \in \mathbb{N}\}}$.

(b) Mit Hilfe von Teil (a) konstruiere man eine selbstadjungierte Realisierung von $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ im Intervall $(0,1)$, die die Funktionen $u_k := \sin(k\pi x)$, $k \in \mathbb{N}$, als Eigenfunktionen besitzt. Man darf dabei ohne Beweis benutzen, dass $\{u_k; k \in \mathbb{N}\}$ eine ONB im Hilbertraum $L_2(0,1)$ bildet.

Kapitel 7

Resolvente und Spektrum

Für beschränkte Operatoren hatten wir die Begriffe Resolventenmenge, Spektrum und Punktspektrum kennengelernt. Im unbeschränkten Fall können wir die Begriffe Spektrum und Resolvente analog definieren. Wir arbeiten auf eine disjunkte Zerlegung des Spektrums hin und beginnen zunächst mit dem Begriff der relativen Beschränktheit.

Definition 7.1. Seien $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ und $V\colon D(V) \to \mathcal{H}$ Operatoren mit $D(V) \supset D(T)$. Dann heißt V *T-beschränkt* oder *relativ beschränkt bezüglich T*, wenn es Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\|Vf\| \leq a\,\|Tf\| + b\,\|f\|\,, \quad \forall f \in D(T). \tag{7.1}$$

Das Infimum aller Zahlen a, zu denen es ein $b \in \mathbb{R}$ mit (7.1) gibt, heißt die *(relative) Schranke von V bezüglich T*. V heißt *relativ beschränkt mit Schranke* 0, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\|Vf\| \leq \varepsilon\,\|Tf\| + c_\varepsilon\,\|f\|\,, \quad \forall f \in D(T).$$

Bemerkung 7.2.

(1) Offenbar hat jeder beschränkte Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ die T-Schranke 0.

(2) Ist α das Infimum aller Zahlen a mit (7.1), so gibt es i. Allg. keine Zahl β, so dass $\|Vf\| \leq \alpha\,\|Tf\| + \beta\,\|f\|$ für alle $f \in D(T)$; beispielsweise könnte $\alpha = 0$ sein.

(3) Äquivalent zu (7.1) ist die Bedingung

$$\exists a, b \in \mathbb{R}\; \forall f \in D(T)\colon\; \|Vf\|^2 \leq a\,\|Tf\|^2 + b\,\|f\|^2\,,$$

wie man mit der Ungleichung von Cauchy-Young zeigen kann, vgl. Aufgabe 7.1.

Von besonderer Bedeutung ist der Fall, in dem V eine relative Schranke kleiner als 1 bezüglich T besitzt.

Theorem 7.3. *Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen (abschließbar) und sei $V\colon D(T) \to \mathcal{H}$ relativ beschränkt bezüglich T mit Schranke kleiner 1. Dann ist $T+V\colon D(T) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen (bzw. abschließbar und $D(\overline{T+V}) = D(\overline{T})$).*

Beweis. Zunächst haben wir für alle $f \in D(T)$

$$\|Tf\| \leq \|(T+V)f\| + \|Vf\| \leq \|(T+V)f\| + a\,\|Tf\| + b\,\|f\|$$

mit einem $a < 1$, also

$$(1-a)\,\|Tf\| \leq \|(T+V)f\| + b\,\|f\|. \tag{7.2}$$

Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ eine Folge mit $f_n \to f$ und $(T+V)f_n \to g$. Nach (7.2) ist $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und nach (7.1) ist dann auch $(Vf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Weil T nach Voraussetzung abgeschlossen ist, muss $f \in D(T)$ und $Tf_n \to Tf$ gelten. Aus (7.1) folgt nun $Vf_n \to Vf$, also $g = (T+V)f$. Der Fall, in dem T abschließbar ist, geht analog. □

Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $|\frac{b}{a}| < 1$ wissen wir

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Das nachfolgende Theorem zeigt eine entsprechende Reihenentwicklung für Operatoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Die auf diese Weise erhaltene Reihe wird dann auch *Neumannsche Reihe* genannt.

Theorem 7.4. *Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen und bijektiv und es sei $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Sei $V\colon D(T) \to \mathcal{H}$ ein Operator mit $\|VT^{-1}\| < 1$. Dann ist $T+V\colon D(T) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen und bijektiv mit $(T+V)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dabei gilt*

$$(T+V)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n T^{-1}(VT^{-1})^n \tag{7.3}$$

und die Reihe konvergiert in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Beweis. Für alle $f \in D(T)$ ist $\|Vf\| \leq \|VT^{-1}\|\,\|Tf\|$ und unsere Voraussetzung impliziert, dass V relativ beschränkt ist mit Schranke kleiner 1. Nach Theorem 7.3 ist dann $T+V : D(T) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen. Wegen

$$\|(T+V)f\| \geq \|Tf\| - \|Vf\| \geq \left(1 - \left\|VT^{-1}\right\|\right)\|Tf\|$$

ist $T+V$ injektiv. Seien A_p die Partialsummen der Reihe in (7.3). Für $q > p$ gilt

$$\|A_q - A_p\| = \left\|\sum_{n=p+1}^{q}(-1)^n T^{-1}(VT^{-1})^n\right\|$$

$$\leq \left\|T^{-1}\right\| \left\|VT^{-1}\right\|^{p+1} \sum_{n=0}^{q-p-1} \left\|VT^{-1}\right\|^{n}$$
$$\leq \frac{\|T^{-1}\|}{1-\|VT^{-1}\|} \left\|VT^{-1}\right\|^{p+1},$$

da $\|VT^{-1}\| < 1$. Also ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine Cauchyfolge. Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ der zugehörige Limes. Für $f \in \mathcal{H}$ und $p \in \mathbb{N}$ ist $A_p f \in D(T)$ und es gilt

$$\begin{aligned}(T+V)A_p f &= \sum_{n=0}^{p} (-1)^n (T+V)T^{-1}(VT^{-1})^n f \\ &= \sum_{n=0}^{p} (-1)^n (VT^{-1})^n f + \sum_{n=0}^{p} (-1)^n (VT^{-1})^{n+1} f \\ &= f + (-1)^p (VT^{-1})^{p+1} f.\end{aligned}$$

Wir erkennen $(T+V)A_p f \to f$ für $p \to \infty$. Weil $T+V$ abgeschlossen ist, folgt $Af = \lim_{p\to\infty} A_p f \in D(T+V)$ und $(T+V)Af = f$. Also ist $T+V$ surjektiv und $(T+V)^{-1} = A$. □

Wir erinnern an die Definitionen von Spektrum und Resolvente.

Definition 7.5. Für abgeschlossenes $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ definieren wir die *Resolventenmenge* $\rho(T)$ durch

$$\begin{aligned}\rho(T) &:= \{z \in \mathbb{C}; T-z\colon D(T) \to \mathcal{H} \text{ bijektiv}, (T-z)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\} \\ &:= \{z \in \mathbb{C}; T-z\colon D(T) \to \mathcal{H} \text{ bijektiv}\},\end{aligned}$$

die *Resolvente von* T als Abbildung

$$\rho(T) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad z \mapsto (T-z)^{-1}$$

und das *Spektrum* $\sigma(T)$ durch

$$\sigma(T) := \mathbb{C}\backslash\rho(T).$$

Bemerkung 7.6. Sei T abgeschlossen und $z \in \mathbb{C}$ so, dass $T-z$ bijektiv ist. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist $(T-z)^{-1}$ beschränkt, siehe [W-I, Thm. 4.3 & 4.4]. Dies etabliert die Gleichheit der beiden Definitionen von $\rho(T)$.

Auch die Begriffe Eigenwert und Punktspektrum sollen für unbeschränkte Operatoren definiert werden.

Definition 7.7. Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ ein Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt ein *Eigenwert von* T, falls $N(T-\lambda) \neq \{0\}$ ist, d.h. falls es ein $u \in D(T)\backslash\{0\}$ gibt mit $Tu = \lambda u$. Die Dimension von $N(T-\lambda)$ heißt die *geometrische Vielfachheit von* λ. Die Menge der Eigenwerte von T nennen wir das *Punktspektrum von* T, in Zeichen $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Das Punktspektrum $\sigma_p(T)$ besteht also aus allen $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $T - \lambda$ nicht injektiv ist. Wir studieren nun die Menge alle $z \in \mathbb{C}$, für die $T - z$ zwar injektiv, aber nicht surjektiv ist. Es gibt zwei Möglichkeiten: Entweder $R(T - z)$ ist dicht in $\mathcal{H}$ oder $R(T - z)$ ist nicht dicht in $\mathcal{H}$.

Definition 7.8. Für abgeschlossenes $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ seien

$$\sigma_{\mathrm{r}}(T) \coloneqq \{z \in \mathbb{C}; T - z \text{ injektiv}, R(T - z)^{\perp} \neq \{0\}\}$$

das *Residualspektrum von* T und

$$\sigma_{\mathrm{cont}}(T) \coloneqq \{z \in \mathbb{C}; T - z \text{ injektiv}, R(T - z)^{\perp} = \{0\},\ R(T - z) \neq \mathcal{H}\}$$

das *kontinuierliche Spektrum von* T.

Bemerkung 7.9. Sei T abgeschlossen und sei $z \in \sigma_{\mathrm{cont}}(T)$. Dann ist die Resolvente $(T - z)^{-1}\colon R(T - z) \to \mathcal{H}$ ein dicht definierter, abgeschlossener Operator. Jedoch ist $(T - z)^{-1}$ *nicht* beschränkt, denn ein beschränkter, dicht definierter und abgeschlossener Operator ist nach dem BLT-Theorem notwendigerweise auf dem ganzen Hilbertraum definiert.

Theorem 7.10. *Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen. Dann sind $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, $\sigma_{\mathrm{r}}(T)$ und $\sigma_{\mathrm{cont}}(T)$ paarweise disjunkte Teilmengen von $\sigma(T)$ und es gilt*

$$\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{r}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{cont}}(T).$$

Beweis. Es folgt aus unseren Definitionen, dass $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, $\sigma_{\mathrm{r}}(T)$ und $\sigma_{\mathrm{cont}}(T)$ paarweise disjunkt und Teilmengen von $\sigma(T)$ sind. Zu zeigen bleibt daher, dass $\sigma(T) \subset \sigma_{\mathrm{p}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{r}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{cont}}(T)$ gilt. Sei also $z \in \sigma(T)$. Dann ist $T - z$ nicht injektiv oder nicht surjektiv. Im Fall $T - z$ nicht injektiv muss $z \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ sein. Ist $T - z$ injektiv und $R(T - z)$ nicht dicht, so folgt $z \in \sigma_{\mathrm{r}}(T)$. Ist $T - z$ injektiv, $\overline{R(T - z)} = \mathcal{H}$, aber $R(T - z) \neq \mathcal{H}$, so ist $z \in \sigma_{\mathrm{cont}}(T)$. □

Theorem 7.11. *Sei T dicht definiert und abgeschlossen. Dann gilt*

$$\sigma(T^*) = \sigma(T)^* = \{\overline{z}; z \in \sigma(T)\}.$$

Beweis. Aufgabe 7.2. □

Theorem 7.12. *Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ dicht definiert, abgeschlossen und injektiv und es sei $R(T)$ dicht in $\mathcal{H}$. Für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gilt dann*

$$\lambda \in \sigma(T) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1}).$$

Beweis. Aufgabe 7.3.

Theorem 7.13 (Die Neumannsche Reihe). *Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen und sei $z_0 \in \rho(T)$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit*

$$|z - z_0| < \frac{1}{\|(T - z_0)^{-1}\|}$$

ist dann $z \in \rho(T)$ und $(T - z)^{-1}$ wird gegeben durch die (in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ konvergente) Neumannsche Reihe

$$(T - z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n (T - z_0)^{-n-1}.$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 7.4 mit der Wahl $V = (z_0 - z)I$. □

Korollar 7.14. *Für abgeschlossenes $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ ist $\rho(T) \subset \mathbb{C}$ offen und $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$ ist abgeschlossen.*

Definition 7.15. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und sei X ein Banachraum. Eine Funktion $F\colon \Omega \to X$ heißt holomorph oder analytisch, wenn es zu jedem $z_0 \in \Omega$ ein $r > 0$ und eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset X$ gibt mit

$$\begin{aligned}
&B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\} \subset \Omega,\\
&\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_X^{1/n} \le \frac{1}{r} \text{ und}\\
&F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n f_n, \quad |z - z_0| < r.
\end{aligned}$$

Korollar 7.16. *Sei T ein abgeschlossener Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann sind die folgenden Abbildungen holomorph im Sinne von Definition 7.15:*

$$\begin{aligned}
(T - z)^{-1} :&\quad \rho(T) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}), & z &\mapsto (T - z)^{-1},\\
(T - z)^{-1}u :&\quad \rho(T) \to \mathcal{H}, & z &\mapsto (T - z)^{-1}u,\\
\langle (T - z)^{-1}u, v\rangle :&\quad \rho(T) \to \mathbb{C}, & z &\mapsto \langle (T - z)^{-1}u, v\rangle,
\end{aligned}$$

für festes $u \in \mathcal{H}$ bzw. feste $u, v \in \mathcal{H}$.

Theorem 7.17 (Die zweite Resolventengleichung). *Es seien $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ und $S\colon D(S) \to \mathcal{H}$ bijektiv mit $D(S) \subset D(T)$. Dann gilt:*

$$T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S - T)S^{-1}.$$

Beweis. Wegen $T^{-1}Tf = f$ für alle $f \in D(T)$ und $SS^{-1}g = g$ für alle $g \in \mathcal{H}$ gilt

$$S^{-1} + T^{-1}(S - T)S^{-1} = T^{-1}TS^{-1} + T^{-1}(S - T)S^{-1} = T^{-1}SS^{-1} = T^{-1}.$$

□

Bemerkung 7.18. Die zweite Resolventengleichung ist analog zur Bruchgleichung $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a}(b-a)\frac{1}{b}$, für reelle $a, b \neq 0$.

Korollar 7.19 (Die erste Resolventengleichung). *Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen. Dann gilt für alle $z, w \in \rho(T)$*

$$(T-z)^{-1} - (T-w)^{-1} = (z-w)(T-z)^{-1}(T-w)^{-1}.$$

Beweis. Klar. □

Lemma 7.20. *Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ symmetrisch und sei $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, also $\operatorname{Im}(z) \neq 0$. Dann gilt:*

$$\|(T-z)u\| \geq |\operatorname{Im}(z)| \, \|u\| , \quad \forall u \in D(T).$$

Beweis. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \|(T-z)u\|^2 &= \|(T-\operatorname{Re}(z))u\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle (T-\operatorname{Re}(z))u, \mathrm{i}\operatorname{Im}(z)u\rangle + |\operatorname{Im}(z)|^2 \|u\|^2 \\ &\geq |\operatorname{Im}(z)|^2 \|u\|^2 , \end{aligned} \tag{7.4}$$

denn im gemischten Term ist $\langle (T-\operatorname{Re}(z))u, u\rangle \in \mathbb{R}$ wegen der Symmetrie von $T - \operatorname{Re}(z)$ und damit

$$\operatorname{Re}[-\mathrm{i}\operatorname{Im}(z)\langle (T-\operatorname{Re}(z))u, u\rangle] = 0.$$

□

Lemma 7.21. *Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ abschließbar. Weiter sei $z \in \mathbb{C}$ mit*

$$\|(T-z)u\| \geq \eta \|u\| , \quad \forall u \in D(T),$$

für ein $\eta > 0$. Dann gilt

$$R(\overline{T} - z) \supset \overline{R(T-z)}.$$

Beweis. Aufgabe 7.4. □

Definition 7.22. Ein symmetrischer Operator $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ heißt *wesentlich selbstadjungiert*, wenn $\overline{T}$ selbstadjungiert ist.

Bemerkung 7.23. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} T \text{ wesentlich selbstadjungiert} &\iff \overline{T} = \overline{T}^* = T^* \\ &\iff T^{**} = T^* \\ &\iff T^* \text{ symmetrisch.} \end{aligned}$$

Das nachfolgende Theorem erinnert an Theorem 6.27.

Theorem 7.24. *Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ symmetrisch, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und*

$$\overline{R(T-z)} = \mathcal{H} = \overline{R(T-\overline{z})}.$$

Dann ist T wesentlich selbstadjungiert.

Beweis. Aufgabe 7.4. $\square$

Theorem 7.25. *Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ symmetrisch mit $R(T)$ dicht in $\mathcal{H}$ und*

$$\|Tu\| \geq \|u\| \quad \textit{oder} \quad \langle Tu, u\rangle \geq \|u\|^2, \quad \forall u \in D(T).$$

Dann ist T wesentlich selbstadjungiert.

Beweis. Aufgabe 7.4. $\square$

Theorem 7.26. *Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ symmetrisch und abgeschlossen. Dann ist T genau dann selbstadjungiert, wenn $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Beweis. Aus $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ folgt $\rho(T) \supset \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und mithin $\pm\mathrm{i} \in \rho(T)$. Dann sind die Operatoren $(T \pm \mathrm{i})\colon D(T) \to \mathcal{H}$ bijektiv, insbesondere gilt $R(T \pm \mathrm{i}) = \mathcal{H}$. Nach Theorem 6.27 ist T dann selbstadjungiert. Für die andere Richtung wählen wir $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, so dass also $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ gilt. Nach Lemma 7.20 gilt dann

$$\|(T-z)u\| \geq |\mathrm{Im}(z)|\,\|u\|, \quad \forall u \in D(T).$$

Also ist $T-z$ injektiv. Genauso sieht man, dass $T-\overline{z}$ injektiv ist. Also gilt

$$R(T-z)^{\perp} = N(T^* - \overline{z}) = N(T-\overline{z}) = \{0\}$$

und daher sind $R(T-z)$ und $R(T-\overline{z})$ dicht in $\mathcal{H}$. Mit Lemma 7.21 folgt

$$R(T-z) = R(\overline{T}-z) \supset \overline{R(T-z)} = \mathcal{H}.$$

Mithin ist $T-z$ surjektiv und $z \in \rho(T)$. $\square$

Theorem 7.27. *Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ symmetrisch und abgeschlossen. Dann ist T genau dann selbstadjungiert, wenn $\sigma_{\mathrm{r}}(T) = \emptyset$ gilt.*

Beweis. Wir nehmen $\sigma_{\mathrm{r}}(T) = \emptyset$ an. Wegen Lemma 7.20 ist $T \pm \mathrm{i}$ injektiv, also $\pm\mathrm{i} \notin \sigma_{\mathrm{p}}(T)$. Nach Voraussetzung ist $\pm\mathrm{i} \notin \sigma_{\mathrm{r}}(T)$. Also muss $R(T \pm \mathrm{i})$ dicht in $\mathcal{H}$ sein. Nach Theorem 7.24 ist T wesentlich selbstadjungiert, d.h. $T = \overline{T}$ ist selbstadjungiert. Umgekehrt: Sei T selbstadjungiert. Wir wissen bereits, dass $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ gilt. Also genügt es, $\sigma_{\mathrm{r}}(T) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ zu zeigen. Für $z \in \mathbb{R}$ gilt aber

$$N(T-z) = N(T^* - z) = R(T-z)^{\perp}$$

und es treten die beiden Fälle auf:

(1) $N(T-z) = \{0\}$, also $R(T-z)^{\perp} = \{0\}$ und $z \notin \sigma_{\mathrm{r}}(T)$,

(2) $N(T-z) \neq \{0\}$, also $z \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ und daher ebenfalls $z \notin \sigma_{\mathrm{r}}(T)$. $\square$

Wir wollen unsere bisherigen Ergebnisse in zwei Theoremen zusammenfassen. Das folgende Theorem charakterisiert die selbstadjungierten Operatoren.

Theorem 7.28. *Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ symmetrisch und abgeschlossen. Dann sind äquivalent:*

(1) $T = T^*$,

(2) $\exists z \in \mathbb{C}\colon R(T-z) = R(T-\overline{z}) = \mathcal{H}$,

(3) $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\colon R(T-z) = \mathcal{H}$,

(4) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$,

(5) $\sigma_{\mathrm{r}}(T) = \emptyset$.

Unser zweites Theorem charakterisiert die wesentlich selbstadjungierten Operatoren.

Theorem 7.29. *Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ symmetrisch.*

1. *Dann sind äquivalent:*

   (1) $\overline{T} = T^*$

   (2) $\exists z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\colon \overline{R(T-z)} = \overline{R(T-\overline{z})} = \mathcal{H}$,

   (3) $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\colon \overline{R(T-z)} = \mathcal{H}$,

   (4) $\sigma(\overline{T}) \subset \mathbb{R}$,

   (5) $\sigma_{\mathrm{r}}(\overline{T}) = \emptyset$.

2. *Falls zusätzlich $\|Tu\| \geq \|u\|$ gilt, für alle $u \in D(T)$, so kann man* (2) *ersetzen durch*

   (2') $\overline{R(T)} = \mathcal{H}$*; vgl. Aufgabe 7.4.*

Bemerkung 7.30.

(1) Aus $T_1 \subset T_2$ und T_1, T_2 selbstadjungiert folgt bereits $T_1 = T_2$.

(2) Ist T wesentlich selbstadjungiert, so ist $\overline{T}$ die einzige selbstadjungierte Fortsetzung von T.

7.1 Übungen

Aufgabe 7.1. Es seien $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ und $V\colon D(V) \to \mathcal{H}$ Operatoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit $D(T) \subset D(V)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Bedingungen:

(i) Es gibt Zahlen $0 \le a < 1$ und $b \ge 0$ mit

$$\|Vf\| \le a\,\|Tf\| + b\,\|f\|\,, \quad \forall f \in D(T).$$

(ii) Es gibt Zahlen $0 \le a' < 1$ und $b' \ge 0$ mit

$$\|Vf\|^2 \le a'\,\|Tf\|^2 + b'\,\|f\|^2\,, \quad \forall f \in D(T).$$

Aufgabe 7.2. Sei T dicht definiert und abgeschlossen. Dann gilt

$$\sigma(T^*) = \{z \in \mathbb{C}; \overline{z} \in \sigma(T)\}.$$

Hinweis: Es ist $N(T^* - \overline{z}) = R(T - z)^{\perp}$.

Aufgabe 7.3. Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ dicht definiert, abgeschlossen und injektiv und sei $R(T)$ dicht in $\mathcal{H}$. Für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gilt dann:

$$\lambda \in \sigma(T) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1}).$$

Hinweis: Für $0 \neq \zeta \in \rho(T)$ und $u \in \mathcal{H}$ ist $-\zeta(T^{-1} - \zeta^{-1})T(T-\zeta)^{-1}u = u$.

Aufgabe 7.4.

(a) Es sei T ein symmetrischer Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit

$$\|Tf\| \ge \|f\|\,, \quad \forall f \in D(T),$$

und mit dichtem Bild, d.h. $\overline{R(T)} = \mathcal{H}$. Dann ist $\overline{T}$ selbstadjungiert.
Hinweis: Man zeige zunächst $R(\overline{T}) \supset \overline{R(T)}$.

(b) Sei T ein symmetrischer Operator mit $R(T \pm \mathrm{i})$ dicht in $\mathcal{H}$. Dann ist $\overline{T}$ selbstadjungiert.
Hinweis: Man rechne nach, dass $\|(T+\mathrm{i})f\| \ge \|f\|$ für alle $f \in D(T)$ gilt.

Aufgabe 7.5. Für einen Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ zeige man:

(a) Für $z \in \mathbb{C}$ und $|z| > \|A\|$ gilt $\|(A-z)f\| \ge (|z| - \|A\|)\,\|f\|$, $\forall f \in \mathcal{H}$.

(b) Es ist $\{z \in \mathbb{C}; |z| > \|A\|\} \subset \rho(A)$. (*Hinweis:* Theorem 7.4.)

(c) Unter Verwendung des Satzes von Liouville zeige man $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Kapitel 8

Störungstheorie

In vielen Anwendungsproblemen hat man einen selbstadjungierten Operator T und betrachtet dann den Operator $T + V$ mit einem geeigneten V. Besonders wichtig ist der Fall, wenn die Störung durch V nichts an der Selbstadjungiertheit von T verändert, wenn die Störung also gewissermaßen “klein” ist. Mit Fragestellungen dieser Art beschäftigt sich die Störungstheorie. Ein fundamentaler Störungssatz geht auf T. Kato und F. Rellich zurück.

Theorem 8.1 (Kato-Rellich). *Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert und es sei $V\colon D(T) \to \mathcal{H}$ symmetrisch. Weiter sei V relativ beschränkt bezüglich T mit Schranke < 1, d.h., es gebe Konstanten $a < 1$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $\|Vu\| \leq a\|Tu\| + b\|u\|$ für alle $u \in D(T)$. Dann ist $T + V\colon D(T) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert.*

Beweis. Wir zeigen mit Theorem 7.4, dass die Operatoren

$$T + V \pm c\mathrm{i}\colon D(T) \to \mathcal{H}$$

für hinreichend großes $c \in \mathbb{R}$ surjektiv sind und wenden dann Theorem 6.27 an. Trivialerweise ist $T + V\colon D(T) \to \mathcal{H}$ symmetrisch. Weil T selbstadjungiert ist, ist $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ und daher ist $T \pm \mathrm{i}c\colon D(T) \to \mathcal{H}$ bijektiv für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $(T \pm \mathrm{i}c)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Um Theorem 7.4 anwenden zu können, beweisen wir noch

$$\limsup_{c\to\infty} \left\|V(T \pm \mathrm{i}c)^{-1}\right\| \leq a.$$

Für $f \in \mathcal{H}$ ist $(T \pm \mathrm{i}c)^{-1}f \in D(T)$ und daher

$$\left\|V(T \pm \mathrm{i}c)^{-1}f\right\| \leq a\left\|T(T \pm \mathrm{i}c)^{-1}f\right\| + b\left\|(T \pm \mathrm{i}c)^{-1}f\right\|.$$

Weiter folgt aus

$$\|(T \pm \mathrm{i}c)u\|^2 = \|Tu\|^2 + c^2\|u\|^2, \quad \forall u \in D(T),$$

mit der speziellen Setzung $u := (T \pm \mathrm{i}c)^{-1}f$

$$\|f\|^2 = \left\|T(T \pm \mathrm{i}c)^{-1}f\right\|^2 + c^2\left\|(T \pm \mathrm{i}c)^{-1}f\right\|^2,$$

also

$$\left\| T(T \pm \mathrm{ic})^{-1} f \right\| \leq \| f \|$$

und

$$\left\| (T \pm \mathrm{ic})^{-1} f \right\| \leq \frac{1}{c} \| f \| .$$

Wir erschließen

$$\left\| V(T \pm \mathrm{ic})^{-1} f \right\| \leq \left(a + \frac{b}{c} \right) \| f \| , \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Nach Theorem 7.4 ist $T + V \pm \mathrm{ic}$ für hinreichend große $c > 0$ surjektiv. Mit Theorem 6.27 folgt, dass $T + V$ selbstadjungiert ist. □

Wir wollen als Anwendungsbeispiel den Schrödinger-Operator des Wasserstoffatoms betrachten. Sei H_F die Friedrichssche Fortsetzung von $H_0 := -\Delta \restriction_{C_c^\infty(\mathbb{R}^d)}$ wie in Beispiel 6.36. Dann ist H_F selbstadjungiert und es gilt

$$\langle H_0 u, v \rangle = \langle -\Delta u, v \rangle = \langle \nabla u, \nabla v \rangle , \quad \forall u, v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

und

$$\langle (H_F + 1) u, v \rangle = \langle u, v \rangle_1 , \quad \forall u \in D(H_F), \forall v \in \mathcal{H}_1,$$

mit $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{H}_1 \subset L_2(\mathbb{R}^d)$ und $D(H_F)$ dicht in $\mathcal{H}_1$ bezüglich $\|\cdot\|_1$, vgl. Theorem 6.30. Wir wollen jetzt zu H_F den Multiplikationsoperator M_V zum elektrostatischen Potential (sog. *Coulombpotential*)

$$V(x) := -\frac{1}{|x|}$$

hinzuaddieren. Offensichtlich ist M_V nicht halbbeschränkt. Wir etablieren daher eine Abschätzung relativ zu H_F.

Lemma 8.2. *Sei $u \in C^1(\mathbb{R}^d)$ reellwertig, $R > 0$ und $\alpha < d$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \int_{|x|<R} |x|^{-\alpha} u^2(x) \, \mathrm{d}x = \frac{R^{1-\alpha}}{d-\alpha} & \int_{|x|=R} u^2(x) \, \mathrm{d}\omega \\ & - \frac{2}{d-\alpha} \int_{|x|<R} |x|^{1-\alpha} u(x) \frac{x}{|x|} \cdot (\nabla u)(x) \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Im Beweis verwenden wir Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^d$. Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{S}^{d-1} := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d ; |\xi| = 1 \right\}$$

die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^d$ und mit $\mathrm{d}\omega_\xi$ das Oberflächenmaß auf $\mathbb{S}^{d-1}$. Für stetiges $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zeigt man

$$\int_{|x|<R} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^R \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(r\xi) \, \mathrm{d}\omega_\xi \right) r^{d-1} \, \mathrm{d}r, \tag{8.2}$$

$r = |x|$ und $\xi = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{r}$.

Beweis. Für festes $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r^{d-\alpha}}{d-\alpha}u^2(r\xi)\right) = r^{d-\alpha-1}u^2(r\xi) + \frac{r^{d-\alpha}}{d-\alpha}2u(r\xi)\nabla u(r\xi)\cdot\xi.$$

Integration zwischen 0 und R liefert

$$\begin{aligned}\frac{r^{d-\alpha}}{d-\alpha}u^2(r\xi)\Big|_0^R &= \int_0^R r^{d-\alpha-1}u^2(r\xi)\,\mathrm{d}r \\ &\quad +\frac{2}{d-\alpha}\int_0^R r^{d-\alpha}u(r\xi)\xi\cdot(\nabla u)(r\xi)\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Integrieren wir nun noch über die Einheitssphäre $\mathbb{S}^{d-1}$, so erhalten wir links

$$\frac{R^{d-\alpha}}{d-\alpha}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} u^2(R\xi)\,\mathrm{d}\omega_\xi = \frac{R^{1-\alpha}}{d-\alpha}\int_{|x|=R} u^2(x)\,\mathrm{d}\omega_x$$

und auf der rechten Seite

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^R r^{d-\alpha-1}u^2(r\xi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\omega_\xi &= \int_0^R\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} r^{-\alpha}u^2(r\xi)\,\mathrm{d}\omega_\xi\right)r^{d-1}\,\mathrm{d}r \\ &= \int_{|x|<R}|x|^{-\alpha}u^2(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^R r^{d-\alpha}u(r\xi)\xi\cdot\nabla u(r\xi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\omega_\xi \\ &\quad= \int_0^R\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} r^{1-\alpha}u(r\xi)\xi\cdot\nabla u(r\xi)\,\mathrm{d}\omega_\xi\right)r^{d-1}\,\mathrm{d}r \\ &\quad= \int_{|x|<R}|x|^{1-\alpha}u(x)\left(\frac{x}{|x|}\cdot\nabla u(x)\right)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

Wir diskutieren jetzt zunächst den Fall $d \geq 2$. Es seien $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\varepsilon > 0$ und $\alpha = 1$ in (8.1). Dann gilt

$$\left\|r^{-1/2}u\right\|^2 = -\frac{2}{d-1}\left\langle u, \frac{x}{|x|}\cdot\nabla u\right\rangle \leq \frac{1}{d-1}\left(\varepsilon\left\|\nabla u\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left\|u\right\|^2\right),$$

wobei wir R so groß gewählt haben, dass supp u ganz in der Kugel $B_R(0)$ enthalten ist. Wir erhalten nun

$$\langle -\Delta u, u\rangle - \int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{r}|u(x)|^2\,\mathrm{d}x \geq \left(1-\frac{\varepsilon}{d-1}\right)\left\|\nabla u\right\|^2 - \frac{1}{\varepsilon(d-1)}\left\|u\right\|^2.$$

Die Wahl $\varepsilon = d - 1$ liefert die optimale untere Schranke $-(d-1)^{-2}$. Es existiert daher die Friedrichssche Fortsetzung von $(-\Delta - \frac{1}{|x|}) \restriction_{C_c^\infty(\mathbb{R}^d)}$, die wir mit $(H_0 + V)_F$ bezeichnen. Weiter stimmen die Hilberträume $\mathcal{H}_1$ für die beiden Operatoren H_F und $(H_0 + V)_F$ überein.

Schließlich diskutieren wir noch den Fall $d \geq 3$. Mit Polarkoordinaten sieht man, dass $r^{-1}u \in L_2(\mathbb{R}^d)$ für alle $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Mit $\alpha = 2$ folgt aus (8.1) für alle $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ die *Hardysche Ungleichung*

$$\left\|r^{-1}u\right\|^2 = -\frac{2}{d-2}\left\langle r^{-1}u, \frac{x}{r} \cdot \nabla u\right\rangle \leq \frac{2}{d-2}\left\|r^{-1}u\right\| \|\nabla u\| .$$

Es folgt

$$\left\|r^{-1}u\right\| \leq \frac{2}{d-2}\|\nabla u\|$$

und

$$\begin{aligned}
\left\|r^{-1}u\right\|^2 &\leq \left(\frac{2}{d-2}\right)^2 \|\nabla u\|^2 \\
&= \left(\frac{2}{d-2}\right)^2 \langle \nabla u, \nabla u\rangle \\
&= \left(\frac{2}{d-2}\right)^2 \langle -\Delta u, u\rangle \\
&\leq \left(\frac{2}{d-2}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon^2}{2}\|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}\|u\|^2\right).
\end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $C_\varepsilon \geq 0$ so, dass

$$\left\|\frac{1}{|x|}u\right\|^2 \leq \varepsilon \|\Delta u\|^2 + C_\varepsilon \|u\|^2$$

für alle $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Hieraus folgt mit Aufgabe 7.1, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c_\varepsilon \geq 0$ gibt mit

$$\left\|\frac{1}{|x|}u\right\| \leq \varepsilon \|\Delta u\| + c_\varepsilon \|u\| .$$

Wir erkennen, dass der Multiplikationsoperator M_V relativ beschränkt bezüglich H_0 ist; die relative H_0-Schranke ist 0. Weil $\overline{H_0}$ selbstadjungiert ist (vgl. [21, 24, 31]), folgt nach Kato-Rellich, dass auch die Summe $H_0 + V$ auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 3$, wesentlich selbstadjungiert ist. Insbesondere stimmen die Definitionsbereiche der selbstadjungierten Fortsetzungen überein und es gilt

$$\overline{H_0} = H_F, \quad (H_0 + V)_F = \overline{H_0 + V}.$$

8.1 Übungen

Aufgabe 8.1. Beweisen Sie die Gültigkeit von Gleichung (8.2).
Hinweis: Führen Sie Polarkoordinaten ein und wenden Sie die Transformationsformel an.

Kapitel 9

Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

Wir erinnern zunächst an einige Grundbegriffe:

Ein Operator $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt *(Orthogonal)projektion*, falls $P^2 = P = P^*$ gilt. Für symmetrische Operatoren $A, B \in \mathcal{L}(H)$ schreiben wir $A \leq B$, falls

$$\langle Au, u \rangle \leq \langle Bu, u \rangle\,, \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Für zwei Projektionen P und Q gilt

$$P \leq Q \quad \Longleftrightarrow \quad R(P) \subset R(Q) \quad \Longleftrightarrow \quad PQ = QP = P.$$

Zur Konvergenz von beschränkten Operatoren: Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine Folge beschränkter Operatoren und sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Wir unterscheiden die folgenden Konvergenzbegriffe:

(i) *Norm-Konvergenz* bedeutet $\|A_n - A\| \to 0$, $n \to \infty$, d.h.,

$$\sup\{\|A_n f - Af\|\,;\, \|f\| \leq 1\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

(ii) *Starke Konvergenz* bedeutet: $\forall f \in \mathcal{H}\colon A_n f \to Af$, $n \to \infty$.

(iii) *Schwache Konvergenz* bedeutet: $\forall f, g \in \mathcal{H}\colon \langle A_n f, g \rangle \to \langle Af, g \rangle$, $n \to \infty$.

Es gilt: Norm-Konvergenz $\Longrightarrow$ starke Konvergenz $\Longrightarrow$ schwache Konvergenz.

Definition 9.1. Es sei $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine Familie von Projektionen mit den folgenden Eigenschaften:

(i) *Monotonie:* $\lambda \leq \mu \Longrightarrow E(\lambda) \leq E(\mu)$.

(ii) *Starke rechtsseitige Stetigkeit:* $\forall \lambda \in \mathbb{R}\, \forall f \in \mathcal{H}\colon E(\lambda + \varepsilon) f \to E(\lambda) f$, $\varepsilon \downarrow 0$.

(iii) Für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt $E(\lambda) f \to f$, $\lambda \to \infty$, und $E(\lambda) f \to 0$, $\lambda \to -\infty$.

Dann heißt $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine *Spektralschar* oder *Zerlegung der Identität auf* $\mathcal{H}$.

Bemerkung 9.2. Wieso fordern wir gerade starke Konvergenz in (ii) und (iii)?

(1) Schwache Konvergenz und Monotonie implizieren bereits die starke Konvergenz, vgl. Aufgabe 9.1.

(2) Norm-Stetigkeit und die Monotonie von Projektionen implizieren Konstanz, vgl. Aufgabe 9.2.

Bemerkung 9.3. Für jede Spektralschar $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ existiert an jeder Stelle $\lambda \in \mathbb{R}$ auch der linksseitige (starke) Limes

$$E(\lambda - 0)f \coloneqq \lim_{\varepsilon\downarrow 0} E(\lambda - \varepsilon)f, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Dies folgt aus der Monotonie der Spektralschar und Aufgabe 9.1. Man sieht sofort, dass $E(\lambda - 0)$ eine Projektion ist. Es kann $E(\lambda - 0) \neq E(\lambda)$ sein. Trivialerweise gilt $E(\lambda - 0) = E(\lambda)$ genau dann, wenn die Spektralschar $(E(\zeta))_{\zeta\in\mathbb{R}}$ bei λ stetig ist. Weiter gilt stets $E(\mu) \leq E(\lambda - 0) \leq E(\lambda)$ für $\mu < \lambda$. I. Allg. braucht die Projektion $E(\lambda - 0)$ nicht unter den $(E(\zeta))_{\zeta\in\mathbb{R}}$ vorzukommen.

Beispiel 9.4. Sei $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ und sei $E(\lambda) = \chi_{(-\infty,\lambda]}$ die Multiplikation mit der charakteristischen Funktion zum Intervall $(-\infty, \lambda]$. Dann ist $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar, vgl. Aufgabe 9.3.

Beispiel 9.5. Sei $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ symmetrisch und kompakt mit $\dim R(A) = \infty$ und den Eigenwerten $\lambda_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und einer ONB $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $R(A)$ mit $Au_n = \lambda_n u_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Wenn wir

$$E(\lambda) \coloneqq \sum_{\lambda_n\leq\lambda} \langle\cdot, u_n\rangle\, u_n, \quad \lambda < 0,$$
$$E(\lambda) \coloneqq P_{N(A)} + \sum_{\lambda_n\leq\lambda} \langle\cdot, u_n\rangle\, u_n, \quad \lambda \geq 0$$

setzen, so ist $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar, vgl. Aufgabe 9.4.

Sei $m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und rechtsseitig stetig. Dann existiert für $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ (d.h. φ ist stetig und $\operatorname{supp}\varphi$ ist kompakt, etwa $\operatorname{supp}\varphi \subset (-R, R)$ für ein $R > 0$) das *Riemann-Stieltjes-Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)m(x)\,\mathrm{d}x \coloneqq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)[m(x_{i+1}) - m(x_i)],$$

wenn die Punkte x_i das Intervall $(-R, R)$ in n gleiche Teile zerlegen, mit $x_i < x_{i+1}$ und $x_1 = -R$, $x_{n+1} = R$.

Für jedes feste $f \in \mathcal{H}$ ist die Funktion

$$\mathbb{R} \to [0, \infty), \quad \lambda \mapsto \langle E(\lambda)f, f\rangle$$

monoton nicht-fallend und rechtsseitig stetig. Für $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset (-R, R)$ existiert dann

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}\langle E(\lambda)f, f\rangle \coloneqq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \varphi(\lambda_j)(\langle E(\lambda_{j+1})f, f\rangle - \langle E(\lambda_j)f, f\rangle),$$

wenn die Punkte λ_j das Intervall $(-R, R)$ in n gleiche Teile zerlegen, mit $\lambda_j < \lambda_{j+1}$ und $\lambda_1 = -R$, $\lambda_{n+1} = R$. Für dieses Riemann-Stieltjes-Integral verwendet man auch die Notation

$$\int \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}\mu_f(\lambda) \coloneqq \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}\langle E(\lambda)f, f\rangle .$$

Man sagt dann auch, dass die Funktion $\lambda \mapsto \langle E(\lambda)f, f\rangle$ das Riemann-Stieltjes-Maß (oder Lebesgue-Stieltjes-Maß) μ_f erzeugt.

Wir wollen nun einer Spektralschar $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ einen selbstadjungierten Operator H zuordnen, so dass in einem geeigneten Sinn

$$H = \int \lambda\, \mathrm{d}E(\lambda)$$

gilt. Dazu definieren wir einen Definitionsbereich

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\coloneqq \left\{ f \in \mathcal{H}; \int \lambda^2\, \mathrm{d}\mu_f(\lambda) < \infty \right\} \\ &= \left\{ f \in \mathcal{H}; \limsup_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \lambda^2\, \mathrm{d}\langle E(\lambda)f, f\rangle < \infty \right\}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Wir benötigen noch Riemann-Stieltjes-Integrale, die von Funktionen mit beschränkter Schwankung erzeugt werden.

Definition 9.6. Eine Funktion $m\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ heißt von beschränkter Schwankung, wenn es eine Zahl $C \geq 0$ gibt, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} |m(x_{i+1}) - m(x_i)| \leq C$$

gilt, für alle $n \in \mathbb{N}$ und für jede Wahl von Punkten

$$0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n \leq 1.$$

Das Infimum aller Konstanten $C \geq 0$ mit der Eigenschaft $\sum_{i=1}^{n} |m(x_{i+1}) - m(x_i)| \leq C$ für alle Zerlegungen $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ des Intervalls $[0, 1]$ mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig nennt man die *totale Variation der Funktion* m, in Zeichen: $\operatorname{Var}_{[0,1]}(m)$.

Lemma 9.7. *Für $u, v \in \mathcal{H}$ ist die Funktion*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \lambda \mapsto \langle E(\lambda)u, v\rangle$$

rechtsseitig stetig und von beschränkter Schwankung. Daher existieren für $\varphi \in C(\mathbb{R})$ und $R > 0$ die Riemann-Stieltjes-Integrale

$$\int_{-R}^{R} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, v\rangle := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \varphi(\lambda_j)(\langle E(\lambda_{j+1})u, v\rangle - \langle E(\lambda_j)u, v\rangle).$$

Für $\varphi, \psi \in C(\mathbb{R})$ und $R > 0$ gilt weiter die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\left|\int_{-R}^{R} \varphi(\lambda)\psi(\lambda)\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, v\rangle\right| \\ &\qquad \le \left(\int_{-R}^{R} |\varphi(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, u\rangle\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-R}^{R} |\psi(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)v, v\rangle\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Beweis. Wir geben nur die wesentliche Beweisidee dieses Hauptlemmas (mit $\varphi = \psi = 1$) wieder: Für $a < b$ und mit $J := (a, b]$ schreiben wir

$$E(J) := E(b) - E(a).$$

Es gilt $E(J)^2 = E(J) = E(J)^*$. Seien nun $J_1, \ldots, J_n$ paarweise disjunkte Intervalle mit $\cup_{k=1}^n J_k = (-R, R]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |\,\langle E(J_k)u, v\rangle\,| &= \sum_{k=1}^{n} |\,\langle E(J_k)u, E(J_k)v\rangle\,| \\ &\le \sum_{k=1}^{n} \|E(J_k)u\|\,\|E(J_k)v\| \\ &\le \left(\sum_{k=1}^{n} \|E(J_k)u\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \|E(J_k)v\|^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \langle E(J_k)u, u\rangle\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \langle E(J_k)v, v\rangle\right)^{1/2} \\ &\le \|u\|\,\|v\|. \end{aligned}$$

Der Beweis des Lemmas verwendet die obige Abschätzung und Riemann-Summen, wobei man noch φ und ψ einbauen muss. □

Beispiel 9.8. Seien $u, v \in \mathcal{H}$ und sei $R > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\lambda_1 = -R \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_i \le \ldots \le \lambda_n \le \lambda_{n+1} = R$ eine äquidistante Partition von $[-R, R]$. Dann gilt

$$\int_{-R}^{R} \mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, v\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\langle E(\lambda_{i+1})u, v\rangle - \langle E(\lambda_i)u, v\rangle)$$

$$= \langle E(R)u, v\rangle - \langle E(-R)u, v\rangle \,.$$

Mit $R \to \infty$ gilt aber $E(R)u \to u$ und $E(-R)u \to 0$ und wir sehen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, v\rangle = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, v\rangle = \langle u, v\rangle \,.$$

Speziell für $u = v$ ergibt sich hieraus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, u\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\,\|E(\lambda)u\|^2 = \|u\|^2\,, \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Für $f \in \mathcal{D}$ und $g \in \mathcal{H}$ gilt wegen (9.2)

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)f, g\rangle\right|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)f, f\rangle\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\,\langle E(\lambda)g, g\rangle\right) \leq C_f\,\|g\|\,,$$

mit einer Konstanten $C_f \in [0, \infty)$, da $f \in \mathcal{D}$; es ist eine Übungsaufgabe sich von der Existenz des Grenzwerts $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \ldots$ auf der linken Seite zu überzeugen. Für alle $f \in \mathcal{D}$ ist

$$\mathcal{H} \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \int \lambda\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)f, g\rangle$$

ein stetiges anti-lineares Funktional auf $\mathcal{H}$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz gibt es daher ein $w \in \mathcal{H}$, $w = w_f$, mit

$$\langle w, g\rangle = \int \lambda\,\langle E(\lambda)f, g\rangle\,, \quad \forall g \in \mathcal{H}.$$

Wir definieren nun

$$Hf \coloneqq w_f, \quad \forall f \in \mathcal{D},$$

d.h. es ist $H\colon \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ linear mit

$$\langle Hf, g\rangle = \int \lambda\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)f, g\rangle\,, \quad \forall g \in \mathcal{H}. \tag{9.3}$$

Man zeigt nun der Reihe nach:

(1) $\mathcal{D}$ ist ein dichter linearer Teilraum von $\mathcal{H}$.

(2) $H\colon \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ ist symmetrisch.

(3) $H \pm \mathrm{i}\colon \mathcal{D} \to H$ ist surjektiv.

Nur Schritt (3) erfordert etwas mehr Vorbereitung; (1) und (2) sind leicht zu zeigen.

Lemma 9.9. *Sei* $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ *eine Spektralschar und* $\mathcal{D}$ *sei wie in* (9.1)*. Dann ist* $\mathcal{D}$ *ein dichter linearer Teilraum von* $\mathcal{H}$*.*

Beweis. Seien $u, v \in \mathcal{D}$ und sei $A > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)(u+v),(u+v)\rangle &= \int_{-A}^{A} \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u,u\rangle + \int_{-A}^{A} \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u,v\rangle \\ &\quad + \int_{-A}^{A} \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)v,u\rangle + \int_{-A}^{A} \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)v,v\rangle\,.\end{aligned}$$

Mit Lemma 9.7 ist

$$\left|\int_{-A}^{A} \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u,v\rangle\right| \le \left(\int_{-A}^{A} \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u,u\rangle\right)^{1/2} \left(\int_{-A}^{A} \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)v,v\rangle\right)^{1/2}$$

und es folgt

$$\int_{-A}^{A} \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)(u+v),(u+v)\rangle \le 2\int_{-A}^{A} \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u,u\rangle + 2\int_{-A}^{A} \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)v,v\rangle\,,$$

mithin $u + v \in \mathcal{D}$. Wir zeigen noch, dass $\mathcal{D}$ ein dichter Teilraum von $\mathcal{H}$ ist: Für beliebiges $u \in \mathcal{H}$ und $A \ge 0$ gehören die Vektoren $u_A := (E(A) - E(-A))u$ zu $\mathcal{D}$, denn es gilt

$$\int \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u_A,u_A\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)(E(A)-E(-A)u,(E(A)-E(-A))u\rangle$$

und hierin ist

$$\begin{aligned}&\langle E(\lambda)(E(A)-E(-A))u,(E(A)-E(-A))u\rangle = \left\langle E(\lambda)(E(A)-E(-A))^2u,u\right\rangle \\ &= \langle E(\lambda)(E(A)-E(-A))u,u\rangle = \langle E(\lambda)E(A)u,u\rangle - \langle E(\lambda)E(-A)u,u\rangle \\ &= \langle E(\min\{\lambda,A\})u,u\rangle - \langle E(\min\{\lambda,-A\})u,u\rangle\,.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\int \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u_A,u_A\rangle &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u_A,u_A\rangle \\ &= \lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R} \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\min\{\lambda,A\})u,u\rangle - \int_{-R}^{R} \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\min\{\lambda,-A\})u,u\rangle\right] \\ &= \lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{A} \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u,u\rangle - \int_{-R}^{-A} \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u,u\rangle\right] \\ &= \int_{-A}^{A} \lambda^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u,u\rangle\,,\end{aligned}$$

für alle $A \ge 0$. Wegen

$$\lim_{A\to\infty}(E(A)-E(-A))u = u$$

nach Eigenschaft (3) aus Definition 9.1 folgt die Dichtheit von $\mathcal{D}$. $\square$

Lemma 9.10. *Es seien $\mathcal{D}$ und H wie in* (9.1) *und* (9.3). *Dann ist H symmetrisch.*

Beweis. Für $u, v \in \mathcal{D}$ gilt

$$\begin{aligned}\langle Hu, v\rangle &= \int \lambda \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, v\rangle = \int \lambda \,\mathrm{d}\,\overline{\langle E(\lambda)v, u\rangle} \\ &= \overline{\int \lambda \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)v, u\rangle} = \overline{\langle Hv, u\rangle} = \langle u, Hv\rangle\,.\end{aligned}$$

Nach Lemma 9.9 ist $\mathcal{D}$ dicht und es folgt die Behauptung. □

Zum Beweis der Surjektivität der Operatoren $H \pm \mathrm{i}\colon \mathcal{D} \to H$ ist das folgende Lemma nützlich.

Lemma 9.11. *Seien $-\infty < A < B < \infty$ und $w\colon [A, B] \to \mathbb{C}$ von beschränkter Schwankung und rechtsseitig stetig. Weiter seien $\varphi, \psi \in C[A, B]$. Dann existieren die Riemann-Stieltjes-Integrale*

$$m(x) := \int_A^x \psi(t)\,\mathrm{d}w(t), \quad A \le x \le B,$$

und es gilt: Die Funktion $m\colon [A, B] \to \mathbb{C}$ ist von beschränkter Schwankung, rechtsseitig stetig und

$$\int_A^B \varphi(x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_A^B \varphi(x)\,\mathrm{d}_x \int_A^x \psi(t)\,\mathrm{d}w(t) = \int_A^B \varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}w(x). \tag{9.4}$$

Beweis. Wir verwenden mehrfach die folgende Abschätzung: Für stetiges f und v von beschränkter Schwankung gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}v(x)\right| \le \max_{a\le x\le b} |f(x)| \cdot \mathrm{Var}_{[a,b]}(v), \tag{9.5}$$

wenn $\mathrm{Var}_{[a,b]}(v)$ die totale Variation von v über das Interval $[a, b]$ bezeichnet; vgl. Aufgabe 9.6. Für eine beliebige Zerlegung

$$A \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k \le B \tag{9.6}$$

gilt dann

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k |m(x_i) - m(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^k \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} \psi(t)\,\mathrm{d}w(t)\right| \\ &\le \sum_{i=1}^k \|\psi\|_\infty \cdot \mathrm{Var}_{[x_{k-1},x_k]}(w) \\ &= \|\psi\|_\infty \cdot \mathrm{Var}_{[A,B]}(w).\end{aligned}$$

Mithin ist m von beschränkter Schwankung. Weiter gilt für $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}|m(x+\varepsilon) - m(x)| &\leq \left| \int_x^{x+\varepsilon} \psi(t)\,\mathrm{d}w(t) \right| \\ &\leq \left| \int_x^{x+\varepsilon} (\psi(t) - \psi(x))\,\mathrm{d}w(t) \right| + |\psi(x)| \left| \int_x^{x+\varepsilon} \mathrm{d}w(t) \right| \\ &\leq \mathrm{Var}_{[A,B]}(w) \cdot \max_{t\in[x,x+\varepsilon]} |\psi(t) - \psi(x)| + \|\psi\|_\infty |w(x+\varepsilon) - w(x)|.\end{aligned}$$

Weil ψ stetig ist, gilt $\max_{x\leq t\leq x+\varepsilon} |\psi(t)-\psi(x)| \to 0$, für $\varepsilon \to 0$, und weil w rechtsseitig stetig ist, folgt $|m(x+\varepsilon) - m(x)| \to 0$, für $\varepsilon \to 0$. Sei nun die Zerlegung (9.6) so fein gewählt, dass für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$

$$\left| \int_A^B \varphi\,\mathrm{d}m - \sum_{i=1}^k \varphi(x_i)(m(x_i) - m(x_{i-1})) \right| < \varepsilon \tag{9.7}$$

und

$$\left| \int_A^B \varphi\psi\,\mathrm{d}w - \sum_{i=1}^k \varphi(x_i)\psi(x_i)(w(x_i) - w(x_{i-1})) \right| < \varepsilon. \tag{9.8}$$

Die Summe in (9.7) können wir wiefolgt umformen:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k \varphi(x_i)(m(x_i) - m(x_{i-1})) &= \sum_{i=1}^k \varphi(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi(t)\,\mathrm{d}w(t) \\ &= \sum_{i=1}^k \varphi(x_i)\psi(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathrm{d}w(t) + \sum_{i=1}^k \varphi(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi(t) - \psi(x_i))\,\mathrm{d}w(t) \\ &= \sum_{i=1}^k \varphi(x_i)\psi(x_i)(w(x_i) - w(x_{i-1})) + \sum_{i=1}^k \varphi(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi(t) - \psi(x_i))\,\mathrm{d}w(t).\end{aligned}$$

Wegen (9.7) und (9.8) ergibt sich dann

$$\left| \int_A^B \varphi\,\mathrm{d}m - \int_A^B \varphi\psi\,\mathrm{d}w \right| \leq \left| \sum_{i=1}^k \varphi(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi(t) - \psi(x_i))\,\mathrm{d}w(t) \right| + 2\varepsilon.$$

Mit (9.5) haben wir

$$\begin{aligned}&\left| \sum_{i=1}^k \varphi(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi(t) - \psi(x_i))\,\mathrm{d}w(t) \right| \\ &\qquad\qquad \leq \|\varphi\|_\infty \sum_{i=1}^k \max_{t\in[x_{i-1},x_i]} |\psi(t) - \psi(x_i)| \cdot \mathrm{Var}_{[x_{i-1},x_i]}(w).\end{aligned}$$

Da ψ auf $[A, B]$ gleichmäßig stetig ist, dürfen wir o.E. annehmen, dass für $i = 1, \ldots, k$

$$|\psi(t) - \psi(x_i)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [x_{i-1}, x_i],$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{k}\varphi(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(\psi(t)-\psi(x_i))\,\mathrm{d}w(t)\right| &\le \varepsilon\,\|\varphi\|_\infty\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Var}_{[x_{i-1},x_i]}(w)\\ &= \varepsilon\,\|\varphi\|_\infty\,\mathrm{Var}_{[A,B]}(w).\end{aligned}$$

□

Lemma 9.12. *Es seien $\mathcal{D}$ und H wie in* (9.1) *und* (9.3)*. Dann ist $H \pm i\colon \mathcal{D} \to H$ surjektiv.*

Beweis. Wir beweisen etwas mehr und geben eine explizite Formel für die Resolvente an. Dazu rechnen wir nach, dass das Integral

$$R_\pm := \int \frac{1}{\lambda \pm \mathrm{i}}\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, v\rangle\,, \quad \forall u, v \in \mathcal{H},$$

einen beschränkten Operator $R_\pm\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definiert, der nach $\mathcal{D}$ abbildet und $H \pm \mathrm{i}$ invertiert.

(1) Zunächst ist für $A < B$ und $u, v \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}&\left|\int_A^B \frac{1}{\lambda \pm \mathrm{i}}\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, v\rangle\right|\\ &\quad\le_{(9.2)} \left(\int_A^B \frac{1}{|\lambda \pm \mathrm{i}|}\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, u\rangle\right)^{1/2}\left(\int_A^B \frac{1}{|\lambda \pm \mathrm{i}|}\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)v, v\rangle\right)^{1/2}\\ &\quad\le \left(\int_A^B \mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, u\rangle\right)^{1/2}\left(\int_A^B \mathrm{d}\,\langle E(\lambda)v, v\rangle\right)^{1/2},\end{aligned}$$

da $|\lambda \pm \mathrm{i}| \ge |\mathrm{i}| = 1$. Daher ist die Abbildung

$$\mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad v \mapsto \int \frac{1}{\lambda \pm \mathrm{i}}\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, v\rangle$$

wohldefiniert und für alle $u \in \mathcal{H}$ ein stetiges anti-lineares Funktional auf $\mathcal{H}$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz existiert daher zu jedem $u \in \mathcal{H}$ ein Vektor $R_\pm u \in \mathcal{H}$ mit

$$\langle R_\pm u, v\rangle = \int \frac{1}{\lambda \pm \mathrm{i}}\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, v\rangle\,, \quad \forall v \in \mathcal{H}. \tag{9.9}$$

Dies definiert lineare Operatoren $R_\pm\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

(2) Die Operatoren $R_\pm$ sind beschränkt, denn für $u \in \mathcal{H}$ und $g_\pm := R_\pm u$ gilt

$$\begin{aligned}\|R_\pm u\|^2 &= \langle R_\pm u, g_\pm\rangle\\ &=_{(9.9)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu \pm \mathrm{i}}\,\mathrm{d}_\mu\,\langle E(\mu)u, g_\pm\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq_{(9.2)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\mu \pm \mathrm{i}|^2} \,\mathrm{d}_\mu \left\langle E(\mu)u, u\right\rangle\right)^{1/2} \|g_\pm\| \,. \\
&\leq \|u\| \, \|g_\pm\| \,.
\end{aligned}
$$

(3) Man rechnet weiter nach, dass $R(R_\pm) \subset \mathcal{D} = D(H)$ gilt. Nach Definition von $\mathcal{D}$ genügt es dafür zu zeigen, dass

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \,\mathrm{d}_\lambda \left\langle E(\lambda)R_\pm u, R_\pm u\right\rangle < \infty, \quad \forall u \in \mathcal{H},
$$

wobei nach Konstruktion von R_+ für beliebige $v \in \mathcal{H}$

$$
\begin{aligned}
\left\langle E(\lambda)R_+ u, v\right\rangle = \left\langle R_+ u, E(\lambda)v\right\rangle &=_{(9.9)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu + \mathrm{i}} \,\mathrm{d}_\mu \left\langle E(\mu)u, E(\lambda)v\right\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\mu + \mathrm{i}} \,\mathrm{d}_\mu \left\langle E(\mu)u, v\right\rangle
\end{aligned}
$$

gilt, da $E(\mu)E(\lambda) = E(\min\{\lambda, \mu\})$. Also gilt:

$$
\begin{aligned}
\left\langle E(\lambda)R_+ u, R_+ u\right\rangle &= \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\mu + \mathrm{i}} \,\mathrm{d}_\mu \left\langle E(\mu)u, R_+ u\right\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\mu + \mathrm{i}} \,\mathrm{d}_\mu \overline{\left\langle R_+ u, E(\mu)u\right\rangle} \\
&=_{(9.9)} \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\mu + \mathrm{i}} \,\mathrm{d}_\mu \left[\overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma + \mathrm{i}} \,\mathrm{d}_\gamma \left\langle E(\gamma)u, E(\mu)u\right\rangle}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\mu + \mathrm{i}} \,\mathrm{d}_\mu \left[\overline{\int_{-\infty}^{\mu} \frac{1}{\gamma + \mathrm{i}} \,\mathrm{d}_\gamma \left\langle E(\gamma)u, u\right\rangle}\right] \\
&=_{(9.4)} \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\mu + \mathrm{i}} \frac{1}{\overline{\mu + \mathrm{i}}} \,\mathrm{d}_\mu \left\langle E(\mu)u, u\right\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{|\mu + \mathrm{i}|^2} \,\mathrm{d}_\mu \left\langle E(\mu)u, u\right\rangle ,
\end{aligned}
$$

wobei wir im letzten Schritt Lemma 9.11 verwendet haben. Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \,\mathrm{d}_\lambda \left\langle E(\lambda)R_+ u, R_+ u\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \,\mathrm{d}_\lambda \left[\int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{|\mu + \mathrm{i}|^2} \,\mathrm{d}_\mu \left\langle E(\mu)u, u\right\rangle\right] \\
&=_{(9.4)} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \frac{1}{|\lambda + \mathrm{i}|^2} \,\mathrm{d}_\lambda \left\langle E(\lambda)u, u\right\rangle \leq \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}_\lambda \left\langle E(\lambda)u, u\right\rangle = \|u\|^2 ,
\end{aligned}
$$

denn $\frac{\lambda^2}{|\lambda + \mathrm{i}|^2} \geq 1$. Die Rechnung für R_- verläuft analog.

(4) Schließlich zeigen wir noch, dass $(H \pm \mathrm{i})R_\pm u = u$, für alle $u \in \mathcal{H}$. Wegen $R_+ u \in \mathcal{D}$ gilt für alle $v \in \mathcal{H}$

$$
\left\langle (H + \mathrm{i})R_+ u, v\right\rangle =_{(9.3)} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + \mathrm{i}) \,\mathrm{d}_\lambda \left\langle E(\lambda)R_+ u, v\right\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + \mathrm{i})\, \mathrm{d}_\lambda \, \langle R_+ u, E(\lambda) v\rangle \\
&=_{(9.9)} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + \mathrm{i})\, \mathrm{d}_\lambda \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu + \mathrm{i}}\, \mathrm{d}_\mu \, \langle E(\mu) u, E(\lambda) v\rangle \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + \mathrm{i})\, \mathrm{d}_\lambda \left[\int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\mu + \mathrm{i}}\, \mathrm{d}_\mu \, \langle E(\mu) u, v\rangle \right] \\
&=_{(9.4)} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + \mathrm{i}) \frac{1}{\lambda + \mathrm{i}}\, \mathrm{d}_\lambda \, \langle E(\lambda) u, v\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}_\lambda \, \langle E(\lambda) u, v\rangle \\
&= \langle u, v\rangle ,
\end{aligned}
$$

und analog $\langle (H - \mathrm{i}) R_- u, v\rangle = \langle u, v\rangle$ für alle $u, v \in \mathcal{H}$. Mithin ist

$$(H \pm \mathrm{i}) R_\pm u = u, \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Also ist $H \pm \mathrm{i}$ surjektiv. Weil H symmetrisch ist, gilt weiter

$$\|(H \pm \mathrm{i}) f\|^2 = \|Hf\|^2 + \|f\|^2 \geq \|f\|^2 , \quad \forall f \in D(H),$$

und daher ist $H \pm \mathrm{i}$ auch injektiv. Zusammen folgt, dass $R_\pm = (H \pm \mathrm{i})^{-1}$. □

Theorem 9.13. *Zu jeder Spektralschar* $(E(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}}$ *existiert genau ein selbstadjungierter Operator* H *mit*

$$H = \int \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$$

im Sinne von (9.1) *und* (9.3).

Beweis. Der Operator $H \colon \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ ist nach unseren bisherigen Resultaten dicht definiert, symmetrisch und es ist $H \pm \mathrm{i} \colon \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ surjektiv. Mit Theorem 6.27 folgt die Behauptung. □

Erheblich schwieriger zu zeigen ist die Umkehrung, die wir hier ohne Beweis mitteilen.

Theorem 9.14. *Sei* $H \colon D(H) \to \mathcal{H}$ *ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum* $\mathcal{H}$. *Dann gibt es genau eine Spektralschar* $(E(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}}$ *mit*

$$H = \int \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda),$$

d.h., der nach Theorem 9.13 zu $(E(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}}$ *gehörende Operator stimmt mit* H *überein.* □

Bemerkung 9.15. Theorem 9.13 und Theorem 9.14 bilden den sogenannten *Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren.* Er liefert eine “Diagonalisierung” von H, analog zur Hauptachsentransformation für symmetrische Matrizen.

Definition 9.16. Sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ ein dicht definierter Operator und sei $A \in \mathcal{L}(H)$. Wir sagen, dass A *mit* T *vertauscht*, wenn $Au \in D(T)$ ist, für alle $u \in D(T)$, und wenn

$$[A,T]u := ATu - TAu = 0, \quad \forall u \in D(T),$$

gilt.

Der folgende Satz ist gelegentlich von Nutzen, wenn man nachweisen will, dass eine Spektralschar zu einem bestimmten Operator gehört.

Theorem 9.17. *Es sei $H\colon D(H) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert mit der zugehörigen Spektralschar $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ und es sei $A \in \mathcal{L}(H)$. Dann gilt*

$$[A,H] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad [A,E(\lambda)] = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 9.7 für den Fall $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. □

Theorem 9.18. *Sei $H\colon D(H) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert und es sei $M \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Teilraum mit zugehöriger Projektion P. Weiter sei $[P,H] = 0$ und es gebe ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit $\langle Hu, u\rangle \le \lambda_0 \|u\|^2$ für alle $u \in M \cap D(H)$ sowie $\langle Hu, u\rangle > \lambda_0 \|u\|^2$ für alle $0 \neq u \in M^\perp \cap D(H)$. Dann gilt $P = E(\lambda_0)$.*

Beweis. Aufgabe 9.8. □

Wir wollen eine erste wichtige Anwendung des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren kennenlernen und Funktionen von Operatoren studieren: Für hinreichend gutartige Funktionen f versucht man den Ansatz

$$f(H) := \int f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda)$$

mit dem Definitionsbereich

$$D(f(H)) := \left\{ u \in \mathcal{H};\ \int |f(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, u\rangle < \infty \right\}.$$

Beispielsweise liefert $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}$, $t \in \mathbb{R}$, eine stark stetige unitäre Gruppe von Operatoren und $u(t) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}u_0$ löst die Schrödingergleichung, falls $H = -\Delta + V$ selbstadjungiert ist. Hingegen ist e^{-tH}, $t \ge 0$ und $H \ge 0$, eine stark stetige Halbgruppe von Operatoren und $v(t) := \mathrm{e}^{-tH}v_0$ löst die Wärmeleitungsgleichung, falls H eine selbstadjungierte Fortsetzung von $-\Delta$ ist. Weiter sieht man, dass $\chi_{(a,b]}(H) = E((a,b])$ Spektralprojektionen liefert. Wir wollen nun Quadratwurzeln nicht-negativer selbstadjungierter Operatoren konstruieren.

Theorem 9.19. *Sei $H \ge 0$ selbstadjungiert mit der Spektralschar $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Wir definieren einen Operator T durch*

$$D(T) := \left\{ u \in \mathcal{H};\ \int_0^\infty \lambda \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, v\rangle < \infty \right\}$$

und

$$T := \int_0^\infty \sqrt{\lambda}\,\mathrm{d}E(\lambda),$$

d.h.

$$\langle Tu, v\rangle := \int_0^\infty \sqrt{\lambda}\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, v\rangle\,, \quad \forall u \in D(T), \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Dann ist T ein nicht-negativer selbstadjungierter Operator mit $T^2 = H$ und T ist eine Quadratwurzel von H, in Zeichen $T = \sqrt{H}$. Die (nicht-negative) Quadratwurzel von H ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Siehe Aufgabe 9.9 für den Fall $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. □

Bemerkung 9.20. In Theorem 9.19 ist $D(T) \supset D(H)$ und

$$D(T^2) = \{u \in D(T); Tu \in D(T)\} = D(H).$$

9.1 Übungen

Aufgabe 9.1. Es seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ symmetrisch mit

$$0 \le A_n \le A_{n+1} \le B, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gibt es einen symmetrischen Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $A_n f \to Af$, $f \in \mathcal{H}$, und $A_n \le A \le B$, $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Man betrachte die quadratische Form

$$a[u, u] := \lim_{n\to\infty} \langle A_n u, u\rangle\,, \quad u \in \mathcal{H},$$

und definiere den Operator A so, dass $\langle Au, u\rangle = a[u, u]$ gilt, für alle $u \in \mathcal{H}$. Im Konvergenzbeweis verwende man die Ungleichung

$$\|(A - A_n)f\|^4 \le \left\langle (A - A_n)^2 f, (A - A_n)f\right\rangle \langle (A - A_n)f, f\rangle\,, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Aufgabe 9.2.

(a) Es seien $M \subset N$ abgeschlossene Teilräume des Hilbertraums $\mathcal{H}$ mit den zugehörigen Projektionen P und Q. Dann ist $\|P - Q\| = 1$, sofern $M \ne N$.

(b) Sei $\{P(\lambda)\}_{0\le\lambda\le1}$ eine bezüglich der Operatornorm stetige, monotone Familie von Projektionen. Dann ist $P(\cdot)$ bereits konstant.

Aufgabe 9.3.

(a) Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Wenn $E(\lambda) = 0$ ist für $\lambda < \lambda_0$ und $E(\lambda) = I$ für $\lambda \ge \lambda_0$, dann ist $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar. Für den zugehörigen selbstadjungierten Operator $\int \lambda\,\mathrm{d}E(\lambda)$ gilt weiter

$$\int \lambda\,\mathrm{d}E(\lambda) = \lambda_0 I.$$

(b) Im Hilbertraum $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ sei $E(\lambda)$ definiert als die Multiplikation mit der charakteristischen Funktion $\chi_{(-\infty,\lambda]}$,

$$E(\lambda)f(x) := \begin{cases} f(x), & \text{für } x \leq \lambda, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $f \in \mathcal{H}$. Dann ist $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar.

Aufgabe 9.4. Sei $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt mit $\dim R(A) = \infty$ und den Eigenwerten $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Weiterhin sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB von $R(A)$ mit $Au_n = \lambda_n u_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$E(\lambda) := \sum_{\lambda_n \leq \lambda} \langle \cdot, u_n \rangle \, u_n, \quad \lambda < 0,$$
$$E(\lambda) := P_{N(A)} + \sum_{\lambda_n \leq \lambda} \langle \cdot, u_n \rangle \, u_n, \quad \lambda \geq 0.$$

Man zeige, dass $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar ist und dass $A = \int \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$ gilt.
Hinweis zum Beweis von $A = \int \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$: Sei $A' = \int \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$ der selbstadjungierte Operator zur Spektralschar $E(\lambda)$. Man zeige zunächst $\langle Au, u \rangle = \langle A'u, u \rangle$ für $u \in N(A)$ sowie für $u = u_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 9.5. Es sei $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar und es sei $\mathcal{D}$ wie in (9.1). Analog zu Lemma 9.7 gilt für $\lambda_1 < \lambda_2$ die Abschätzung

$$\left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda \, \mathrm{d} \langle E(\lambda)f, g \rangle \right| \leq \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda^2 \, \mathrm{d} \langle E(\lambda)f, f \rangle \right)^{1/2} \|g\| \, , \quad \forall f \in \mathcal{D}, \, g \in \mathcal{H}; \qquad (9.10)$$

diese Abschätzung soll hier nicht gezeigt werden. Mit Hilfe von (9.10) zeige man, dass das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d} \langle E(\lambda)f, g \rangle := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \lambda \, \mathrm{d} \langle E(\lambda)f, g \rangle$$

existiert und der Abschätzung

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d} \langle E(\lambda)f, g \rangle \right| \leq C_f \|g\| \, , \quad \forall g \in \mathcal{H},$$

genügt, mit $C_f^2 := \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, \mathrm{d} \langle E(\lambda)f, f \rangle$.

Aufgabe 9.6. Es seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig und $w\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ von beschränkter Schwankung. Für das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_a^b \varphi(x) \, \mathrm{d}w(x)$ gilt dann die Abschätzung

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \, \mathrm{d}w(x) \right| \leq \max_{a\leq x\leq b} |\varphi(x)| \cdot \mathrm{Var}_{[a,b]}(w).$$

Aufgabe 9.7. Es sei $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $H = H^*$ und mit der zugehörigen Spektralschar $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ und sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann gilt

$$[A, H] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad [A, E(\lambda)] = 0, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Für die Richtung " $\Longrightarrow$ " verwende man Aufgabe 9.11.

Aufgabe 9.8. Es seien $H\colon D(H) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert und $M \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Teilraum mit zugehöriger Projektion P. Weiter sei $[P, H] = 0$ und es gebe ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit $\langle Hu, u\rangle \leq \lambda_0 \|u\|^2$ für alle $u \in M \cap D(H)$ sowie $\langle Hu, u\rangle > \lambda_0 \|u\|^2$ für alle $0 \neq u \in M^\perp \cap D(H)$. Dann gilt $P = E(\lambda_0)$.

Aufgabe 9.9. Es sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $A = A^*$ und $A \geq 0$ gegeben. Mit der Spektralschar $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ zu A definieren wir einen Operator B durch

$$B := \int_{0-}^{\infty} \sqrt{\lambda}\,\mathrm{d}E(\lambda),$$

d.h.

$$\langle Bu, v\rangle := \int_{0-}^{\infty} \sqrt{\lambda}\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, v\rangle\,, \quad \forall u, v \in \mathcal{H}.$$

Dann ist B wieder beschränkt, symmetrisch und nicht-negativ und es gilt $B^2 = A$.

Aufgabe 9.10. Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ symmetrisch mit zugehöriger Spektralschar $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$.

(a) Man zeige, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{i}tA)^k$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ konvergiert; dabei ist die Konvergenz gleichmäßig für $t \in [-R, R]$ und für alle $R > 0$.

(b) Sei $e^{\mathrm{i}tA} := \int e^{\mathrm{i}t\lambda}\,\mathrm{d}E(\lambda)$. Dann gilt $e^{\mathrm{i}tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{i}tA)^k$.

Aufgabe 9.11. Es sei $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $H = H^*$ und mit zugehöriger Spektralschar $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Man zeige, dass es zu jedem $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ eine Folge von Polynomen $p_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$p_n(H)f \to E(\lambda_0)f, \quad n \to \infty,$$

für alle $f \in \mathcal{H}$.
Hinweis: Wegen

$$E(\lambda_0) = \int_{-\infty}^{\lambda_0} \mathrm{d}E(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(-\infty,\lambda_0]}\,\mathrm{d}E(\lambda)$$

kann man $\|p_n(H)f - E(\lambda_0)f\|^2$ als Integral schreiben und anschließend die rechtsseitige Stetigkeit der Spektralschar ausnutzen.

Aufgabe 9.12. Sei $H = \int \lambda\,\mathrm{d}E(\lambda)$ ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Man zeige:

$$H \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad E(\lambda) = 0, \forall\lambda < 0, \quad \Longleftrightarrow \quad H = \int_0^{\infty} \lambda\,\mathrm{d}E(\lambda).$$

Hinweis: Man überlege, dass für alle $u, v \in \mathcal{H}$ gilt: $\int_{(-\varepsilon,\varepsilon)} \lambda\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u, v\rangle \to 0$, $\varepsilon \downarrow 0$.

Aufgabe 9.13. Es sei $\mathcal{H} = \int \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$ ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Für alle $f \in D(H)$ und $\mu \in \mathbb{C}$ gilt dann

$$\|(H-\mu)f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda - \mu|^2 \, \mathrm{d} \left\langle E(\lambda) f, f \right\rangle .$$

Kapitel 10

Das Spektrum selbstadjungierter Operatoren

In diesem Paragraphen ist stets $H\colon D(H) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit zugehöriger Spektralschar $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Wir wollen den Zusammenhang zwischen $\sigma(H)$ und der Spektralschar $E(\lambda)$ im Detail untersuchen. Wir erinnern zunächst an die Definitionen von Spektrum und Resolvente.

(1) **Spektrum und Resolvente.** Für abgeschlossenes $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ definieren wir die *Resolventenmenge* $\rho(T)$ durch

$$\begin{aligned}\rho(T) &:= \left\{z \in \mathbb{C}; (T-z)\colon D(T) \to \mathcal{H} \text{ bijektiv }, (T-z)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\right\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}; (T-z)\colon D(T) \to \mathcal{H} \text{ bijektiv}\}\,.\end{aligned}$$

Für abgeschlossenes $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ heißt

$$\sigma(T) := \mathbb{C}\backslash\rho(T)$$

das *Spektrum von* T.

(2) **Punktspektrum und kontinuierliches Spektrum.** Es sei $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ das Punktspektrum von T gegeben durch die Menge der Eigenwerte von T, d.h.

$$\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T) \quad\iff\quad N(T-\lambda) \neq \{0\},$$

und es sei $\sigma_{\mathrm{cont}}(T) = \sigma(T)\backslash\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ das *kontinuierliche Spektrum von* T. Speziell für selbstadjungiertes H gilt dann

$$\sigma(H) = \sigma_{\mathrm{p}}(H) \cup \sigma_{\mathrm{cont}}(H) \quad \text{(disjunkte Vereinigung)},$$

da es bei selbstadjungierten Operatoren kein Residualspektrum geben kann.

(3) **Diskretes Spektrum und wesentliches Spektrum.** Sei $H\colon D(H) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Wir definieren $\sigma_{\text{disc}}(H)$, das *diskrete Spektrum von* H, als die Menge der Eigenwerte endlicher Vielfachheit von H die zugleich isolierte Punkte des Spektrums sind. Mit anderen Worten: $\lambda \in \sigma_{\text{disc}}(H)$ genau dann, wenn $0 < \dim N(H-\lambda) < \infty$ und wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit der Eigenschaft $\sigma(H) \cap (\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) = \{\lambda\}$. Wir definieren dann $\sigma_{\text{ess}}(H)$, das *wesentliche Spektrum von* H, durch

$$\sigma_{\text{ess}}(H) := \sigma(H) \backslash \sigma_{\text{disc}}(H).$$

Trivialerweise haben wir damit wieder die disjunkte Zerlegung

$$\sigma(H) = \sigma_{\text{disc}}(H) \cup \sigma_{\text{ess}}(H).$$

Offenbar besteht $\sigma_{\text{ess}}(H)$ aus allen Häufungspunkten von $\sigma(H)$ und allen Eigenwerten unendlicher Vielfachheit. Insbesondere ist $\sigma_{\text{ess}}(H)$ stets eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Hingegen braucht $\sigma_{\text{cont}}(H)$ nicht abgeschlossen zu sein. Wir zeigen später, dass $\sigma_{\text{ess}}(H)$ bei Störungen durch kompakte, symmetrische Operatoren invariant ist.

Theorem 10.1. *Sei H ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit der Spektralschar $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$.*

(1) *Für $\zeta \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\zeta \in \rho(H) \iff \exists \varepsilon > 0 : E(\zeta-\varepsilon) = E(\zeta+\varepsilon).$$

(2) *Für $\zeta \in \rho(H)$ gilt*

$$\left\|(H-\zeta)^{-1}\right\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\zeta, \sigma(H))}.$$

(3) *Es gilt*

$$H \geq 0 \iff E(\lambda) = 0, \quad \forall \lambda < 0.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ mit $E(\zeta-\varepsilon) = E(\zeta+\varepsilon)$. Dann ist

$$R_\zeta := \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\zeta)^{-1} \,\mathrm{d}E(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

mit $\|R_\zeta\| \leq \varepsilon^{-1}$. Man rechnet nach, dass $(H-\zeta)R_\zeta = I$ und $R_\zeta(H-\zeta) = I\restriction_{D(H)}$ gilt. Mithin ist $R_\zeta = (H-\zeta)^{-1}$ und $\zeta \in \rho(H)$. Umgekehrt nehmen wir an, dass $E(\zeta-\varepsilon) \neq E(\zeta+\varepsilon)$, für jedes $\varepsilon > 0$. Wir wählen $u_\varepsilon \in R(E(\zeta+\varepsilon) - E(\zeta-\varepsilon)) = R(E(\zeta+\varepsilon)) \cap R(E(\zeta-\varepsilon))^\perp$ mit $\|u_\varepsilon\| = 1$. Dann gilt $u_\varepsilon \in D(H)$ mit

$$\|(H-\zeta)u_\varepsilon\|^2 = \int_{\zeta-\varepsilon}^{\zeta+\varepsilon} |\lambda-\zeta|^2 \,\mathrm{d}\left\langle E(\lambda)u_\varepsilon, u_\varepsilon\right\rangle \leq \varepsilon^2 \left\|u_\varepsilon\right\|^2.$$

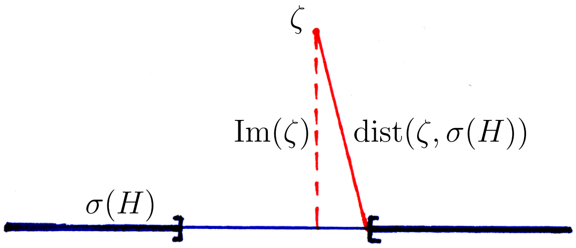
Also ist $H - \zeta$ nicht stetig invertierbar und $\zeta \notin \rho(H)$. Zum Beweis von (2): Sei nun $\zeta \in \rho(H)$. Es ist

$$\left\|(H-\zeta)^{-1}f\right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda - \zeta|^{-2}\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)f, f\rangle\,, \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

und nach (1) erstreckt sich das Integral nur über $\sigma(H)$, d.h.

$$\left\|(H-\zeta)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(\zeta, \sigma(H))}.$$

Man beachte, dass wir im Vergleich mit Lemma 7.20 hier i. Allg. eine bessere Abschätzung als mit $|\mathrm{Im}(\zeta)|$ bekommen, siehe die nachfolgende Abbildung.



Nach Korollar 7.14 ist $\sigma(H)$ abgeschlossen und daher finden wir zu $\zeta \in \rho(H)$ ein $\lambda_0 \in \sigma(H)$ mit

$$|\lambda_0 - \zeta| = \operatorname{dist}(\zeta, \sigma(H)).$$

Nach (1) existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $0 \neq u_\varepsilon \in R(E(\lambda_0 + \varepsilon) - E(\lambda_0 - \varepsilon))$. Also ist

$$\begin{aligned}
\left\|(H-\zeta)^{-1}u_\varepsilon\right\|^2 &= \int_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} |\lambda - \zeta|^{-2}\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle \\
&\geq \int_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} (|\lambda_0 - \zeta| + \varepsilon)^{-2}\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle \\
&= (|\lambda_0 - \zeta| + \varepsilon)^{-2}\,\|u_\varepsilon\|^2
\end{aligned}$$

und es folgt (2). (3) ist natürlich trivial. □

Weiter korrespondieren die Unstetigkeitsstellen einer Spektralschar zum Punktspektrum des zugehörigen selbstadjungierten Operators, während die starke Stetigkeit der $E(\lambda)$ bei $\lambda_0 \in \sigma(H)$ schon $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{cont}}(H)$ bedeutet (und umgekehrt).

Theorem 10.2. *Für $\lambda_0 \in \sigma(H)$ gilt*

$$\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(H) \quad \Longleftrightarrow \quad E(\cdot) \textit{ nicht stark stetig bei } \lambda_0$$

und

$$\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{cont}}(H) \quad \Longleftrightarrow \quad E(\cdot) \textit{ stark stetig bei } \lambda_0.$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass $E(\lambda - 0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E(\lambda - \varepsilon)$ eine Projektion ist. Offenbar ist $E(\cdot)$ genau dann stark stetig bei λ_0, wenn $E(\lambda_0 - 0) = E(\lambda_0)$ gilt. Für $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(H)$ und $u_0 \in N(H - \lambda_0)$ mit $\|u_0\| = 1$ gilt

$$0 = \|(H - \lambda_0)u_0\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 \,\mathrm{d}\, \langle E(\lambda)u_0, u_0\rangle \,.$$

Also ist $\langle E(\cdot)u, u\rangle$ konstant für $\lambda < \lambda_0$ und $\lambda > \lambda_0$, d.h. $\langle E(\lambda)u_0, u_0\rangle = 0$ für $\lambda < \lambda_0$ und $\langle E(\lambda)u_0, u_0\rangle = 1$ für $\lambda > \lambda_0$. Dann ist $E(\cdot)$ bei λ_0 nicht stark stetig. Sei umgekehrt $E(\cdot)$ nicht stark stetig bei λ_0. Dann gibt es ein $u \in \mathcal{H}$ mit $\|u\| = 1$, so dass

$$E(\lambda_0 - 0)u = 0, \quad E(\lambda_0)u = u,$$

d.h. $u \in R(E(\lambda_0 - 0))^{\perp} \cap R(E(\lambda_0)) = R(E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))$, und es folgt sofort

$$\|(H - \lambda_0)u\|^2 = \int_{\lambda_0 - 0}^{\lambda_0} (\lambda - \lambda_0)^2 \,\mathrm{d}\, \langle E(\lambda)u, u\rangle = 0,$$

also $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(H)$. $\square$

Die Sprungstellen einer Spektralschar korrespondieren also genau zum Punktspektrum. In einem separablen Hilbertraum ist das Punktspektrum abzählbar oder endlich.

Wir wollen nun auch das wesentliche und das diskrete Spektrum selbstadjungierter Operatoren mit Hilfe der Spektralschar beschreiben.

Theorem 10.3. *Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gehört genau dann zu $\sigma_{\mathrm{disc}}(H)$, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(1) *Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $E(\cdot)$ konstant in $(\lambda - \varepsilon, \lambda)$ sowie $[\lambda, \lambda + \varepsilon)$.*

(2) *Es ist $0 < \dim R(E(\lambda) - E(\lambda - 0)) < \infty$.*

Es ist $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ genau dann, wenn $\dim R(E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon)) = \infty$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Beweis. Die Aussage über $\sigma_{\mathrm{disc}}(H)$ ist klar. Ist $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(H)$, so ist λ insbesondere ein Element von $\sigma(H)$ und daher gilt $E(\lambda - \varepsilon) \neq E(\lambda + \varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Wäre $\dim R(E(\lambda + \varepsilon_0) - E(\lambda - \varepsilon_0))$ endlich für ein $\varepsilon_0 > 0$, so folgte $\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(H)$. Für den Beweis der Rückrichtung starten wir mit der Annahme $\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(H)$. Dann können wir ein $\varepsilon > 0$ finden, so dass $E(\cdot)$ in den Intervallen $(\lambda - \varepsilon, \lambda)$ und $[\lambda, \lambda + \varepsilon)$ konstant ist. Unsere Voraussetzung impliziert nun $\dim R(E(\lambda) - E(\lambda - 0)) = \infty$, im Widerspruch zur Annahme $\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(H)$. $\square$

Das wesentlichen Spektrum selbstadjungierter Operatoren kann mit singulären Folgen charakterisiert werden.

Definition 10.4. Sei $H\colon D(H) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert und es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(H)$ heißt *singuläre Folge zu H und λ*, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\|u_n\| = 1$ oder $\liminf_{n\to\infty} \|u_n\| > 0$,

(2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine schwache Nullfolge, in Zeichen $u_n \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$,

(3) $\|(H-\lambda)u_n\| \to 0$.

Singuläre Folgen sind also Folgen approximativer Eigenfunktionen. Es gilt der folgende wichtige Zusammenhang.

Theorem 10.5. *Es gilt*

$$\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(H) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Es gibt eine singuläre Folge zu } H \text{ und } \lambda.$$

Beweis. Wir schreiben

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \,\mathrm{d}E(\lambda)$$

und geben $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ vor. Nach Theorem 10.3 ist

$$\dim R(E(\lambda_0+\varepsilon) - E(\lambda_0-\varepsilon)) = \infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Wir wählen ein $u_1 \in R(E(\lambda_0+1) - E(\lambda_0-1))$ mit $\|u_1\| = 1$. Dann ist $u_1 \in D(H)$ und

$$\begin{aligned}
\|(H-\lambda_0)u_1\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u_1, u_1\rangle \\
&= \int_{\lambda_0-1}^{\lambda_0+1} (\lambda-\lambda_0)^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u_1, u_1\rangle \\
&\le 1.
\end{aligned}$$

Wir wählen jetzt sukzessive $u_k \in R(E(\lambda_0+1/k) - E(\lambda_0-1/k))$ mit $\|u_k\| = 1$ und $\langle u_k, u_j\rangle = 0$ für alle $j = 1,\ldots,k-1$; dies ist möglich, da

$$\dim R(E(\lambda_0+1/k) - E(\lambda_0-1/k)) = \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

und $\dim \operatorname{span}\{u_1,\ldots,u_{k-1}\} = k-1 < \infty$, also

$$R(E(\lambda_0+1/k) - E(\lambda_0-1/k)) \cap \operatorname{span}\{u_1,\ldots,u_{k-1}\}^{\perp} \ne \{0\}.$$

Analog sieht man $u_k \in D(H)$ mit

$$\|(H-\lambda_0)u_k\| \le k^{-1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Also ist $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(H)$ eine singuläre Folge zu H und λ_0. Umgekehrt geben wir uns eine singuläre Folge zu H und λ_0 vor, d.h.,

$$\|u_k\| = 1, \quad u_k \xrightarrow{\mathrm{w}} 0, \quad \|(H-\lambda_0)u_k\| \to 0.$$

Zunächst ist $\lambda_0 \in \sigma(H)$, denn andernfalls gäbe es ein $\eta > 0$ mit $\|(H-\lambda_0)u\| \geq \eta \|u\|$ für alle $u \in D(H)$. Wäre nun $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{disc}}(H)$, dann wäre $E(\cdot)$ konstant auf den Intervallen $(\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0)$ und $[\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon_0)$, für ein $\varepsilon_0 > 0$. Für die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rechnen wir nun aus

$$\begin{aligned}
\|(H-\lambda_0)u_k\|^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon_0} + \int_{\lambda_0-\varepsilon_0}^{\lambda_0+\varepsilon_0} + \int_{\lambda_0+\varepsilon_0}^{\infty}\right)(\lambda-\lambda_0)^2 \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u_k, u_k\rangle \\
&\geq \varepsilon_0^2 \left(\int_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon_0} + \int_{\lambda_0+\varepsilon_0}^{\infty}\right) \mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u_k, u_k\rangle \\
&= \varepsilon_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u_k, u_k\rangle - \varepsilon_0^2 \int_{\lambda_0-\varepsilon_0}^{\lambda_0+\varepsilon_0} \mathrm{d}\,\langle E(\lambda)u_k, u_k\rangle \\
&= \varepsilon_0^2 \|u_k\|^2 - \varepsilon_0^2 \left(\langle E(\lambda_0+\varepsilon_0)u_k, u_k\rangle - \langle E(\lambda_0-\varepsilon_0)u_k, u_k\rangle\right).
\end{aligned}$$

Nach unserer Annahme ist $\dim R(E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0)) < \infty$ und daher muss auch $\dim R(E(\lambda_0+\varepsilon_0) - E(\lambda_0-\varepsilon_0)) < \infty$ sein. Mithin ist $E(\lambda_0+\varepsilon_0) - E(\lambda_0-\varepsilon_0)$ kompakt. Wegen $u_k \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$ folgt

$$E(\lambda_0+\varepsilon_0)u_k - E(\lambda_0-\varepsilon_0)u_k \to 0 \text{ (stark)}.$$

Wir erkennen

$$\liminf_{k\to\infty} \|(H-\lambda_0)u_k\|^2 \geq \varepsilon_0^2 \|u_k\|^2,$$

ein Widerspruch. □

Für das wesentliche Spektrum selbstadjungierter Operatoren gilt der folgende *Störungssatz von Weyl.*

Theorem 10.6. *Sei H selbstadjungiert und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sei symmetrisch und kompakt. Dann gilt:*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H+A) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H).$$

Bemerkung 10.7. Weil A beschränkt ist, ist $H+A$ auf $D(H+A) = D(H)$ definiert. Man zeigt leicht, dass $H+A$ für symmetrisches $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auch selbstadjungiert ist (etwa mit dem Störungssatz von Kato und Rellich).

Beweis. Wir beweisen zunächst die folgende Behauptung: (u_n) ist eine singuläre Folge für H und λ genau dann, wenn (u_n) eine singuläre Folge für $H+A$ und λ ist. Sei dazu $(u_n) \subset D(H) = D(H+A)$ eine Folge mit $\|u_n\| = 1$, $u_n \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$ und $(H-\lambda)u_n \to 0$ (stark). Weil A kompakt ist, gilt dann $Au_n \to 0$ (stark), also $(H+A-\lambda)u_n \to 0$ (stark), d.h. (u_n) ist auch eine singuläre Folge für $H+A$ und

λ. Der Beweis für die umgekehrte Richtung verläuft analog. Damit gilt: $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(H)$ $\iff$ Es gibt eine singuläre Folge zu H und $\lambda \iff$ Es gibt eine singuläre Folge zu $H + A$ und $\lambda \iff \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(H + A)$. $\square$

Theorem 10.8. *Sei H ein selbstadjungierter Operator mit Spektralschar $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Weiter sei λ_0 ein isolierter Punkt von $\sigma(H)$ und es sei $\varepsilon_0 > 0$ so, dass*

$$(\lambda_0 - 2\varepsilon, \lambda_0 + 2\varepsilon) \cap \sigma(H) = \{\lambda_0\}.$$

Weiter sei $\Gamma := \partial B(\lambda_0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{C}$ die (positiv orientierte) Kreislinie in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt λ_0 und Radius ε_0. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (H - \gamma)^{-1} \,\mathrm{d}\gamma = E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0) = P_{N(H - \lambda_0)}.$$

Beweis. Wegen

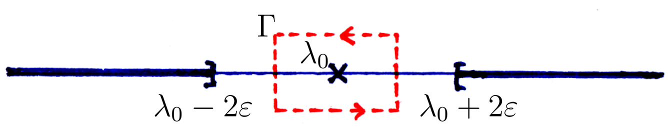
$$(H - \gamma)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \gamma)^{-1} \,\mathrm{d}E(\lambda), \quad \gamma \in \Gamma,$$

folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma (H - \gamma)^{-1} \,\mathrm{d}\gamma &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \gamma)^{-1} \,\mathrm{d}E(\lambda) \,\mathrm{d}\gamma \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma (\lambda - \gamma)^{-1} \,\mathrm{d}\gamma \right\} \mathrm{d}E(\lambda) \\
&=: J.
\end{aligned}$$

Der Integrand genügt der Abschätzung $\frac{1}{|\lambda - \gamma|} \leq \frac{1}{\varepsilon_0}$ und wir dürfen die Integrationsreihenfolge nach dem Satz von Fubini vertauschen. Aus der Funktionentheorie wissen wir, dass

$$\hat{\chi}_{\lambda_0, \varepsilon_0}(\lambda) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma (\lambda - \gamma)^{-1} \,\mathrm{d}\gamma = \begin{cases} 1, & |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0, \\ 1/2, & |\lambda - \lambda_0| = \varepsilon_0, \\ 0, & |\lambda - \lambda_0| > \varepsilon_0. \end{cases}$$



Wegen $E(\lambda_0 - \varepsilon_0 - 0) = E(\lambda_0 - 0)$ und $E(\lambda_0) = E(\lambda_0 + \varepsilon_0)$ folgt

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_{\lambda_0, \varepsilon_0}(\lambda) \,\mathrm{d}E(\lambda) = E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0).$$

$\square$

Eine für die Anwendungen besonders wichtige Charakterisierung der diskreten Eigenwerte unterhalb von $\inf \sigma_{\text{ess}}(H)$ wird durch das sog. *min-max-Prinzip* gegeben (siehe [25, Theorem XIII.1, XIII.2]). Für selbstadjungiertes und halbbeschränktes H definieren wir für beliebige Vektoren $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathcal{H}$ (nicht notwendig linear unabhängig) zunächst

$$U_H(\varphi_1, \dots, \varphi_m) := \inf \{\langle H\psi, \psi\rangle\,; \psi \in D(H),\ \|\psi\| = 1,\ \psi \perp \varphi_j,\ 1 \leq j \leq m\}$$

und

$$\mu_n(H) := \sup_{\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}} U_H(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,$$

sowie

$$\mu_1 := \inf \{\langle H\psi, \psi\rangle\,; \psi \in D(H),\ \|\psi\| = 1\}\,.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann: *Entweder* gibt es n Eigenwerte (gezählt mit Vielfachheiten) unterhalb von $\sigma_{\text{ess}}(H)$ und $\mu_n(H)$ ist der n-te Eigenwert *oder* $\mu_n(H) = \inf \sigma_{\text{ess}}(H)$; in diesem Fall gilt $\mu_n = \mu_{n+1} = \mu_{n+2} = \dots$ und es gibt höchstens $n-1$ Eigenwerte (mit Vielfachheiten gezählt) unterhalb von $\sigma_{\text{ess}}(H)$.

Bemerkung 10.9.

(1) Wenn $\dim E(\lambda) < \infty$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so gibt $\dim R(E(\lambda))$ gerade die Anzahl der Eigenwerte unterhalb von λ an (mit Vielfachheiten gezählt).

(2) Man vergleiche die Definition der μ_n mit der Charakterisierung der Eigenwerte eines kompakten, symmetrischen, nicht-negativen Operators; siehe Theorem 5.4.

(3) Ein Beispiel für die Anwendung des *min-max-Prinzips* findet sich in Aufgabe 10.4.

10.1 Übungen

Aufgabe 10.1. Für selbstadjungiertes $H\colon D(H) \to \mathcal{H}$ seien $\sigma_{\text{cont}}(H)$ und $\sigma_{\text{ess}}(H)$ das kontinuierliche bzw. das wesentliche Spektrum.

(a) Man zeige, dass $\sigma_{\text{ess}}(H)$ stets abgeschlossen ist und dass $\sigma_{\text{cont}}(H) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$.

(b) Für $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ symmetrisch und kompakt bestimme man $\sigma_{\text{cont}}(H)$ und $\sigma_{\text{ess}}(H)$ in den beiden Fällen $\dim N(H) = 0$ und $\dim N(H) > 0$.

Aufgabe 10.2. Sei $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetig und sei M_V der von V in $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$ erzeugte selbstadjungierte Operator, d.h.

$$D(M_V) = \{f \in \mathcal{H}; Vf \in \mathcal{H}\}\,, \quad M_V f = Vf, \forall f \in D(M_V).$$

(a) Man bestimme die Spektralschar $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ von M_V.
Hinweis: Man betrachte hierzu die charakteristischen Funktionen der Mengen $\{x \in \mathbb{R}^d; V(x) \leq \lambda\}$ und verwende Satz 9.18.

(b) Es ist $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von M_V genau dann, wenn die Niveaumenge von V zum Niveau λ_0 positives Maß besitzt, d.h. wenn $\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^d; V(x) = \lambda_0\}\right) > 0$.

Aufgabe 10.3.

(a) Für $-\infty < a < b < \infty$, $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$f_\varepsilon(x) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_a^b \left(\frac{1}{x - \lambda - \mathrm{i}\varepsilon} - \frac{1}{x - \lambda + \mathrm{i}\varepsilon} \right) \mathrm{d}\lambda.$$

Man zeige, dass $|f_\varepsilon(x)|$ gleichmäßig beschränkt ist für $0 < \varepsilon \leq 1$ und dass für $\varepsilon \downarrow 0$ gilt:

$$f_\varepsilon(x) \to \begin{cases} 0, & x \notin [a,b], \\ 1/2, & x \in \{a,b\}, \\ 1, & x \in (a,b). \end{cases}$$

(b) Sei nun $H = \int \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$ ein selbstadjungierter Operator. Man beweise die *Formel von Stone*:

$$\begin{aligned} s - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_a^b \left[(H - \lambda - \mathrm{i}\varepsilon)^{-1} - (H - \lambda + \mathrm{i}\varepsilon)^{-1} \right] \mathrm{d}\lambda \\ = \frac{1}{2} \left(E(b) + E(b-0) \right) - \frac{1}{2} \left(E(a) + E(a-0) \right). \end{aligned}$$

Aufgabe 10.4. Es sei $A = A^* \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ eine hermitesche Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Dann gilt (ohne Beweis) die folgende *min-max-Formel*

$$\lambda_k = \inf_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1} \in \mathbb{C}^n} \sup \left\{ \langle Au, u \rangle \, ; \|u\| = 1, \, u \perp \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}\} \right\}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

(a) Es genüge $B \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ denselben Voraussetzungen wie A und es bezeichne $\lambda_k(A)$ bzw. $\lambda_k(B)$ die Eigenwerte von A bzw. von B. Man zeige:

$$A \leq B \quad \Longrightarrow \quad \lambda_k(A) \leq \lambda_k(B), \quad 1 \leq k \leq n.$$

(b) Es seien A, B mit den Eigenwerten $\lambda_k(A)$ und $\lambda_k(B)$ wie in (a). Dann gilt

$$|\lambda_k(A) - \lambda_k(B)| \leq \|A - B\|, \quad 1 \leq k \leq n.$$

(b) Es sei $M \subset \mathbb{C}^n$ ein $(n-1)$-dimensionaler Teilraum von $\mathbb{C}^n$ und $B := P_M A P_M$, wobei P_M die Projektion auf M bezeichnet. Dann gilt für die Eigenwerte $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_{n-1}$ von B:

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n$$

(Satz von Rayleigh).

Aufgabe 10.5. Es sei $T\colon D(T) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ und es sei $A \geq 0$ ein beschränkter symmetrischer Operator in $\mathcal{H}$ mit der Eigeschaft, dass $A(T-z)^{-1}$ kompakt ist für ein (oder für alle) $z \in \rho(T)$. Für $E \in \mathbb{R} \cap \rho(T)$ und $m \in \mathbb{N}$ zeige man die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen *(Birman-Schwinger-Prinzip)*:

(i) E ist Eigenwert von $T - A$ mit Vielfachheit m.

(ii) 1 ist Eigenwert von $A^{1/2}(T-E)^{-1}A^{1/2}$ mit Vielfachheit m.

Literaturverzeichnis

[1] N.I. Akhiezer, I.M. Glazman: Theory of linear operators in Hilbert space. Dover Pubn. Inc., 1993

[2] S.K. Berberian: Introduction to Hilbert space. Oxford University Press, 1961

[3] M. Birman, M. Solomyak: Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space. Reidel, Dordrecht 1987

[4] E.B. Davies: Spectral theory and differential operators. Cambridge University Press, 1995

[5] E.B. Davies: Linear operators and their spectra. Cambridge University Press, 2007

[6] M. Demuth, M. Krishna: Determining spectra in quantum theory. Birkhäuser, Boston 2005

[7] N. Dunford, J.T. Schwartz: Linear operators. I. General Theory. Interscience Publ., New York, 1958

[8] N. Dunford, J.T. Schwartz: Linear operators. II. Spectral theory, self-adjoint operators in Hilbert space. Interscience Publ., New York, 1963

[9] W. Faris: Self-adjoint operators. Lecture Notes in Mathematics 433. Springer, 1975

[10] K.O. Friedrichs: Spectral theory of operators in Hilbert space. Springer, 1973

[11] I.C. Gokhberg, M.G. Krein: Introduction to the theory of non-selfadoint operators in Hilbert space. AMS, Providence, R.I. 1969

[12] S. Goldberg: Unbounded linear operators, theory and applications. Dover Pubn. Inc., 2006 (Neuauflage)

[13] S.J. Gustafson, I.M. Sigal: Mathematical concepts of quantum mechanics. Springer, 2003

[14] P.R. Halmos: Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity. Martino Fine Books, 2013 (Neuauflage)

[15] G. Hellwig: Differential operators of mathematical physics. Addison-Wesley, 1964

[16] H. Helson: The spectral theorem. Lecture Notes in Mathematics 1227. Springer, 1986

[17] H. Heuser: Funktionalanalysis. Teubner, Stuttgart 2006 (4. Auflage)

[18] P. Hislop, I.M. Sigal: Introduction to spectral theory, with applications to Schrödinger operators. Springer, 1996

[19] K. Jörgens: Lineare Integraloperatoren. Teubner, Stuttgart 1970

[20] K. Jörgens, J. Weidmann: Spectral properties of Hamiltonian operators. Lecture Notes in Mathematics 313. Springer, 1973

[21] T. Kato: Perturbation theory for linear operators. Springer, New York 1995 (2. Auflage)

[22] A.N. Kolmogoroff, S.V. Fomin: Élements de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionelle. Éditions Mir, Moscou 1974

[23] M. Reed, B. Simon: Methods of Modern Mathematical Physics. I. Functional Analysis. Revised and enlarged edition. Academic Press, New York 1980

[24] M. Reed, B. Simon: Methods of Modern Mathematical Physics. II. Fourier Analysis, Self-Adjointness. Academic Press, New York 1975

[25] M. Reed, B. Simon: Methods of Modern Mathematical Physics. IV. Analysis of Operators. Academic Press, New York 1978

[26] F. Riesz, B. Sz.-Nagy: Vorlesungen über Funktionalanalysis. Dt. Verlag d. Wissenschaften, Berlin 1956

[27] M. Schechter: Principles of functional analysis. AMS, Graduate Studies in Mathematics 36, 2002 (2. Auflage)

[28] B. Simon: Trace ideals and their applications. AMS, Math. Surveys and Monographs 120, 2005

[29] S.L. Sobolev: Applications of functional analysis in mathematical physics. AMS, Providence, R.I. 1963

[30] A. Sudbery: Quantum mechanics and the particles of nature. Cambridge University Press, 1986

[31] J. Weidmann: Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teubner, Stuttgart 2000

[32] J. Weidmann: Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil II: Anwendungen, Teubner, Stuttgart 2003

[33] K. Yosida: Functional analysis. Springer, 1995 (5. Auflage)