

Knotentheorie in der Schule

Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für
das Lehramt am Gymnasium

vorgelegt von Sandra Gerhard
Prüfer: Prof. Dr. Thomas Schick

Göttingen, den 19. Juni 2006

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iii
1 Einleitung	3
2 Knotentheorie	7
2.1 Knoten und Knotenäquivalenz	7
2.2 Knotenprojektionen und deren Äquivalenz	10
2.2.1 Knotenprojektionen und Knotendiagramme	10
2.2.2 Reidemeister-Bewegungen	15
2.3 Knoteninvarianten	20
2.3.1 Anzahl der Komponenten	20
2.3.2 Verschlingungszahl	20
2.3.3 Dreifarbigkeit	22
2.3.4 Entknotungszahl	25
2.3.5 Knotenpolynome	29
2.4 Jones-Polynom als Kauffman-Klammer-Polynom	29
2.5 Entwirrungsinvarianten	36
2.5.1 Entwirrungsinvarianten	36
2.5.2 Das Jones-Polynom als Entwirrungsinvariante	43
2.5.3 Universelle Entwirrungsinvarianten	45
2.6 Zopfgruppen	50
2.6.1 Die Zopfgruppen B_n und Zopfäquivalenz	50
2.6.2 Der Abschluss eines Zopfes	54
2.7 Konstruktion einer universellen Entwirrungsinvariante mittels Hecke-Algebren	57
2.7.1 Hecke-Algebren	57
2.7.2 Konstruktion einer Verschlingungs-Invariante mittels Hecke-Algebren	64
2.7.3 Konstruktion des HOMFLY-Polynoms als universelle Entwirrungsinvariante	67
3 Knotentheorie in der Schulmathematik	73
3.1 Klärung der inhaltlichen Voraussetzungen und Schwierigkeiten	73
3.1.1 Vorgehensweise	73
3.1.2 Inhaltsanalyse	74
3.1.3 Ergebnis	79
3.2 Einordnung der Knotentheorie in die Bildungsstandards	80
3.2.1 Bildungsstandards in Deutschland und Niedersachsen	80

3.2.2	Einordnung der Knotentheorie in die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen	84
3.2.3	Einordnung der Knotentheorie in die allgemeinen mathematischen Kompetenzen	88
3.3	Knotentheorie in der Institution Schule	107
3.3.1	Mathe-AG	107
3.3.2	Facharbeit	108
3.3.3	Projekt	109
4	Ausblick	113
A	Aufgabensammlung	117
A.1	Aufgaben zu den Bausteinen 1, 2 und 3	117
A.2	Aufgaben zu Baustein 4	119
A.3	Aufgaben zu Baustein 5	119
A.4	Offene Aufgaben	119
A.5	Weitere, für die Schule geeignete Themen der Knotentheorie .	120
B	Literatur	121

Abbildungsverzeichnis

1	Kleeblattknoten und Achterknoten	7
2	Kleeblattknoten und Achterknoten als polygonale Knoten . . .	8
3	Knotendeformationen Δ und Δ'	8
4	Beispiel für einen wilden Knoten	9
5	Projektion eines Kleeblattknotens	11
6	Beispiele für nicht erwünschte Projektionsrichtungen	11
7	Trivialer Knoten	14
8	Triviale Verschlingung mit zwei Komponenten	14
9	Rechts- und linkshändiger Kleeblattknoten	14
10	Hopf-Verschlingung	14
11	Whitehead-Verschlingung	14
12	Achterknoten	14
13	Borromäische Ringe	14
14	Zwei Projektionen des Unknotens	15
15	$\Delta.\pi.1.$ und $\Delta'.\pi.1.$	15
16	$\Delta.\pi.2.$ und $\Delta'.\pi.2.$	15
17	Reidemeister-Bewegung Ω_1	16
18	Reidemeister-Bewegung Ω_2	16
19	Reidemeister-Bewegung Ω_3	17
20	Beseitigung einer an der Ecke eintretenden Kante im Dreieck $A'B'C'$	18
21	Beispiele für Dreiecke vom Typ I	18
22	Beispiele für Dreiecke vom Typ II	18
23	Beispiele für Dreiecke vom Typ III	18
24	Überkreuzungsarten und -zahlen	21
25	Verschiedene Überkreuzungszahlen der Hopf-Verschlingung . .	21
26	Überkreuzungszahlen der Whitehead-Verschlingung	22
27	Einfarbige Reidemeister-Bewegungen Ω_1 und Ω'_1	23
28	Einfarbige und mehrfarbige Reidemeister-Bewegung Ω_2 und Ω'_2	23
29	Einfarbige und mehrfarbige Reidemeister-Bewegung Ω_3 und Ω'_3	24
30	Dreifarbiger Kleeblattknoten	24
31	Nicht dreifarbig Whitehead-Verschlingung	25
32	Eliminierung der Kreuzung D_X im Fall $X = N$	26
33	Eliminierung der Kreuzung D_X im Fall $X \neq N$	27
34	Knoten mit Entknotungszahl 2	28
35	Markierung A und B von Kreuzungen	30
36	Nach Markierung A und B aufgelöste Kreuzungen	30
37	Positive und negative Kreuzungen	33
38	Zustände des rechtshändigen Kleeblattknotens	35

39	Umgebungen U in V_+ , V_- und V_0	36
40	Entwirrungs-Tripel mit zweikomponentiger trivialer Verschlingung	37
41	Entwirrungs-Tripel mit Hopf-Verschlingung	38
42	Entwirrungs-Tripel mit rechtshändigem Kleeblattknoten	38
43	Entwirrungs-Tripel mit trivialer Verschlingung mit $r+1$ Komponenten	39
44	Entwirrungs-Tripel mit Achterknoten	44
45	Assoziatives Zopfprodukt	51
46	Trivialer Zopf	51
47	7-Zopf und sein inverser Zopf	52
48	Erzeuger β_i	52
49	Ferne Kommutativität	53
50	Zopfrelation	53
51	Abschluss eines 4-Zopfs	54
52	Invarianz des Zopfabschluss unter der 1. Markov-Bewegung	56
53	Invarianz des Zopfabschluss unter der 2. Markov-Bewegung	56
54	Allgemeine mathematische Kompetenzen ([Kul03a], S. 13)	81
55	Perko-Paar	118

„Oh time, thou must untangle this, not I;
It is too hard a knot for me to untie!“

„O Zeit! Du selbst entwirre dies, nicht ich:
Ein zu verschlungner Knoten ist's für mich.“

William Shakespeare
„What you will / Was ihr wollt“
aus [Ste02b] und [Orl05]

1 Einleitung

Mathematik ist aus Problemen des täglichen Lebens entstanden. Für häufig zu lösende Aufgaben wurden Verfahren und Algorithmen entwickelt, die in bewiesenen Sätzen abgesichert wurden. Diese Sätze wurden wiederum in eine deduktiv organisierte Theorie eingebunden, aus der schließlich rein innermathematische Problemstellungen hervorgingen. Heute sind diese Probleme, wie beispielsweise der Satz von Fermat, oft bekannter als die lebensnahen Aufgaben, die einst zum mathematischen Tun anregten.

Betrachtet man Schulmathematik unter dem Aspekt, wie Mathematik entstanden ist, scheint die Forderung nach einem allgemeinbildenden, anwendungsorientierten Unterricht verständlich. Schüler sollen die Welt durch die Augen der Mathematik wahrnehmen und verstehen, Mathematik als schöpferisches Tun erleben und begreifen und Problemlösefähigkeiten erlangen. Mit Blick auf die Anforderungen im Berufsleben sollen sie in Umweltsituationen mathematische Konzepte erkennen und diese in Sachsituationen anwenden können. Diese Forderungen sind nicht neu. Bereits 1975 hat WINTER einen Katalog mit ähnlichen allgemeinen, verhaltensorientierten Lernzielen vorgestellt und weitere Recherchen ergeben, dass diese Vorstellungen von Lernzielen des Mathematikunterrichts auch schon zu Beginn des 20. Jahrhunderts bekannt waren. Die Förderung dieser, spätestens seit PISA in Deutschland unter dem Begriff „mathematical literacy“ bekannten, allgemeinen mathematischen Kompetenzen hat nun endlich Einzug in die Bildungsstandards und Curricula deutscher Schulen gefunden. Damit hat sich die Schulmathematik weitgehend von einem axiomatisch-deduktiven Aufbau verabschiedet.

Mit Rückblick auf die Geschichte der Mathematik erfüllt die Schwerpunktsetzung auf einen verhaltens- und handlungsorientierten Unterricht auch die Forderung nach einem authentischen Mathematikunterricht. Mathematik verliert jedoch an Authentizität, wenn Handlungsorientierung mit Anwendung gleichgesetzt wird. Hier besteht die Gefahr, dass nicht anwendungsorientierte, innermathematische Themen fälschlicherweise alle Handlungsorientierung und damit auch jegliche Verwendbarkeit im Mathematikunterricht abgesprochen wird. Diese Befürchtung ist nicht unbegründet, geriet doch nach der gescheiterten Reform des Mathematikunterrichts im Sinne der „Neuen Mathematik“ mit der Topologie ein wichtiger fachwissenschaftlicher Zweig der Mathematik als zu axiomatisch-deduktiv so stark in Verruf, dass er bis heute lediglich unter dem Deckmantel der Kombinatorik in der Schulmathematik behandelt wird. Mit der Ausklammerung der Mathematik, die auf den ersten Blick nicht im Alltag anwendbar zu sein scheint, wie z.B. der Topologie, wird die Mathematik der letzten Jahrhunderte und damit ein wichtiges Kulturgut, im Schulunterricht verfälscht dargestellt.

Hier stellt sich die Frage, welche innermathematischen Themen für die Schülerinnen und Schüler motivierend in den Schulunterricht integriert werden können, während sie gleichzeitig den von den Kultusministerien geforderten allgemeinen und inhaltlichen mathematischen Kompetenzen genügen. Ich denke, dass eines dieser Themen „Knotentheorie“ lauten kann. In der vorliegenden Arbeit werde ich diese These überprüfen und unterstreichen, indem ich mit den Knoteninvarianten einen kleinen, aber grundlegenden und vor allem anschaulichen Teil der Knotentheorie aufgreife, für die Leserinnen und Leser aufbereite und unter fachdidaktischen Gesichtspunkten beleuchte werde.

Gliederung

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Im ersten, fachwissenschaftlichen Teil wird in Abschnitt 2.1 zunächst eine intuitive, aber auch eine exakte Definition von Knoten und Knotendeformationen gegeben, wobei wir uns an [Rei48] und [Sos00] orientieren. Um mit diesen Knoten besser arbeiten zu können, werden in Abschnitt 2.2, in dem wir uns hauptsächlich auf [Rei48] beziehen, Knotenprojektionen und Knotendiagramme eingeführt und eine Beziehung zwischen Knoten und ihren Projektionen bzw. Diagrammen hergestellt. Dabei spielen Reidemeister-Bewegungen eine zentrale Rolle. In Abschnitt 2.3 werden verschiedene Knoteninvarianten vorgestellt, die vor allem [Ada95] entnommen sind. Dabei geben wir bereits einen Ausblick auf eine besonders wichtige Art von Invarianten, den Knotenpolynomen, mit denen wir uns in den weiteren Kapiteln näher beschäftigen werden. Einen ersten Vorgeschmack bietet Abschnitt 2.4, in dem als Beispiel für ein Knotenpolynom das Kauffman-Klammer-Polynom bzw. das Jones-Polynom vorgestellt wird. Das Jones-Polynom gehört zu den Entwirrungsinvarianten, mit welchen wir uns in Abschnitt 2.5, dem genau wie Abschnitt 2.4 [Lüc97] als Quelle dient, näher beschäftigen werden. An dieser Stelle werden wir auch die universelle Entwirrungsinvariante definieren. Schließlich ist noch die Existenzfrage der universellen Entwirrungsinvariante zu klären. Dazu wird in Abschnitt 2.6, der sich an [Pra97] orientiert, zunächst die Beziehung zwischen Knoten und Zöpfen geklärt, um anschließend in Abschnitt 2.7 eine universelle Entwirrungsinvariante, das HOMFLY-Polynom, aus Zöpfen mittels Hecke-Algebren zu konstruieren. In diesem letzten Abschnitt beziehen wir uns vor allem auf [Lüc97] und [HKW86]. Die Abbildungen wurden [War03] und dem Programm „Knotplot“ (verfügbar über [Sch]) entnommen und überarbeitet.

Im zweiten, fachdidaktischen Teil werde ich in Abschnitt 3.1 zunächst die zuvor behandelte Theorie auf benötigte Vorkenntnisse und zu erwartende Schwierigkeiten untersuchen. Dabei soll hauptsächlich geklärt werden, ob in-

nerhalb der Knotentheorie ein ausreichend großes Stoffgebiet existiert, das für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I und II verständlich aufbereitet werden kann. Danach werde ich in Abschnitt 3.2 die im Jahre 2003 von der Kultusministerkonferenz beschlossenen Bildungsstandards, die unter [Kul03a] einzusehen sind, vorstellen und der Frage nachgehen, ob das in Abschnitt 3.1 abgegrenzte Gebiet der Knotentheorie sowohl zur Förderung von allgemeinen verhaltensbezogenen Kompetenzen beitragen, als auch inhaltlichen Kompetenzen genügen kann. Abschließend werde ich in Abschnitt 3.3 klären, ob und wie weit der Schulunterricht an deutschen und vor allem niedersächsischen Gymnasien Raum für die Knotentheorie bietet.

Danksagung

Ich möchte mich bedanken bei Prof. Dr. Thomas Schick für das interessante und fesselnde Thema und eine umfassende und effektive Betreuung, bei Dr. Norbert Vormoor für die Hilfe bei fachdidaktischen Fragen, bei Dr. Stefan Wiedmann für die geduldige Unterstützung bei zahlreichen Fragen und LaTeX-Problemen, bei Johannes Warnecke für das zur Verfügung stellen seiner Bilddateien und bei Johannes Härtel und Desiree Dauber für das abschließende Lesen der Arbeit und die zahlreichen Tipps und Hinweise auf formale und orthographische Fehler.

2 Knotentheorie

2.1 Knoten und Knotenäquivalenz

Wir beginnen mit einigen elementaren Definitionen von Knoten, Verschlingungen und deren Äquivalenz. Hierzu werden wir zunächst eine intuitive Einführung in die Begriffe geben, um sie anschließend mathematisch zu definieren.

Wenn wir an Knoten denken, kommt uns als erstes der Knoten in einem Faden, einer Schnur oder einem Seil in den Sinn. Greifen wir die Idee des Knotens im Seil auf, dann unterscheidet sich der mathematische Knoten von dieser Vorstellung im wesentlichen in drei Punkten. Erstens sind die Enden des Seils so verklebt, dass nicht mehr festzustellen ist, wo sich die Klebestelle befindet. Der Knoten ist also geschlossen. Zweitens ist der Knoten beliebig dehn- und zusammenziehbar, eher vergleichbar mit einem Gummiband als mit einem Seil. Drittens ist die Dicke des Seils vernachlässigbar. Der mathematische Knoten ist also unendlich dünn.

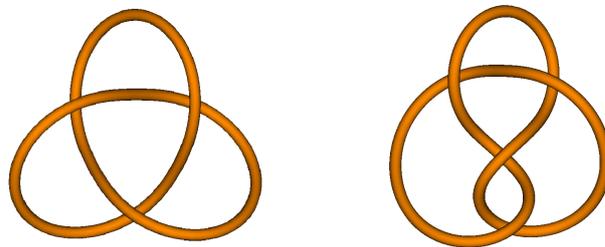


Abb. 1: Kleeblattknoten und Achterknoten

Im folgenden geben wir eine mathematische Definition des Knotens, wobei wir bei dieser Gelegenheit auch die Verschlingung, die aus mehreren disjunkten Knoten besteht, definieren.

Definition 1.1 (Knoten und Verschlingung)

Als Knoten oder polygonalen Knoten bezeichnen wir einen geschlossenen, aus endlich vielen Strecken und Eckpunkten bestehenden doppelpunktfreien Polygonzug im \mathbb{R}^3 . Betrachten wir eine endliche Menge von n polygonalen Knoten, dann nennen wir die disjunkte Vereinigung der n Knoten eine (polygonale) Verschlingung mit n Komponenten. Ein Knoten ist demnach eine Verschlingung mit einer Komponente.

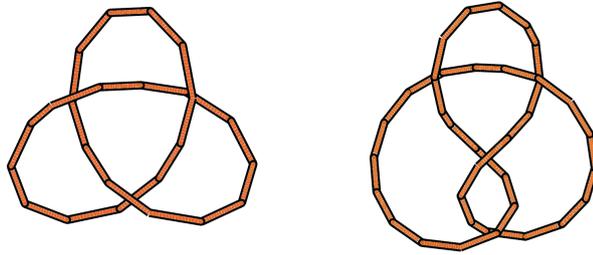


Abb. 2: Kleeblattknoten und Achterknoten als polygonale Knoten

Im Folgenden werden wir aus Gründen der Verständlichkeit zunächst den Begriff Knoten äquivalent zum Begriff Verschlingung verwenden. Bei Bedarf kann also der Begriff des Knotens durch den Begriff der Verschlingung (z.B. Knotendeformation durch Verschlingungsdeformation) ersetzt werden. Im späteren Teil der Arbeit bedarf es an manchen Stellen einer Unterscheidung zwischen Knoten und Verschlingungen. Dann werden wir den Knoten als einkomponentigen Spezialfall der Verschlingung betrachten.

Definition 1.2 (Knotendeformationen Δ und Δ')

Sei K ein Knoten. K enthalte die Strecke mit den Endpunkten A und C . Wir bezeichnen diese Strecke mit \overline{AC} . Sei B ein Punkt, so dass die Fläche des Dreiecks ABC außer der Strecke \overline{AC} keinen Punkt mit K gemeinsam hat. Dann definieren wir Δ als den Prozess, der \overline{AC} durch $\overline{AB} \cup \overline{BC}$ ersetzt. Sei Δ' der zu Δ inverse Prozess.

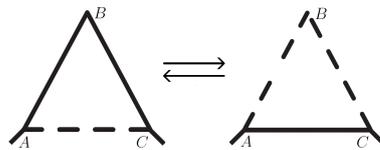


Abb. 3: Knotendeformationen Δ und Δ'

Definition 1.3 (Knotenäquivalenz)

Zwei Knoten heißen äquivalent oder isotop, wenn sie aus einer Folge von Knotendeformationen Δ und Δ' auseinander hervorgehen. Einen Knoten, der zu einem Dreieck isotop ist, nennen wir Unknoten oder trivialen Knoten (vgl. Abb. 7).

Bemerkung 1.4

Wenn wir im Verlauf der Arbeit von Knoten sprechen, sprechen wir in der Regel von Äquivalenzklassen von Knoten oder von Knotenklassen. Zwar haben wir den geschlossenen Polygonzug selbst als Knoten definiert, exakter wäre es jedoch, wenn wir von einem geschlossenen Polygonzug als einem Repräsentanten des Knotens sprechen würden.

Der von uns definierte mathematische Knoten deckt sich mit unserer Vorstellung eines Knotens als unendlich dünnes, an den Enden zusammengeklebtes Seil. Die Knotenäquivalenz ermöglicht schließlich eine beliebige Dehn- und Zusammenziehbarkeit des Knotens. Berücksichtigen wir jedoch ästhetische Gesichtspunkte, wäre anstelle eines Polygonzuges eher eine glatte Kurve wünschenswert.

Es existieren in der Knotentheorie weitere Definitionen, in denen der Knoten als geschlossene glatte Kurve definiert ist. Nach diesen Definitionen konstruierte Knoten sind aber in der Regel entweder schwieriger zu handhaben als die geschlossenen, doppelpunktfreien Polygonzüge, oder sie sind zu diesen nicht äquivalent. In der Tat lassen sich einige Sätze (vgl. Satz 2.3 und Reidemeister-Theorem 2.10) ohne die von uns angeführte Definition schwer beweisen. Ein weiterer wichtiger Vorteil der Definition eines Knotens als Polygonzug ist, dass sogenannte wilde Knoten vermieden werden.

Bemerkung 1.5 (Wilde Knoten)

Wilde Knoten erhält man durch unendliche Knotungsprozesse. Dabei wird die Verschlingung einer Kurve immer kleiner und konvergiert schließlich gegen einen Grenzpunkt. Dieser Grenzpunkt wird *wilder Punkt* oder *lokale Pathologie* genannt.

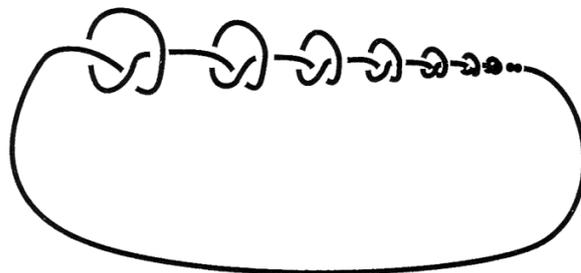


Abb. 4: Beispiel für einen wilden Knoten

Da wir in dieser Arbeit auch die Ästhetik berücksichtigen wollen, werden wir uns bei der Darstellung von Knoten in den Fällen, in denen die speziellen Eigenschaften geschlossener Polygonzüge nicht benötigt werden, geschlossener

glatter Kurven bedienen. Dies lässt sich mit unserer Definition in soweit vereinbaren, dass wir bei einem sichtbar glatten Knoten davon ausgehen, dass es sich dabei um einen Polygonzug handelt, der aus einer großen Anzahl von Strecken besteht, so dass die Ecken des Polygonzuges nicht mehr sichtbar wahrnehmbar sind.

Wenden wir uns abschließend noch einer weiteren Definition zu. Für Knoten ergeben sich zusätzliche Klassifikationsmöglichkeiten, wenn sie eine Orientierung erhalten.

Definition 1.6 (Orientierte Knoten und Verschlingungen)

Ein Knoten wird zu einem orientierten Knoten durch die Festlegung eines Durchlaufsinns. Eine orientierte Verschlingung ist eine Verschlingung, die aus orientierten Knoten besteht.

Bemerkung 1.7

Als *inversen Knoten* K^- bezeichnen wir den zu einem orientierten Knoten K entgegengesetzt orientierten Knoten. Ein *symmetrischer Knoten* K^s ist ein Knoten, der zu seinem inversen Knoten K^- äquivalent ist. Ein Knoten heißt *amphichiral*, wenn er zu seinem Spiegelbild K^\times (bezüglich einer beliebigen Ebene des \mathbb{R}^3) isotop ist.

Betrachten wir zwei Knoten unter den Gesichtspunkten der bisherigen Definitionen und Bemerkungen, dann drängen sich folgende Fragen auf: Sind die beiden Knoten gleich? Wann sind zwei Knoten gleich? Wann ist ein Knoten ein Unknoten?

Die Frage nach der „Gleichheit“ zweier Knoten, also die Frage, ob und wann zwei Knoten äquivalent sind, sowie die daraus abgeleitete Frage, ob und wann ein Knoten zum trivialen Knoten äquivalent ist, sind zentrale Fragen der Knotentheorie. Mit diesen Fragen werden wir uns im Laufe dieser Arbeit näher beschäftigen. Zunächst werden wir jedoch versuchen, die Handhabung von Knoten zu erleichtern, ohne dass die für diese Fragen relevanten Informationen verloren gehen. Zu diesem Zweck führen wir Knotenprojektionen und Knotendiagramme ein.

2.2 Knotenprojektionen und deren Äquivalenz

2.2.1 Knotenprojektionen und Knotendiagramme

Um eine bequeme Handhabung von Knoten und Verschlingungen zu ermöglichen, projizieren wir diese in geeigneter Weise in eine Ebene. Auch hier geben wir zunächst eine intuitive Vorstellung der Knotenprojektion, bevor wir sie definieren und einige wichtige Eigenschaften beweisen.

Eine Knotenprojektion ist vergleichbar mit einem Schatten, den ein geschickt beleuchteter Knoten auf eine Wand wirft.

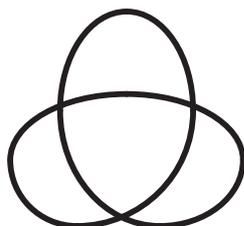


Abb. 5: Projektion eines Kleeblattknotens

Falls der Knoten nicht trivial ist, lässt es sich nicht vermeiden, dass sich Kreuzungen bilden. Dies geschieht dadurch, dass zwei Punkte, die auf verschiedenen Strecken des Knotens liegen, auf denselben Punkt an der Wand projiziert werden. Da für uns wichtig ist, welche der beiden Strecken an einer Kreuzung oben und welche unten liegt, müssen die Kreuzungen entsprechend markiert werden.

Aus ästhetischen und vor allem aus praktischen Gründen nicht wünschenswert sind Projektionen, bei denen ein Eckpunkt und ein anderer Punkt des Knotens oder mehr als zwei Punkte des Knotens auf denselben Punkt an der Wand projiziert werden. Durch diese Projektionen wird die Kennzeichnung der Lagebeziehung der beteiligten Strecken und Eckpunkte wesentlich erschwert.



Abb. 6: Beispiele für nicht erwünschte Projektionsrichtungen

Definition 2.1 (reguläre Projektion)

Wir nennen eine Parallelprojektion eines polygonalen Knotens regulär, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

- (a) Es werden höchstens zwei Strecken des Knotens auf denselben Punkt in der Ebene projiziert. Diesen Punkt nennen wir Doppelpunkt.
- (b) Ein Doppelpunkt der Projektion entspricht nicht der Projektion eines Eckpunktes des Knotens.

Projektionen, die diese Bedingungen nicht erfüllen, nennen wir singulär.

Satz 2.2 ([Rei48], S. 5)

Eine reguläre Projektion besitzt nur endlich viele Doppelpunkte.

Beweis Wir nehmen an, dass eine reguläre Projektion unendlich viele Doppelpunkte besitzt. Dann müssen die Projektionen zweier Strecken des Knotenpolygons eine Strecke von Doppelpunkten gemeinsam haben. Die Strecke wird dann von Doppelpunkten berandet, denen Eckpunkte des Polygons entsprechen. Dies steht aber im Widerspruch zur Definition der regulären Projektion. \square

Satz 2.3 (Existenz regulärer Projektionen, vgl. z.B. [Kaw96], S. 7f.)

Für jeden polygonalen Knoten K gibt es eine reguläre Projektionsrichtung.

Beweis Jede Projektionsrichtung ist bestimmt durch eine Gerade, die durch den Ursprung des \mathbb{R}^3 geht und orthogonal zur Projektionsebene ist. Der Raum der Ursprungsgeraden im \mathbb{R}^3 ist die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Wir betrachten die singulären Projektionsrichtungen eines Knotens K . Sei G die Menge der Geraden die durch den Ursprung des \mathbb{R}^3 gehen und singuläre Projektionsrichtungen festlegen. Es genügt zu zeigen, dass G nirgends in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dicht liegt. Dies beweisen wir, indem wir zeigen, dass G eine eindimensionale Untermenge des $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ist.

Sei G_1 die Menge der Geraden, die durch den Ursprung des \mathbb{R}^3 verlaufen und parallel zu den Geraden liegen, die eine Ecke und eine Kante von K schneiden. Sei G_2 die Menge der Geraden, die durch den Ursprung des \mathbb{R}^3 verlaufen und parallel zu den Geraden liegen, die K in mehr als zwei Punkten schneiden. Dann ist die Menge aller singulären Projektionsrichtungen $G \subset G_1 \cup G_2$. Eine Projektion von K hat genau dann Doppelpunkte, die der Projektion eines Eckpunktes von K entsprechen, wenn die Projektionsrichtung von einer Geraden der Menge G_1 festgelegt wird. Da K nach Definition 1.1 aus endlich vielen Ecken und endlich vielen Strecken zusammengesetzt ist, besteht G_1 aus endlich vielen Geraden des $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

In einer Projektion von K werden genau dann mehr als zwei Strecken auf denselben Punkt projiziert, wenn die Projektionsrichtung von einer Geraden der Menge G_2 festgelegt wird. Da die Geraden, die jeweils mindestens drei Strecken von K schneiden, auf einem einschaligen Hyperboloiden liegen, liegen ihre Parallelen, die durch den Ursprung des \mathbb{R}^3 verlaufen, auf einem Kegel zweiter Ordnung. Da K nach Definition 1.1 aus endlich vielen Strecken zusammengesetzt ist, besteht G_2 aus endlich vielen Kegelschnitten zweiter Ordnung (vgl. [VY10], S. 299, 301).

Damit ist $G_1 \cup G_2$ und folglich auch G eine eindimensionale Untermenge des $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, die nirgends dicht in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ liegt und die Behauptung bewiesen. \square

Die Knotenprojektion lässt sich weiter vereinfachen, ohne dass die für uns relevanten Informationen verloren gehen. Hierzu führen wir einige Bezeichnungen ein.

Definition 2.4 (Knotendiagramm)

Eine reguläre Projektionskurve wird durch ihre Doppelpunkte D_1, \dots, D_n in $2n$ doppelpunktfreie Streckenzüge s_1, \dots, s_{2n} zerlegt, die die Projektionsebene in endlich viele Polygone G_1, \dots, G_g unterteilt. Als Knotendiagramm bezeichnen wir die räumlichen Beziehungen zwischen D_i, s_k und G_l . Dazu gehört die Angabe der Doppelpunkte D_i , die die Streckenzüge s_k beranden zusammen mit den Gebieten G_l , die s_k berühren.

Diese Definition der Knotendiagramme geht auf REIDEMEISTER zurück, der sie als *Schema einer Projektion* bezeichnete. Ein herkömmliches Knotendiagramm unterscheidet sich optisch nicht von einer Knotenprojektion. Wir müssen allerdings in einem Knotendiagramm, im Gegensatz zu einer Knotenprojektion, nicht mehr berücksichtigen, wo genau die Strecken und Kreuzungen liegen, solange die räumlichen Beziehungen erhalten bleiben.

Es gibt noch weitere Informationen, von denen wir fordern, dass sie in eine Projektion bzw. in ein Knotendiagramm einfließen. Damit wir aus einer Projektion bzw. einem Knotendiagramm ablesen können, wie die sich in einem Doppelpunkt schneidenden Strecken zueinander liegen, werden wir die Projektionen bzw. Knotendiagramme normieren.

Definition 2.5 (Normierung)

Wir legen für jede Projektionsrichtung ein Oben und ein Unten fest und benennen die Punkte auf dem Knoten, die den Doppelpunkten D_i der Projektion entsprechen je nach Lage Überkreuzung Ueb_i und Unterkreuzung Un_i . Die Normierung der Projektion bzw. des Knotendiagramms erfolgt dadurch, dass wir für jeden Doppelpunkt D_i angeben, welche sich in D_i kreuzenden Strecken Un_i bzw. Ueb_i enthalten.

Folgerung 2.6

Es ist offensichtlich, dass zwei Knoten, die dieselbe normierte Projektion bzw. dasselbe normierte Knotendiagramm besitzen, isotop sind.

Die Normierung geschieht durch Auslassungen in der Projektion bzw. im Knotendiagramm, wie es in den Abb. 9 bis Abb. 13 zu sehen ist. In Beispiel 2.7 sehen wir Diagramme wichtiger Knoten und Verschlingungen.

Beispiel 2.7

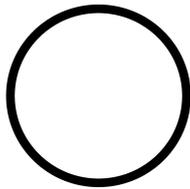


Abb. 7: Trivialer Knoten

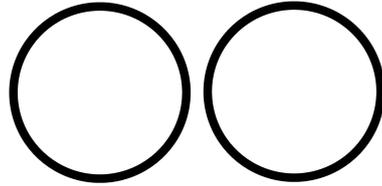


Abb. 8: Triviale Verschlingung mit zwei Komponenten

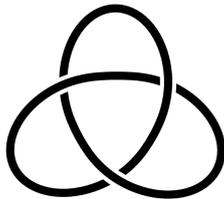


Abb. 9: Rechts- und linkshändiger Kleeblattknoten

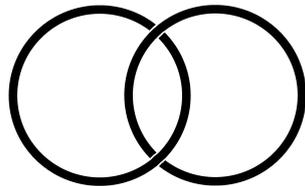
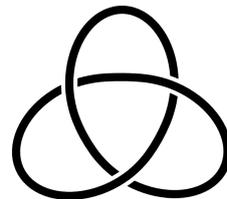


Abb. 10: Hopf-Verschlingung

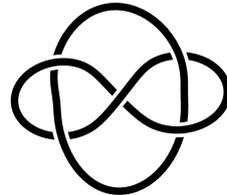


Abb. 11: Whitehead-Verschlingung

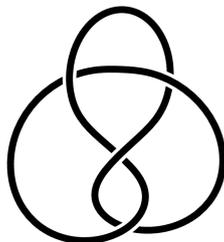


Abb. 12: Achterknoten

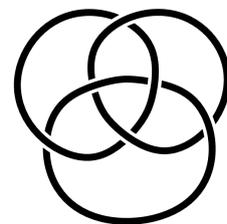


Abb. 13: Borromäische Ringe

Allerdings wissen wir noch nicht, ob und wenn ja welche der in den Diagrammen dargestellten Knoten zueinander äquivalent sind.

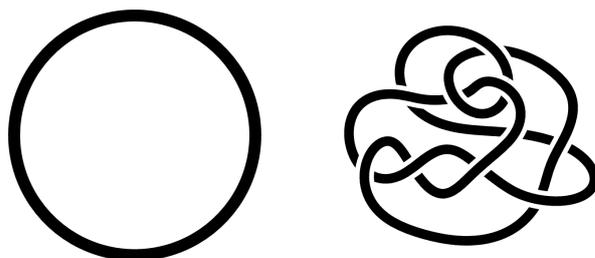


Abb. 14: Zwei Projektionen des Unknotens

Dazu müssen wir herausfinden, ob sie sich durch Knotendeformationen ineinander überführen lassen oder nicht. Damit wir im weiteren Verlauf der Arbeit mit Knotendiagrammen arbeiten können, müssen wir zunächst wissen, wie sich Knotendeformationen auf die normierten Projektionen und die zugehörigen Knotendiagramme auswirken.

2.2.2 Reidemeister-Bewegungen

Wir wollen untersuchen, wie sich eine Knotenprojektion und das zugehörige Knotendiagramm bei einer Deformationen des Knotens verhalten. Zunächst werden wir sehen, dass die Knotendeformationen Δ und Δ' in den normierten Projektionen Abänderungen bewirken, die - unter Berücksichtigung der in den Projektionen auftretenden Doppelpunkte - diesen Knotendeformationen ähnlich sind und das Knotendiagramm der Projektion unverändert lassen.

Definition 2.8 (ebene Deformationen $\Delta.\pi.1$ und $\Delta.\pi.2$)

1. Da die Projektionskurve, wie der Knoten oder die Verschlingung selbst, ein, wenn auch nicht unbedingt doppelunktpunktfreies, Polygon ist, kann sie bei den Knotendeformationen Δ und Δ' ebenfalls den Prozessen Δ und Δ' unterworfen werden. Diese Prozesse nennen wir $\Delta.\pi.1.$ und $\Delta'.\pi.1.$

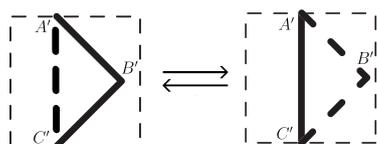


Abb. 15: $\Delta.\pi.1.$ und $\Delta'.\pi.1.$

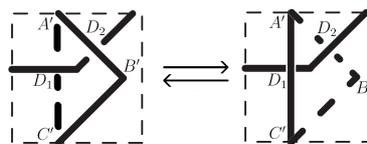


Abb. 16: $\Delta.\pi.2.$ und $\Delta'.\pi.2.$

2. Das bei den Deformationen Δ und Δ' auftretende Dreieck ABC kann als Projektion ein Dreieck $A'B'C'$ besitzen, das von den übrigen Strecken der Projektionskurve genau in zwei Punkten D_1 und D_2 geschnitten wird, wobei $D_1 \in \overline{A'C'}$ und $D_1, D_2 \notin \{A', B', C'\}$, und im Inneren keine Doppelpunkte enthält. Diese Prozesse nennen wir $\Delta.\pi.2$ und $\Delta'.\pi.2$.

Wenn wir im weiteren Verlauf der Arbeit mit Knotendiagrammen arbeiten, können wir die ebenen Deformationen vernachlässigen.

Knotendeformationen Δ und Δ' können in normierten Projektionen aber auch Operationen hervorrufen, die das zugehörige Knotendiagramm abändern.

Definition 2.9 (Reidemeister-Bewegungen Ω_1 , Ω_2 und Ω_3)

1. Die Knotendeformationen Δ bzw. Δ' verändern die Knotenprojektion so, dass ein Teilstreckenzug, dessen Projektion doppeltpunktfrei war, in eine Schleife abgeändert wird. Die dadurch entstehenden Unter- und Überkreuzungen sind benachbart. Diesen Prozess bezeichnen wir mit Ω_1 , die inverse Operationen mit Ω'_1 .

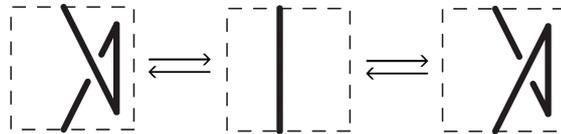


Abb. 17: Reidemeister-Bewegung Ω_1

2. Die Knotendeformationen Δ bzw. Δ' verändern die Knotenprojektion so, dass zwei Teilstreckenzüge des Knotens, deren Projektionen keine gemeinsamen Punkte hatten, übereinander geschoben werden. Dabei entstehen entweder zwei benachbarte Über- oder Unterkreuzungen. Diesen Prozess bezeichnen wir mit Ω_2 , die inverse Operationen mit Ω'_2 .



Abb. 18: Reidemeister-Bewegung Ω_2

3. Zwei Teilstreckenzüge s_1, s_2, s_3 des Knotens liefern in der Projektion drei Doppelpunkte, die paarweise benachbart sind, wobei s_1 sowohl s_2

als auch s_3 und s_2 den Teilstreckenzug s_3 über- bzw. unterkreuzen. Die Knotendeformationen Δ bzw. Δ' verändern die Knotenprojektion so, dass s_1 über bzw. unter die Unter- und Überkreuzungen von s_2 und s_3 hinweg- bzw. hindurchgeschoben wird. Diesen Prozess bezeichnen wir mit Ω_3 , die inverse Operationen mit Ω'_3 .

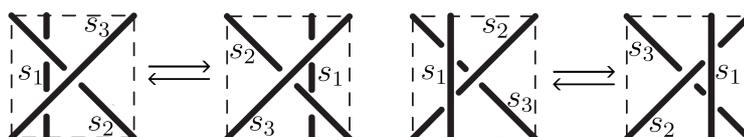


Abb. 19: Reidemeister-Bewegung Ω_3

Satz 2.10 (Reidemeister-Theorem, vgl. z.B. [Pra97], S. 11f.)

Zwei Knoten können genau dann durch Knotendeformationen Δ und Δ' ineinander übergeführt werden, sind also genau dann äquivalent, wenn ihre Knotenprojektionen durch wiederholte Anwendung der ebenen Deformationen $\Delta.\pi.1$ und $\Delta.\pi.2$ und den Reidemeister-Bewegungen Ω_1 , Ω_3 und Ω_3 , sowie deren Inversen ineinander übergeführt werden können.

Beweis Aus den Definitionen 2.8 und 2.9 der ebenen Deformationen und Reidemeister-Bewegungen folgt, dass Knoten, deren Knotenprojektionen durch $\Delta.\pi.1$, $\Delta.\pi.2$ und Ω_1 , Ω_3 , Ω_3 , sowie deren Inversen ineinander übergeführt werden können, äquivalent zueinander sind. Für den Umkehrschluss genügt es zu zeigen, dass die Knotenprojektionen von zwei im \mathbb{R}^3 äquivalente Knoten K_1 und K_2 , die sich durch eine beliebige Knotendeformation Δ voneinander unterscheiden, äquivalent sind.

Wir betrachten o.B.d.A die Strecke $\overline{AC} \in K_1$, die in die Strecken $\overline{AB} \cup \overline{BC} \in K_2$ deformiert wird. Wir untersuchen die regulär projizierte Deformation von $\overline{A'C'}$ in $\overline{A'B'} \cup \overline{B'C'}$.

Zunächst setzen wir voraus, dass die Strecke $\overline{E'A'}$, die im Punkt A' endet und die Strecke $\overline{C'F'}$, die im Punkt C' beginnt nicht das Innere des Dreiecks $A'B'C'$ schneiden. Wenn dies doch der Fall ist und z.B. die Strecke $\overline{E'A'}$ das Innere des Dreiecks $A'B'C'$ schneidet, dann können wir in der Nähe von A' einen Punkt $A'' \in \overline{A'B'}$ wählen und eine Ω_1 -Bewegung so durchführen, wie in Abb. 20 gezeigt. Es entsteht ein neues Dreieck $A''B'C'$, in der die Strecke $\overline{A'A''}$ das Dreieck nicht schneidet.

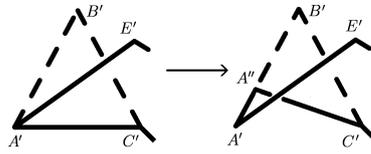


Abb. 20: Beseitigung einer an der Ecke eintretenden Kante im Dreieck $A'B'C'$

Das Innere des betrachteten Dreiecks $A'B'C'$ kann also nur auf zwei mögliche Arten von der Projektionskurve geschnitten werden. Zum einen können die schneidenden Strecken das Dreieck $A'B'C'$ überkreuzen, zum anderen unterkreuzen. Wir unterteilen $A'B'C'$ in Teildreiecke, die ebenfalls entweder von den Strecken der Projektionskurve überkreuzt oder unterkreuzt werden. Die Strecken der Projektionskurve, die $A'B'C'$ schneiden, werden dabei von den Seiten der Teildreiecke transversal geschnitten. Wir wählen die Teildreiecke hinreichend klein, so dass sich vier mögliche Typen I, ..., IV von Teildreiecken ergeben:

Dreiecke vom Typ I sind Dreiecke, die nur einen Doppelpunkt und dessen Zweige enthalten, welche das Dreieck aber nur in zwei Seiten schneiden. Dreiecke vom Typ II enthalten nur einen Eckpunkt und Teile der beiden Strecken, die von diesem Eckpunkt ausgehen. Dreiecke vom Typ III sind Dreiecke, die nur ein Teilstück einer Strecke enthalten und Dreiecke vom Typ IV enthalten keinen Teil der Knotenprojektion.

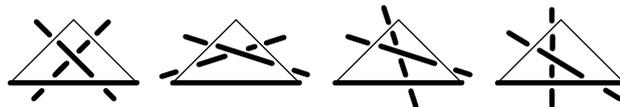


Abb. 21: Beispiele für Dreiecke vom Typ I

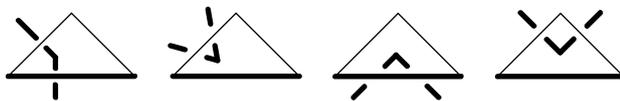


Abb. 22: Beispiele für Dreiecke vom Typ II

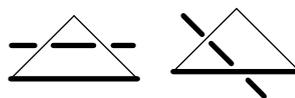


Abb. 23: Beispiele für Dreiecke vom Typ III

Die Konstruktion dieser Dreiecke ist möglich, indem wir zunächst sich paarweise nicht schneidende Dreiecke vom Typ I und II um die Eck- und Doppelpunkte im Inneren des Dreiecks $A'B'C'$ legen und dann die Zwischenräume in Teildreiecke vom Typ III und IV unterteilen. Nun führen wir statt der ursprünglichen Deformation von $\overline{A'C'}$ in $\overline{A'B' \cup B'C'}$ Teildeformationen entlang der Teildreiecke durch, wobei wir bei $\overline{A'C'}$ beginnen und bei $\overline{A'B' \cup B'C'}$ enden. Es ist leicht zu sehen, dass eine Bewegung durch ein Dreieck vom Typ I einer Ω_3 - , Dreiecke vom Typ II und Typ III einer Ω_2 - bzw. Ω_2' - oder einer $\Delta.\pi.2$ - und Dreiecke vom Typ IV einer $\Delta.\pi.1$ - Bewegung entspricht. Da diese Prozesse umkehrbar sind, folgt die Behauptung. \square

Folgerung 2.11

Aus dem Reidemeister-Theorem folgt, dass zwei Knoten genau dann äquivalent sind, wenn ihre Knotendiagramme durch wiederholte Anwendung von Reidemeister-Bewegungen Ω_1 , Ω_3 und Ω_3 , sowie deren Inversen ineinander übergeführt werden können.

Das Reidemeister-Theorem ermöglicht es uns, die Frage nach der Knoten-äquivalenz auf die Frage nach der Äquivalenz von Knotendiagrammen zu reduzieren, da Beweise, die wir in Diagrammen führen, auch für Knoten gelten. In der Theorie sind zwei Knoten, deren Knotendiagramme sich nicht durch Reidemeister-Bewegungen ineinander überführen lassen, nicht äquivalent. Die praktische Anwendung des Reidemeister-Theorems ist jedoch schwierig. Wenn es uns nicht gelingt zwei Diagramme durch Reidemeister-Bewegungen ineinander überzuführen, bedeutet das nicht, dass nicht doch eine Folge von Reidemeister-Bewegungen existiert, die dies ermöglicht. Da es unendlich viele Kombinationsmöglichkeiten von Reidemeister-Bewegungen gibt, existiert keine Möglichkeit, nur unter Anwendung von Reidemeister-Bewegungen zu beweisen, dass zwei Knoten nicht äquivalent sind. So finden wir offensichtlich keine Folge von Reidemeister-Bewegungen, die zwei beliebig ausgewählte Knoten und Verschlingungen aus Beispiel 2.7 ineinander überführt. Damit ist jedoch nicht bewiesen, dass keiner der abgebildeten Knoten und Verschlingungen zu einem der anderen Knoten oder einer der anderen Verschlingungen äquivalent ist. Bisher haben wir noch nicht bewiesen, dass außer dem Unknoten überhaupt weitere Knoten oder Verschlingungen existieren. Es gibt allerdings Möglichkeiten, Knoten voneinander zu unterscheiden, bei denen das Reidemeister-Theorem eine wichtige Rolle spielt. Es handelt sich dabei um sogenannte Knoteninvarianten, mit denen wir uns in den folgenden Kapiteln beschäftigen werden.

2.3 Knoteninvarianten

Eigenschaften eines Knotens, die bei der Abänderung des Knotens durch Δ und Δ' erhalten bleiben, nennen wir Knoteneigenschaften oder Knoteninvarianten. Übertragen auf das Diagramm eines Knotens sind Knoteninvarianten Eigenschaften, die bei Abänderung des Knotendiagramms durch Reidemeister-Bewegungen erhalten bleiben. Stimmt die Invariante eines Knotens nicht mit der Invariante eines weiteren Knotens überein, dann sind die beiden Knoten nicht äquivalent. Umgekehrt können wir allerdings nicht davon ausgehen, dass Knoten, die dieselbe Invariante besitzen, isotop sind. Im Folgenden geben wir einen Überblick über einige Knoteninvarianten.

2.3.1 Anzahl der Komponenten

Die einfachste Invariante einer Verschlingung ist die *Anzahl der Komponenten*. Wenn wir zwei Verschlingungen vergleichen wollen, zählen wir jeweils die Komponenten. Sind die beiden Zahlen nicht identisch, dann sind die Verschlingungen offensichtlich nicht äquivalent.

Damit sind in Beispiel 2.7 die triviale Verschlingung mit zwei Komponenten, die Hopf-Verschlingung und die Whitehead-Verschlingung nicht äquivalent zu den übrigen einkomponentigen Knoten und den Borromäischen Ringen, die mit ihren drei Komponenten wiederum zu keiner der gezeigten Verschlingungen äquivalent sein können. Die Anzahl der Komponenten kann keine Verschlingungen voneinander unterscheiden, die die gleiche Anzahl an Komponenten besitzen, aber nicht äquivalent sind. Um Verschlingungen mit der gleichen Anzahl an Komponenten zu unterscheiden, müssen wir uns einer anderen Verschlingungsinvarianten bedienen.

2.3.2 Verschlingungszahl

Die Verschlingungszahl gibt an, wie stark zwei Komponenten miteinander verschlungen sind.

Definition 3.1 (Verschlingungszahl)

Betrachten wir das Verschlingungsdiagramm einer orientierten Verschlingung mit zwei Komponenten M und N , dann sehen wir, dass es eine gerade Anzahl von Doppelpunkten geben muss, die sowohl aus einem Punkt von M als auch aus einem Punkt von N bestehen (vgl. z.B. Abb. 25). Jedem dieser Doppelpunkte kann eine Überkreuzungsart und -zahl wie in Abb. 24 zugeordnet werden.

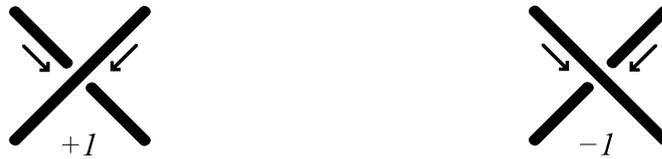


Abb. 24: Überkreuzungsarten und -zahlen

Wir bilden die Summe der ermittelten Überkreuzungszahlen $+1$ und -1 für alle Doppelpunkte von M und N , die sowohl aus einem Punkt von M als auch aus einem Punkt von N bestehen und teilen diese durch 2 . Das Ergebnis ist die Verschlingungszahl.

Satz 3.2

Die Verschlingungszahl ist eine Verschlingungsinvariante.

Beweis Wir müssen zeigen, dass die Verschlingungszahl unter den Reidemeister-Bewegungen invariant ist.

Durch Ω_1 bzw. Ω'_1 kann ein Doppelpunkt in einer der Komponenten erzeugt bzw. eliminiert werden. Dies hat jedoch auf die Anzahl der Doppelpunkte, die aus beiden Komponenten bestehen, keine Auswirkung und verändert somit die Verschlingungszahl nicht.

Führen wir eine Ω_2 -Bewegung auf zwei Polygonzügen der Verschlingung durch, die zu zwei verschiedenen Komponenten gehören, dann haben die beiden neu entstandenen Doppelpunkte die Überkreuzungszahlen $+1$ und -1 . Entsprechend eliminiert eine Ω'_2 -Bewegung zwei Doppelpunkte mit den Überkreuzungszahlen $+1$ und -1 . In beiden Fällen ergibt sich aus den Überkreuzungszahlen die Summe 0 und die Verschlingungszahl ändert sich nicht. Die Prozesse Ω_3 und Ω'_3 haben ebenfalls keine Auswirkungen auf die Verschlingungszahl. Sind die Orientierung der drei Polygonzüge festgelegt und die Überkreuzungszahlen $+1$ und -1 den drei Kreuzungen zugeordnet, ändert sich durch eine Ω_3 - bzw. Ω'_3 -Bewegung die Überkreuzungszahl einer Kreuzung nicht, die Werte der beiden anderen Überkreuzungszahlen werden miteinander vertauscht.



Abb. 25: Verschiedene Überkreuzungszahlen der Hopf-Verschlingung

Die Verschlingungszahl der trivialen Verschlingung mit zwei Komponenten ist 0. Die Verschlingungszahl der Hopf-Verschlingung ist, je nachdem wie die Orientierung auf den beiden Komponenten gewählt wurde $+1$ oder -1 (vgl. Abb. 25). Damit sind die triviale Verschlingung und die Hopf-Verschlingung nicht äquivalent.

Bemerkung 3.3

Es genügt, den Absolutwert der Verschlingungszahl anzugeben, da dieser unabhängig von der gewählten Orientierung ist.

Die Whitehead-Verschlingung hingegen besitzt dieselbe Verschlingungszahl wie die triviale Verschlingung mit zwei Komponenten.

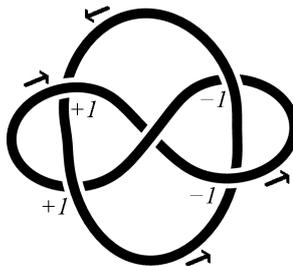


Abb. 26: Überkreuzungszahlen der Whitehead-Verschlingung

2.3.3 Dreifarbigkeit

Bisher haben wir nur Verschlingungsinvarianten betrachtet, die über Verschlingungen mit einer Komponente, also über die eigentlichen Knoten, nichts aussagen. Wir haben vor allem noch nicht bewiesen, dass außer dem Unknoten überhaupt noch weitere Verschlingungen mit einer Komponente existieren. Um dies zu beweisen bedienen wir uns der Dreifarbigkeit von Knoten.

Definition 3.4 (Dreifarbigkeit)

Einen offenen Polygonzug in einem normierten Knotendiagramm, der eine Kreuzung mit einer anderen verbindet und dabei andere Abschnitte des Knotens nur oberhalb kreuzt, bezeichnen wir als Strang. Wir nennen ein Knotendiagramm dreifarbig, wenn jeder seiner Stränge mit einer von drei Farben so gefärbt werden kann, dass an jeder Kreuzung die sich dort treffenden Stränge entweder die gleiche Farbe besitzen, oder drei verschiedene Farben aufweisen. Zusätzlich müssen für die Färbung des Knotens mindestens zwei der drei Farben Verwendung gefunden haben.

Satz 3.5

Die Dreifarbigkeit ist eine Knoteninvariante.

Beweis Wir müssen zeigen, dass die Dreifarbigkeit unter den Reidemeister-Bewegungen invariant ist.

Eine Ω_1 -Bewegung fügt in einen einfarbigen Strang eine zusätzliche Kreuzung ein, die ebenfalls einfarbig ist. Durch eine Ω'_1 -Bewegung können wiederum nur Kreuzungen eliminiert werden, die einfarbig sind. Damit bleibt die Dreifarbigkeit des Knotens unverändert.

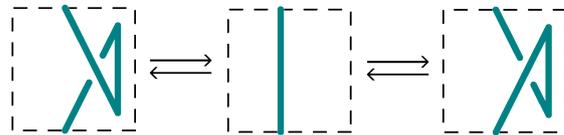


Abb. 27: Einfarbige Reidemeister-Bewegungen Ω_1 und Ω'_1

Führen wir eine Ω_2 bzw. Ω'_2 -Bewegung durch, dann gibt es zwei Möglichkeiten. Im ersten Fall betrachten wir zwei Stränge derselben Farbe. Dann müssen wir dem durch die Ω_2 -Bewegung neu entstandenen Strang dieselbe Farbe geben und die Dreifarbigkeit bleibt erhalten. Bei der dazu inversen Ω'_2 -Bewegung bleibt die Gleichfärbigkeit der beiden Stränge ebenfalls erhalten. Im zweiten Fall betrachten wir zwei unterschiedlich gefärbte Stränge. Dann müssen die durch die Ω_2 -Bewegung entstandenen Kreuzungen so markiert werden, dass dort drei Farben aufeinander treffen. Werden durch eine Ω'_2 -Bewegung zwei mehrfarbige Kreuzungen eliminiert, so müssen die daraus neu entstandenen Stränge immer mit mindestens zwei Farben eingefärbt werden. Damit bleibt die Dreifarbigkeit des Knotens unberührt.

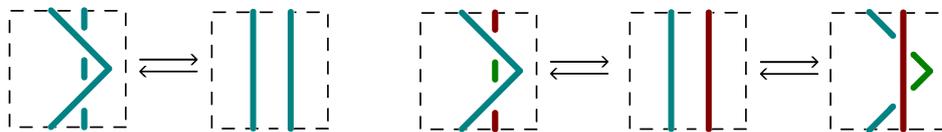


Abb. 28: Einfarbige und mehrfarbige Reidemeister-Bewegung Ω_2 und Ω'_2

Bei einer Ω_3 bzw. Ω'_3 -Bewegung gibt es drei mögliche Ausgangssituationen. Entweder sind die drei betrachteten Strecken gleichfarbig und bilden damit einfarbige Kreuzungen, oder die betrachteten Strecken bilden zwei mehrfarbige und eine einfarbige Kreuzung, oder sie bilden drei mehrfarbige Kreuzungen. Im ersten Fall wird durch eine Ω_3 bzw. Ω'_3 -Bewegung keine weitere Farbe hinzugefügt, die Dreifarbigkeit des betrachteten Knotens bleibt also

unverändert. Im zweiten und dritten Fall bleiben oder werden bei einer Ω_3 bzw. Ω'_3 -Bewegung immer mindestens zwei Kreuzungen mehrfarbig. Damit bleibt die Dreifarbigkeit eines Knotens durch Ω_3 bzw. Ω'_3 -Bewegungen unbeeinträchtigt.

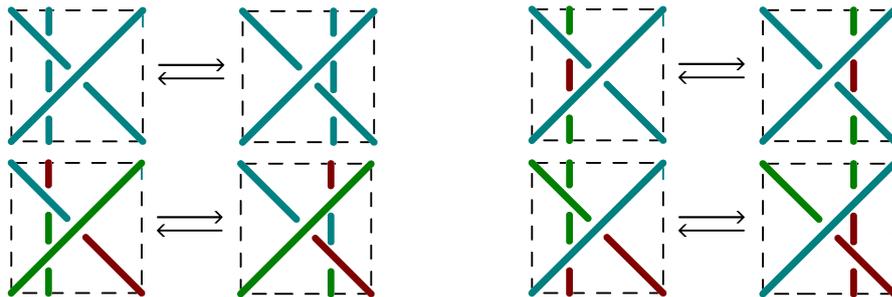


Abb. 29: Einfarbige und mehrfarbige Reidemeister-Bewegung Ω_3 und Ω'_3

Folgerung 3.6

Es ist leicht zu sehen, dass der Unknoten nicht dreifarbig ist. Damit sind alle dreifarbigen Knoten, sofern ein dreifarbiger Knoten existiert, nicht äquivalent zum Unknoten und damit nicht trivial. Außerdem kann ein beliebiger dreifarbiger Knoten zu einem beliebigen nicht dreifarbigen Knoten nicht isotop sein.

Die Dreifarbigkeit nutzen wir nun, um zu zeigen, dass neben dem Unknoten noch mindestens ein weiterer Knoten existiert.

Satz 3.7

Der Kleeblattknoten ist nicht äquivalent zum Unknoten

Beweis Wir können ein Diagramm des Kleeblattknotens nach den Regeln aus Definition 2.3.3 wie in Abb. 30 mit drei Farben einfärben.

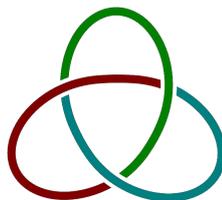


Abb. 30: Dreifarbiger Kleeblattknoten

Damit ist der Kleeblattknoten dreifarbig und es folgt die Behauptung. \square

Mit Hilfe der Dreifarbigkeit lässt sich auch beweisen, dass die Whitehead-Verschlingung im Gegensatz zur dreifarbigen trivialen Verschlingung mit zwei Komponenten nicht dreifarbig und damit nicht trivial ist.

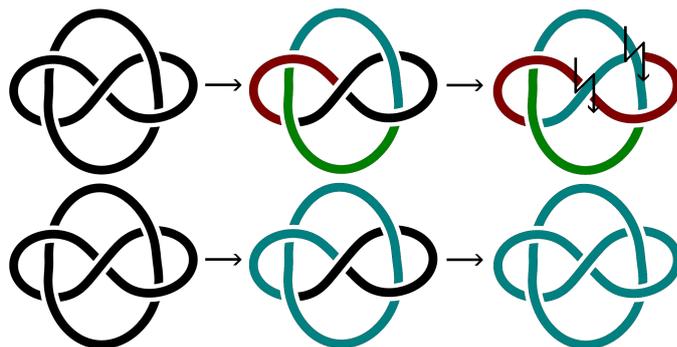


Abb. 31: Nicht dreifarbige Whitehead-Verschlingung

Allerdings kann man mit Hilfe der Dreifarbigkeit nicht beweisen, dass es mehr als zwei Knoten gibt. Insbesondere die Antwort auf die Frage, ob der nicht dreifarbige Achterknoten nicht trivial ist, bleibt zunächst offen.

2.3.4 Entknotungszahl

Eine weitere wichtige Knoteninvariante, zumindest für die weitere Knotentheorie, ist die Entknotungszahl. Der Grund hierfür wird später noch ersichtlicher. Im Folgenden werden wir zunächst überprüfen, ob die Entknotungszahl als Knoteninvariante von praktischem Nutzen ist.

Definition 3.8

Eine Knoten hat die Entknotungszahl n , wenn es ein Diagramm des Knotens gibt, das durch die Änderung von n Überkreuzungen in Unterkreuzungen zu einem Diagramm des trivialen Knotens wird und wenn es kein anderes Knotendiagramm gibt, bei dem weniger als n Änderungen zu einem Diagramm des Unknotens führen.

Satz 3.9

Eine Verschlingungsdiagramm einer beliebigen Verschlingung mit n Komponenten kann durch endlich viele Änderungen von Überkreuzungen in Unterkreuzungen in ein Diagramm der trivialen Verschlingung mit n Komponenten umgewandelt werden.

Beweis Gegeben sei ein Verschlingungsdiagramm V^n einer Verschlingung mit n Komponenten. Wir geben den Komponenten eine beliebige Orientierung. Dann führen wir auf V^n folgenden Algorithmus durch:

Wir wählen auf einer Komponente k von V^n einen beliebigen Startpunkt S_k , der keinem Doppelpunkt entspricht und bewegen uns in Richtung Orientierung. Beim Erreichen eines Doppelpunktes ergeben sich folgende Möglichkeiten:

- (a) Wir erreichen den Doppelpunkt zum ersten Mal und es handelt sich um eine Unterkreuzung. Dann ändern wir die Unterkreuzung in eine Überkreuzung.
- (b) Wir erreichen den Doppelpunkt zum ersten Mal und es handelt sich um eine Überkreuzung. Dann ändern wir nichts.
- (c) Wir erreichen den Doppelpunkt zum zweiten Mal. Dann handelt es sich um eine Unterkreuzung und wir ändern nichts.

So verfahren wir mit allen Komponenten k von V^n .

Wir müssen nun zeigen, dass durch den dargestellten Algorithmus das Verschlingungsdiagramm V^n in ein Diagramm U_n des trivialen Verschlingung umgewandelt wurde.

Es ist leicht zu erkennen, dass mit dem beschriebenen Algorithmus die Verschlingungsprojektion V^n in ein Diagramm von disjunkten Knoten umgewandelt wird, wobei die Komponenten nach Reihenfolge ihrer Bearbeitung von oben nach unten übereinander liegen. Es genügt deshalb o.B.d.A. eine beliebige Komponente U_k , $k \in 1, \dots, n$ von U^n zu betrachten und zu zeigen, dass es sich bei U_k um ein Knotendiagramm des Unknotens handelt.

Wir wählen den gleichen Startpunkt S_k auf U'_k , den wir bereits für den beschriebenen Algorithmus gewählt haben und bewegen uns entlang der Orientierung so lange wir Überkreuzungen Ueb_1, \dots, Ueb_N der Doppelpunkte D_1, \dots, D_N durchlaufen. Mit Ueb_N bezeichnen wir die letzte Überkreuzung die wir durchlaufen, bevor wir die erste Unterkreuzung Un_X passieren. Beim Passieren von Un_X ergeben sich folgende Möglichkeiten:

- (a) ($X=N$) Bei dem Doppelpunkt D_X handelt es sich um den Doppelpunkt D_N , dessen Überführung Ueb_N die letzte Überführung war, die wir passiert haben. Dann lässt sich die Kreuzung durch eine Ω_1 -Bewegung eliminieren.

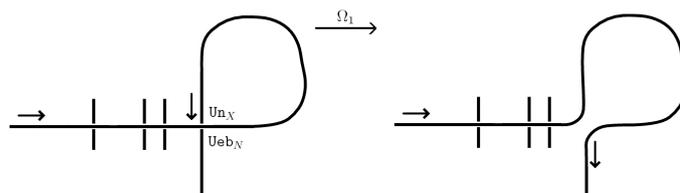


Abb. 32: Eliminierung der Kreuzung D_X im Fall $X = N$

(b) ($X \neq N$) Wir erreichen einen Doppelpunkt D_X , den wir nicht als letztes passiert haben. Da es sich um eine Unterkreuzung handelt, haben wir den Doppelpunkt bereits einmal passiert. Somit hat X einen festen Wert aus der Menge $\{1, \dots, N - 1\}$. Wir können über die Unterkreuzungen Un_i , $i \in \{X + 1, \dots, N\}$ der Doppelpunkte D_{X+1}, \dots, D_N , die zwischen dem ersten und zweiten Durchlaufen des Doppelpunktes D_X passiert wurden, folgende Aussagen treffen:

- (i) Das bisher durchlaufene Teilstück $Ueb_X Un_X$ von U'_k kann nur von den Unterkreuzungen Un_i unterkreuzt werden, und zwar nur in den Doppelpunkten D_{X+1}, \dots, D_N .
- (ii) Die Unterkreuzungen Un_i können das bisher durchlaufene Teilstück $Ueb_X Un_X$ von U'_k nicht überkreuzen, da die gerade erreichte Unterkreuzung Un_X die erste Unterkreuzung im bisher durchlaufenen Teilstück von U'_k ist.

Daraus folgt, dass die Anzahl der Un_i , $i \in \{X + 1, \dots, N\}$ auf dem Teilstück $Ueb_X Un_X$ von U'_k gerade ist und jeweils zwei der Unterkreuzungen Un_i durch eine Teilstück von U'_k , das innerhalb des von $Ueb_X Un_X$ umschlossenen Gebietes liegt miteinander verbunden sind. Nun können im Teilstück $Ueb_X Un_X$ von U'_k die Doppelpunkte D_{X+1}, \dots, D_N eliminiert werden, indem $Ueb_X Un_X$ mit Ω_2 - und Ω_3 -Bewegungen und deren Inversen über die Teilstücke der Projektion, die in dem von $Ueb_X Un_X$ umschlossenen Gebiet liegen, hinweg geschoben und anschließend der Doppelpunkt D_X durch eine Ω_1 -Bewegung eliminiert wird.

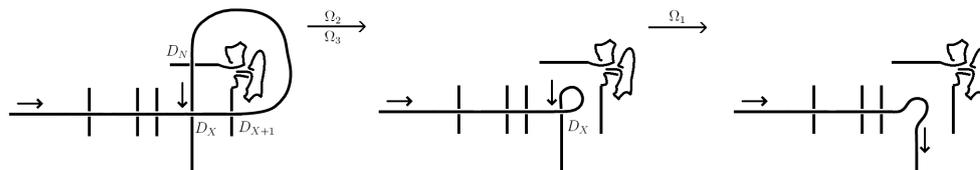


Abb. 33: Eliminierung der Kreuzung D_X im Fall $X \neq N$

Auf diese Weise können wir jeden Doppelpunkt spätestens beim zweiten Durchlauf unter Anwendung von Reidemeister-Bewegungen eliminieren und erhalten ein kreuzungsfreies Diagramm des Unknotens. Es folgt die Behauptung. □

Folgerung 3.10

Jeder Knoten hat eine endliche Entknotungszahl.

Aufgrund von Satz 3.9 können wir eine Aussage über die Komplexität eines Knotens treffen.

Definition 3.11 (Komplexität, vgl. z.B. [HKW86], S. 279)

Gegeben sei das Verschlingungsdiagramm einer Verschlingung V . Sei N die Anzahl der Kreuzungen. Sei S die minimale Anzahl der Kreuzungen, die geändert werden müssen, um die triviale Verschlingung zu erhalten. Satz 3.9 beweist, dass diese Zahl endlich ist. Wir definieren die Komplexität eines Verschlingungsdiagramms als das Paar (N, S) .

Die Bestimmung der Entknotungszahl ist nicht einfach. So lässt sich zum Beispiel für den Knoten in Abb. 34 zeigen, dass er durch zwei Abänderungen zum Unknoten wird.

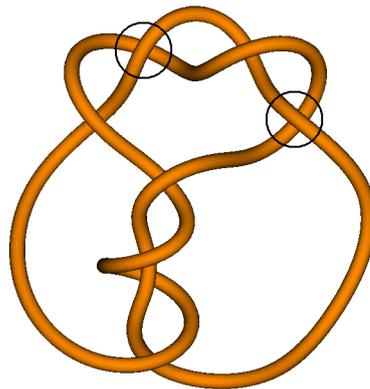


Abb. 34: Knoten mit Entknotungszahl 2

Dies beweist aber nicht, dass der Knoten die Entknotungszahl 2 besitzt, sondern schließt lediglich aus, dass der Knoten keine Entknotungszahl hat, die größer als 2 ist. Der Beweis, dass es keine Projektion für diesen Knoten gibt, die durch eine einzige Änderung einer Kreuzung zum Unknoten wird, ist schwierig.

Die Vermutung, dass die Entknotungszahl eines Knotens in einer Projektion des Knotens zu finden ist, die eine minimale Anzahl an Doppelpunkten besitzt, liegt nahe. Auch dies ist nicht immer der Fall (vgl. [Ada95], S. 73f.).

Der Aufwand zur Bestimmung der Entknotungszahl steht also in keinem Verhältnis zu ihrem Nutzen als Knoteninvariante, da höchstwahrscheinlich viele nicht äquivalente Knoten mit identischer Entknotungszahl existieren. Es gibt noch weitere Knoteninvarianten, wie z.B. die Brückenzahl oder die Selbstschnittzahl (vgl. [Ada95], Abschnitt 3.2 und 3.3), die ähnlich schwer zu bestimmen und von ähnlichem Nutzen sind. Diese werden aus den bereits genannten Gründen hier nicht weiter behandelt.

2.3.5 Knotenpolynome

Wir wenden uns nun den eigentlich bedeutendsten und aufschlussreichsten Knoteninvarianten zu, den Knotenpolynomen. Dabei wird jedem Knoten ein Polynom zugeordnet, das sich aus den Knotenprojektionen errechnet, wobei sich aus je zwei Knotendiagrammen äquivalenter Knoten dasselbe Polynom errechnen lässt. Die Knotenpolynome sind also wieder invariant unter den Reidemeister-Bewegungen.

Das erste Knotenpolynom wurde 1928 von J.W. Alexander entdeckt und trägt seitdem seinen Namen. Im Jahr 1969 gelang es John Conway, das Alexander-Polynom mit Hilfe einer „skein-relation“ darzustellen, die in dieser Arbeit als Entwirrungs-Relation bezeichnet wird. Es handelt sich dabei um eine Gleichung, die die Polynome von Knotenprojektionen, die sich jeweils nur in einer Kreuzung unterscheiden, zueinander in Beziehung setzt. Mit Hilfe von Entwirrungs-Relationen lassen sich auch weitere Knotenpolynome, wie das 1984 von Vaughan Jones entdeckte Jones-Polynom und das darauf folgende, auch Jones-Polynom in zwei Variablen genannte, HOMFLY-Polynom, berechnen. Diese Polynome werden als Entwirrungsinvarianten bezeichnet (vgl. [Ada95], S. 155f.).

Um eine Vorstellung von Knotenpolynomen zu bekommen, werden wir zunächst das Jones-Polynom mit Hilfe des von Louis Kauffman entwickelten Kauffman-Klammer-Polynoms herleiten. Danach werden wir die Entwirrungs-Relation und damit die Entwirrungsinvariante sowie die universelle Entwirrungsinvariante definieren. Schließlich werden wir die Existenz einer universellen Entwirrungsinvariante, dem HOMFLY-Polynom beweisen, indem wir zunächst die Zopfgruppen definieren und ihren Zusammenhang mit Knoten und Verschlingungen aufzeigen. Anschließend werden wir unter Verwendung von Hecke-Algebren das HOMFLY-Polynom aus Zöpfen konstruieren.

2.4 Jones-Polynom als Kauffman-Klammer-Polynom

Das Jones-Polynom ist auf orientierte Verschlingungsdiagramme definiert. Allerdings verändert es sich für Knoten nicht, wenn man die Orientierung umkehrt. Im Folgenden werden wir das Jones-Polynom nach dem Ansatz von Kauffman herleiten.

Für das Kauffman-Klammer-Polynom beginnen wir zunächst mit einem unorientierten Verschlingungsdiagramm V . Dann können wir die Kreuzungen wie in Abb. 35 markieren.



Abb. 35: Markierung A und B von Kreuzungen

Markierung A kennzeichnet das Gebiet, dass der überkreuzende Zweig durchläuft, wenn er entgegen dem Uhrzeigersinn mit dem unterkreuzenden Zweig zur Deckung gebracht wird, wobei ein Winkel überstrichen wird, der kleiner als 180° ist. Markierung B kennzeichnet das entsprechende Gebiet, dass durchlaufen wird, wenn der überkreuzende Zweig im Uhrzeigersinn mit dem unterkreuzenden Zweig zur Deckung gebracht wird. Die Kreuzungen werden entsprechend dieser Markierungen wie in Abb. 36 aufgelöst.



Abb. 36: Nach Markierung A und B aufgelöste Kreuzungen

Definition 4.1

Eine Wahl von Markierungen für jede Kreuzung nennen wir einen Zustand Z für V . Sei $a(Z)$ die Anzahl der Markierungen vom Typ A und $b(Z)$ die Anzahl der Markierungen vom Typ B. Wenn wir alle Kreuzungen entsprechend der Markierungen A und B auflösen, erhalten wir eine bestimmte Anzahl von Komponenten, die wir $|Z|$ nennen. Mit M_Z bezeichnen wir die Menge aller möglichen Zustände Z für V .

Definition 4.2 (Klammerpolynom)

Wir definieren ein Polynom $\langle V \rangle$ mit den Variablen A , B und C und ganzzahligen Koeffizienten durch

$$\langle V \rangle = \sum_{Z \in M_Z} A^{a(Z)} B^{b(Z)} C^{|Z|-1}$$

Wenn V keine Kreuzungen besitzt und n Komponenten hat, dann sei

$$\langle V \rangle = C^{n-1}.$$

Satz 4.3 (Eigenschaften des Klammerpolynoms, vgl. z.B. [Lüc97], S. 9)

1.) Sei O das Diagramm des Unknotens. Dann gilt

$$\langle O \rangle = 1;$$

2.) Sei $O \sqcup V$ die Vereinigung von V mit einem mit V nicht verschlungenen Unknoten. Dann gilt

$$\langle O \sqcup V \rangle = C \langle V \rangle, \text{ falls } V \neq \emptyset;$$

3.) Sei V ein nicht orientiertes Verschlingungsdiagramm und D ein beliebiger Doppelpunkt. Sei V_A bzw. V_B das Verschlingungsdiagramm, das man aus V durch Auflösung von D entsprechend Markierung A bzw. B erhält. Dann gilt

$$\langle V \rangle = A \langle V_A \rangle + B \langle V_B \rangle .$$

Beweis Aus der Definition von $\langle V \rangle$ ergibt sich

zu 1.)

$$\langle O \rangle = C^{1-1} = 1$$

zu 2.) Wenn wir V einen mit V nicht verschlungenen Unknoten hinzufügen, dann wirkt sich das auf die Zustände so aus, dass jeder Zustand genau eine Komponente mehr besitzt. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle O \sqcup V \rangle &= \sum_{Z \in M_Z} A^{a(Z)} B^{b(Z)} C^{(|Z|-1)+1} \\ &= C \sum_{Z \in M_Z} A^{a(Z)} B^{b(Z)} C^{|Z|-1} = C \langle V \rangle . \end{aligned}$$

zu 3.) Wir betrachten den Doppelpunkt D . Sei M_A bzw. M_B die Menge aller Zustände für die in D die Markierung A bzw. B gewählt wird. Dabei gilt $M_Z = M_A \cup M_B$. Sei M_{Z_A} bzw. M_{Z_B} die Menge aller Zustände der Verschlingungsdiagramme V_A bzw. V_B . Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \sum_{Z \in M_Z} A^{a(Z)} B^{b(Z)} C^{|Z|-1} \\ &= \sum_{Z \in M_A} A^{a(Z)} B^{b(Z)} C^{|Z|-1} + \sum_{Z \in M_B} A^{a(Z)} B^{b(Z)} C^{|Z|-1} \\ &\stackrel{\text{Auflösung von } D}{=} A \sum_{Z \in M_{Z_A}} A^{a(Z)} B^{b(Z)} C^{|Z|-1} + B \sum_{Z \in M_{Z_B}} A^{a(Z)} B^{b(Z)-1} C^{|Z|-1} \\ &= A \langle V_A \rangle + B \langle V_B \rangle . \end{aligned}$$

Satz 4.4 (vgl. z.B. [Lüc97], S. 9)

Seien $B = A^{-1}$ und $C = -A^2 - A^{-2}$. Dann ist das Polynom $\langle V \rangle$ invariant unter den Reidemeister-Bewegungen Ω_2 und Ω_3 .

Beweis Es genügt o.B.d.A zu überprüfen, ob unter den gegebenen Bedingungen die Auflösung jeweils einer Kreuzung unter den Ω_1 - und Ω_2 -Bewegungen invariant ist. Deshalb können die folgenden Beweise mit einer so genannten "Diagrammrechnung" geführt werden, indem die Gleichung 4.3.3 wie folgt abgekürzt wird:

$$\langle X \rangle = A \langle \times \rangle + B \langle \overset{\times}{\times} \rangle. \quad \square$$

Es ergibt sich für Ω_2

$$\begin{aligned} \langle \overset{\times}{\times} \rangle &= A \langle X \rangle + B \langle \overset{\times}{\times} \rangle \\ &= A(A \langle X \rangle + B \langle \times \rangle) + B(A \langle \overset{\times}{\times} \rangle + B \langle \overset{\times}{\times} \rangle) \\ &= (ABC + A^2 + B^2) \langle X \rangle + AB \langle \times \rangle \\ &= (AA^{-1}(-A^2 - A^{-2}) + A^2 + A^{-2}) \langle X \rangle + AA^{-1} \langle \times \rangle \\ &= \langle \times \rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle \times \rangle &= A \langle \overset{\times}{\times} \rangle + B \langle X \rangle \\ &= A(A \langle \overset{\times}{\times} \rangle + B \langle \times \rangle) + B(A \langle \times \rangle + B \langle \overset{\times}{\times} \rangle) \\ &= (ABC + A^2 + B^2) \langle \overset{\times}{\times} \rangle + AB \langle \times \rangle \\ &= \langle \overset{\times}{\times} \rangle. \end{aligned}$$

Unter Verwendung dieses Ergebnisses ergibt sich für Ω_3

$$\langle \overset{\times}{\times} \rangle = A \langle \overset{\times}{\times} \rangle + B \langle \overset{\times}{\times} \rangle \stackrel{\Omega_2}{=} A \langle \overset{\times}{\times} \rangle + B \langle \overset{\times}{\times} \rangle = \langle \overset{\times}{\times} \rangle.$$

Bemerkung 4.5

Wir schreiben

$$\langle V \rangle = \sum_Z A^{a(Z)} A^{-b(Z)} (-A^2 - A^{-2})^{|Z|-1}.$$

Betrachten wir nun das Klammerpolynom $\langle V \rangle$ unter der Reidemeister-Bewegung Ω_1 , dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \overset{\times}{\times} \rangle &= A \langle \overset{\times}{\times} \rangle + A^{-1} \langle \checkmark \rangle = A(-A^2 - A^{-2}) \langle \checkmark \rangle + A^{-1} \langle \checkmark \rangle \\ &= -A^3 \langle \checkmark \rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle \text{X} \rangle &= A \langle \text{V} \rangle + A^{-1} \langle \text{O} \rangle = A \langle \text{V} \rangle + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) \langle \text{V} \rangle \\ &= -A^{-3} \langle \text{V} \rangle. \end{aligned}$$

Damit ist das Polynom $\langle V \rangle$ nicht invariant unter der Reidemeister-Bewegung Ω_1 . Um die Invarianz unter Ω_1 zu erhalten, müssen wir die Gleichung mit Hilfe einer Verdrillungszahl korrigieren.

Definition 4.6 (Verdrillungszahl)

Gegeben sei eine Kreuzung in einem orientierten Verschlingungsdiagramm V . Wenn der überkreuzende Zweig mit dem unterkreuzenden Zweig zur Deckung gebracht wird, indem er entgegen dem Uhrzeigersinn um einen Winkel kleiner als 180° gedreht wird, dann wird diese Kreuzung positiv genannt, falls die beiden Orientierungen der sich deckenden Zweige in dieselbe Richtung zeigen. Ansonsten wird sie negativ genannt.



Abb. 37: Positive und negative Kreuzungen

Wir definieren die Verdrillungszahl $w(V)$ als die Anzahl der positiven Kreuzungen minus die Anzahl der negativen Kreuzungen.

Definition 4.7

[Jones-Polynom¹] Das Jones-Polynom einer orientierten Verschlingung L ist gegeben als das Polynom

$$X_L(A) = (-A)^{-3w(V)} \langle V \rangle$$

wobei V ein beliebiges orientiertes Verschlingungsdiagramm ist, dass die Verschlingung L beschreibt.

¹Bei dem hier definierten Polynom handelt es sich genau genommen nicht um das Polynom, das Vaughan Jones 1984 veröffentlicht hat. Das ursprüngliche Jones-Polynom erhalten wir dadurch, dass wir die Variable A an jeder Stelle ihres Auftretens durch $t^{\frac{1}{4}}$ ersetzen. Es handelt sich dabei lediglich um eine Veränderung der Notation, die dazu führt, dass nicht mehr notwendigerweise ganzzahlige Exponenten auftauchen.

Satz 4.8

Das Polynom $X_L(A)$ ist invariant unter den drei Reidemeister-Bewegungen, unabhängig von der Wahl des orientierten Verschlingungsdiagramms V .

Beweis Durch eine Ω_2 -Bewegung erhöht bzw. verringert sich sowohl die Anzahl der negativen als auch die Anzahl der positiven Kreuzungen um den Wert 1, die Verdrillungszahl $w(L)$ verändert sich also nicht. Bei einer Ω_3 -Bewegung ändert sich die Anzahl der positiven und negativen Kreuzungen nicht und damit bleibt auch $w(L)$ gleich.

Damit und mit Satz 4.4 ist $X_L(A)$ invariant unter diesen beiden Reidemeister-Bewegungen. Es bleibt zu untersuchen, ob $X_L(A)$ unter Ω_1 invariant ist.

Unabhängig von der Orientierung gilt

$$w(\text{↯}) = w(\text{↷}) + 1$$

und

$$w(\text{↸}) = w(\text{↶}) - 1.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} (-A)^{-3w(\text{↯})} \langle \text{↯} \rangle &= -A^3 (-A)^{-3w(\text{↯})} = -A^3 (-A)^{-3(w(\text{↷})+1)} \langle \text{↷} \rangle \\ &= -A^3 (-A)^{-3w(\text{↷})} (-A)^{-3} \langle \text{↷} \rangle = (-A)^{-3w(\text{↷})} \langle \text{↷} \rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (-A)^{-3w(\text{↸})} \langle \text{↸} \rangle &= -A^{-3} (-A)^{-3w(\text{↸})} = -A^{-3} (-A)^{-3(w(\text{↶})-1)} \langle \text{↶} \rangle \\ &= -A^{-3} (-A)^{-3w(\text{↶})} (-A)^3 \langle \text{↶} \rangle = (-A)^{-3w(\text{↶})} \langle \text{↶} \rangle. \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass das Jones-Polynom eine Invariante der Äquivalenzklasse einer orientierten Verschlingung ist. \square

Aus Beispiel 4.9 ist ersichtlich, dass wir mit Hilfe des Jones-Polynoms den rechtshändigen vom linkshändigen Kleeblattknoten (Abb. 9) unterscheiden können. Damit sind diese beiden Knoten nicht äquivalent.

Beispiel 4.9

Sei T der rechtshändige Kleeblattknoten. Dann gilt nach Abb. 38

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= A^3 C + 3A^2 B + 3AB^2 C + B^3 C^2 \\ &= A^3 (-A^2 - A^{-2}) + 3A^2 A^{-1} + 3AA^{-2} (-A^2 - A^{-2}) + A^{-3} (-A^2 - A^{-2})^2 \\ &= -A^5 - A + 3A - 3A - 3A^{-3} + A + 2A^{-3} + A^{-7} \\ &= -A^5 - A^{-3} + A^{-7}. \end{aligned}$$

Da $w(T) = 3$ gilt, ist

$$X_T(A) = (-A)^{-3 \cdot 3}(-A^5 - A^{-3} + A^{-7}) = A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}.$$

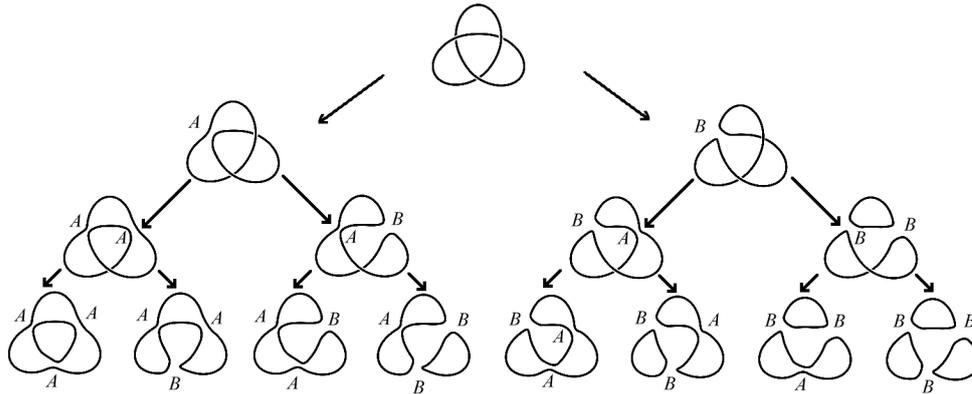


Abb. 38: Zustände des rechtshändigen Kleeblattknotens

Sei T^\times der linkshändige Kleeblattknoten. Da T^\times das Spiegelbild von T ist, müssen für die Berechnung von $\langle T^\times \rangle$ lediglich A und B vertauscht werden.

$$\begin{aligned} \langle T^\times \rangle &= B^3C + 3B^2A + 3BA^2C + A^3C^2 \\ &= A^{-3}(-A^2 - A^{-2}) + 3A^{-2}A + 3A^{-1}A^2(-A^2 - A^{-2}) + A^3(-A^2 - A^{-2})^2 \\ &= -A^{-1} - A^{-5} + 3A^{-1} - 3A^3 - 3A^{-1} + A^7 + 2A^3 + A^{-1} \\ &= -A^{-5} - A^3 + A^7. \end{aligned}$$

Da $w(T^\times) = -3$ folgt

$$X_{T^\times}(A) = (-A)^9(-A^{-5} - A^3 + A^7) = A^4 + A^{12} - A^{16}.$$

Das Jones-Polynom ermöglicht uns auch, den Achterknoten vom Unknoten zu unterscheiden. Da der Achterknoten vier Kreuzungen hat, müssen wir dazu allerdings

$$2 + 2^2 + 2^{2^2} + 2^{2^{2^2}} = 30$$

Schritte durchführen, um 16 Zustände zu betrachten. Der Aufwand wird also mit jeder zusätzlichen Kreuzung mehr als verdoppelt. Neben dem Zugang von Kauffman gibt es noch andere Möglichkeiten, das Jones-Polynom zu berechnen, da es eine sogenannte Entwirrungs-Relation besitzt. Knotenpolynome, die einer Entwirrungs-Relation genügen, lassen sich wesentlich leichter berechnen. Diese Knotenpolynome werden Entwirrungsinvarianten genannt.

2.5 Entwirrungsinvarianten

Im diesem Kapitel werden wir zunächst die Entwirrungsinvariante definieren und anschließend zeigen, dass das Jones-Polynom eine Entwirrungsinvariante ist. Insbesondere werden wir jedoch die universelle Entwirrungsinvariante definieren und eine mögliche universelle Entwirrungsinvariante in zwei Variablen vorstellen.

2.5.1 Entwirrungsinvarianten

Definition 5.1 (Entwirrungs-Tripel und Entwirrungs-Relation)

Seien V_+ , V_- und V_0 orientierte Knoten, für die Verschlingungsdiagramme existieren, die bis auf eine kleine Umgebung U identisch sind. In U unterscheiden sie sich wie in Abb. 39 gezeigt.

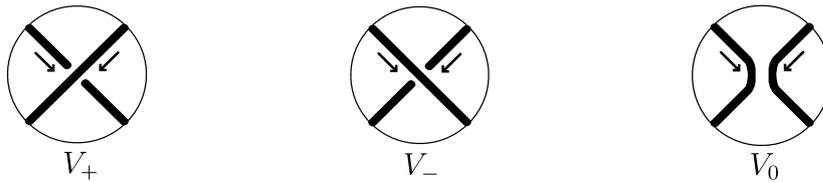


Abb. 39: Umgebungen U in V_+ , V_- und V_0

Wir nennen (V_+, V_-, V_0) ein Entwirrungs-Tripel und sagen, V_+ , V_- und V_0 stehen zueinander in Entwirrungs-Relation, falls (V_+, V_-, V_0) ein Entwirrungs-Tripel ist.

Definition 5.2 (Entwirrungsinvariante)

Sei W die Menge aller Äquivalenzklassen von orientierten Verschlingungen. Eine Entwirrungsinvariante ist eine Abbildung

$$\gamma: W \longrightarrow R$$

in einen kommutativen, assoziativen Ring R mit Eins mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Es gibt Einheiten a_+ , a_- , $a_0 \in R^*$, so dass für jedes Entwirrungs-Tripel (V_+, V_-, V_0) folgende Relation gilt:

$$a_+ \cdot \gamma(V_+) + a_- \cdot \gamma(V_-) + a_0 \cdot \gamma(V_0) = 0;$$

- (b) Die Abbildung γ ordnet dem trivialen Knoten den Wert 1 zu.

Die Entwirrungs-Relation ermöglicht konkrete Berechnungen. Wir bezeichnen mit O^r die triviale Verschlingung mit r Komponenten, mit H die Hopf-Verschlingung auf der die Orientierung so gewählt ist, dass sie die Verschlingungszahl $+1$ hat und mit T das rechtshändige Kleeblatt egal welcher Orientierung. Die Berechnungen der Entwirrungsinvarianten für O^r und H ändern sich nicht, wenn man auf allen Komponenten die Orientierung gleichzeitig umkehrt.

Hilfssatz 5.3

Sei γ eine Entwirrungsinvariante. Dann gilt:

$$(a) \quad \gamma(O^2) = -a_+ a_0^{-1} - a_- a_0^{-1};$$

$$(b) \quad \gamma(H) = a_- a_0^{-1} + a_+^{-1} a_-^2 a_0^{-1} - a_+^{-1} a_0;$$

$$(c) \quad \gamma(T) = -2a_+^{-1} a_- - a_+^{-2} a_-^2 + a_+^{-2} a_0^2;$$

$$(d) \quad \gamma(O^r) = (-a_+ a_0^{-1} - a_- a_0^{-1})^{r-1}.$$

Beweis Die Entwirrungsinvarianten ergeben sich aus den Entwirrungs-Tripeln in Abb. 40 bis 42.

zu (a)

$$\gamma(O^2) = \gamma(V_0) = (-a_+ \cdot \gamma(V_+) - a_- \cdot \gamma(V_-)) a_0^{-1} = -a_+ a_0^{-1} - a_- a_0^{-1}$$



Abb. 40: Entwirrungs-Tripel mit zweikomponentiger trivialer Verschlingung

zu (b)

$$\begin{aligned}
 \gamma(H) &= \gamma(V_+) = (-a_- \cdot \gamma(V_-)) - a_0 \cdot \gamma(V_0)a_+^{-1} \\
 &= -a_-(-a_+a_0^{-1} - a_-a_0^{-1})a_+^{-1} - a_0a_+^{-1} \\
 &= a_-a_0^{-1} + a_+^{-1}a_-^2a_0^{-1} - a_+^{-1}a_0
 \end{aligned}$$

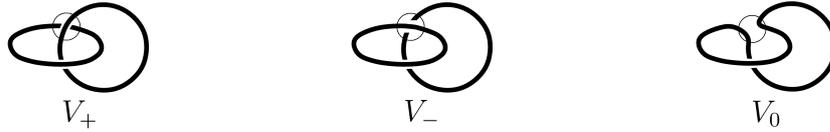


Abb. 41: Entwirrungs-Tripel mit Hopf-Verschlingung

zu (c)

$$\begin{aligned}
 \gamma(T) &= \gamma(V_+) = (-a_- \cdot \gamma(V_-)) - a_0 \cdot \gamma(V_0)a_+^{-1} \\
 &= -a_-a_+^{-1} - a_0(a_-a_0^{-1} + a_+^{-1}a_-^2a_0^{-1} - a_+^{-1}a_0)a_+^{-1} \\
 &= -2a_+^{-1}a_- - a_+^{-2}a_-^2 + a_+^{-2}a_0^2
 \end{aligned}$$

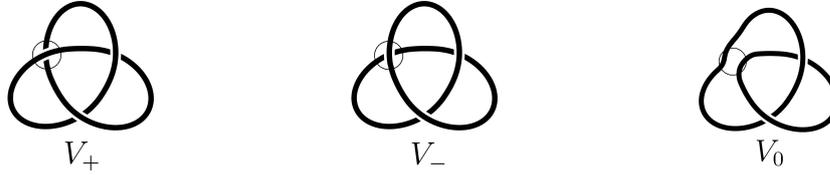


Abb. 42: Entwirrungs-Tripel mit rechtshändigem Kleeblattknoten

zu (d) Die Invariante $\gamma(O^r)$ ergibt sich per Induktion über r .

Da die Behauptung für den Induktionsanfang

$$\gamma(O) = (-a_+a_0^{-1} - a_-a_0^{-1})^{1-1} = 1 \text{ und } \gamma(O^2) = -a_+a_0^{-1} - a_-a_0^{-1}$$

gilt, nehmen wir als Induktionsvoraussetzung an, dass

$$\gamma(O^r) = (-a_+a_0^{-1} - a_-a_0^{-1})^{r-1}.$$

Dann folgt per Induktion über r

$$\begin{aligned}
 \gamma(O^{r+1}) &= -a_+a_0^{-1}\gamma(O^r) - a_-a_0^{-1}\gamma(O^r) \\
 &= \gamma(O^r)(-a_+a_0^{-1} - a_-a_0^{-1}) \\
 &= (-a_+a_0^{-1} - a_-a_0^{-1})^{r-1}(-a_+a_0^{-1} - a_-a_0^{-1}) \\
 &= (-a_+a_0^{-1} - a_-a_0^{-1})^r.
 \end{aligned}$$

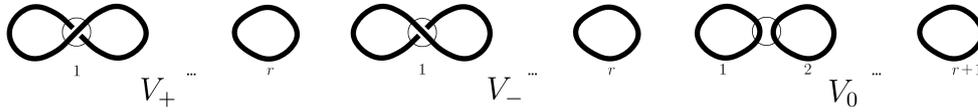


Abb. 43: Entwirrungs-Tripel mit trivialer Verschlingung mit $r+1$ Komponenten

□

Satz 5.4 (vgl. z.B. [Lüc97], S. 32f.)

Sei W die Menge aller Äquivalenzklassen von orientierten Verschlingung. Sei

$$\gamma: W \longrightarrow R$$

eine Entwirrungsinvariante. Dann gilt:

(a) Die Entwirrungsinvariante γ ist durch die Entwirrungs-Koeffizienten a_+ , a_- und a_0 vollständig bestimmt;

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Für γ gibt es Entwirrungs-Koeffizienten a_+, a_-, a_0 , die der Gleichung $a_+ + a_- + a_0 = 0$ genügen;

(ii) $\gamma(O^2) = 1$;

(iii) $\gamma(V) = 1$ für alle orientierten Verschlingungen V ;

(c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Für γ gibt es Entwirrungs-Koeffizienten a_+, a_-, a_0 , die der Gleichung $a_+ + a_- - a_0 = 0$ genügen;

(ii) $\gamma(O^2) = -1$;

(iii) $\gamma(V) = (-1)^{r(V)+1}$ für alle orientierten Verschlingungen V , wobei $r(V)$ die Anzahl der Komponenten von V ist;

(d) Die Entwirrungs-Koeffizienten von γ erfüllen folgende Gleichungen.

(i) $a_+ \cdot (\gamma(H) - \gamma(O^2)) = a_0 \cdot (\gamma(O^2)^2 - 1)$;

(ii) $a_- = -a_+ - a_0 \cdot \gamma(O^2)$;

(e) Sei R nullteilerfrei. Dann ist γ durch die Werte $\gamma(O^2)$ und $\gamma(H)$ bestimmt. Die Werte legen außerdem die Entwirrungs-Koeffizienten bis auf gemeinsame Multiplikation mit einer Einheit eindeutig fest, vorausgesetzt $\gamma(O^2) \neq \pm 1$.

Beweis

zu (a) Wir betrachten ein Entwirrungs-Tripel (V_+, V_-, V_0) . Aus dem Diagramm von V_+ erhalten wir ein Diagramm von V_- , indem wir eine Unterkreuzung in eine Überkreuzung ändern. Eliminieren wir die Kreuzung vollständig, erhalten wir ein Diagramm von V_0 , das somit eine Kreuzung weniger besitzt.

Wir können die Komplexität (vgl. Definition 3.11) der Verschlingungsdiagramme von V_+ , V_- und V_0 und analog dazu die Komplexität von V_+ , V_- und V_0 wie folgt ordnen:

$$(N, S)_{V_i} < (N', S')_{V_j}, \text{ wenn } N < N' \text{ oder } N = N' \wedge S < S',$$

wobei $V_i, V_j \in \{V_+, V_-, V_0\}$.

Wir sehen, dass wir für jedes gegebene V ein Entwirrungs-Tripel finden können, das V enthält und dessen andere Verschlingungen kleinere Komplexität haben. Der Beweis der Behauptung erfolgt nun per Induktion über die Komplexität.

Sei $V = V_+$ o.B.d.A die Verschlingung mit der höchsten Komplexität in einem Entwirrungs-Tripel (V_+, V_-, V_0) . Da die Behauptung nach Hilfssatz 5.3.(d) für die Verschlingungen O^r , die die niedrigste Komplexität besitzen, gilt, nehmen wir als Induktionsvoraussetzung an, dass $\gamma(V_0)$ und $\gamma(V_-)$ durch die Entwirrungs-Koeffizienten a_+, a_- und a_0 vollständig bestimmt sind. Dann folgt per Induktion

$$\gamma(V) = -a_+^{-1}a_- \gamma(V_-) - a_+^{-1}a_0 \gamma(V_0)$$

und $\gamma(V)$ ist ebenfalls durch die Entwirrungs-Koeffizienten a_+, a_- und a_0 vollständig bestimmt sind.

zu (b) (iii) \Rightarrow (i)

Sei $\gamma(V) = 1$ für alle orientierten Verschlingungen V . Es gilt

$$a_+ \cdot \gamma(V_+) + a_- \cdot \gamma(V_-) + a_0 \cdot \gamma(V_0) = a_+ \cdot 1 + a_- \cdot 1 + a_0 \cdot 1.$$

Mit Definition 5.2 folgt $a_+ + a_- + a_0 = 0$.

(i) \Rightarrow (ii)

Seien a_+, a_-, a_0 Entwirrungs-Koeffizienten für γ , die der Gleichung $-a_+ = a_- + a_0$ genügen. Dann folgt mit Hilfssatz 5.3.(a)

$$\begin{aligned} \gamma(O^2) &= -a_+ a_0^{-1} - a_- a_0^{-1} \\ &= (a_- + a_0) a_0^{-1} - a_- a_0^{-1} \\ &= a_- a_0^{-1} + a_0 a_0^{-1} - a_- a_0^{-1} = 1. \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iii)

Sei $\gamma(O^2) = 1$. Mit $\gamma(O^2) = -a_+a_0^{-1} - a_-a_0^{-1}$ folgt $a_+ + a_- + a_0 = 0$ und damit (i). Da die Entwirrungsinvariante $\gamma(V)$ durch zwei Entwirrungsinvarianten von Verschlingungen niedrigerer Komplexität bestimmt wird, setzen wir (i) voraus und beweisen (iii) per Induktion über die Komplexität. Sei $V = V_+$ o.B.d.A die Verschlingung mit der höchsten Komplexität im Entwirrungs-Tripel (V_+, V_-, V_0) .

Da die Behauptung für den Induktionsanfang

$$\gamma(O^r) = (-a_+a_0^{-1} - a_-a_0^{-1})^{r-1} = (\gamma(O^2))^{r-1} = 1^{r-1} = 1$$

gilt, nehmen wir als Induktionsvoraussetzung an, dass

$$\gamma(V_-) = \gamma(V_0) = 1$$

gilt und es folgt per Induktion über die Komplexität

$$\begin{aligned} \gamma(V) &= -a_-a_+^{-1}\gamma(V_-) - a_0a_+^{-1}\gamma(V_0) = -a_-a_+^{-1} - a_0a_+^{-1} \\ &= (a_0 + a_+)a_+^{-1} - a_0a_+^{-1} = 1. \end{aligned}$$

zu (c) (iii) \Rightarrow (i)

Die Abänderung einer Kreuzung ändert die Anzahl der Komponenten nicht. Beim Auflösen einer Kreuzung gibt es zwei Möglichkeiten:

Fall 1: Es kreuzen sich zwei Komponenten. Dann verbinden sich diese durch die Auflösung der Kreuzung.

Fall 2: Es handelt sich um eine Kreuzung innerhalb einer Komponente. Dann teilt die Auflösung der Kreuzung die Komponente in zwei Komponenten.

Somit gilt $r(V_+) = r(V_-) = r(V_0) \pm 1$.

Sei $\gamma(V) = (-1)^{r(V)+1}$ für alle orientierten Verschlingungen V . Dann folgt mit Definition 5.2

$$\begin{aligned} &a_+ \cdot \gamma(V_+) + a_- \cdot \gamma(V_-) + a_0 \cdot \gamma(V_0) \\ &= a_+ \cdot (-1)^{r(V_+)+1} + a_- \cdot (-1)^{r(V_-)+1} + a_0 \cdot (-1)^{r(V_0)+1} \\ &= a_+ \cdot (-1)^{r(V_+)+1} + a_- \cdot (-1)^{r(V_+)+1} + a_0 \cdot (-1)^{r(V_+)+1\pm 1}. \end{aligned}$$

Fall 1: $r(V_+)$ ist gerade

$$\begin{aligned} 0 &= a_+ \cdot (-1)^{r(V_+)+1} + a_- \cdot (-1)^{r(V_+)+1} - a_0 \cdot (-1)^{r(V_+)+1\pm 1} \\ &= -a_+ - a_- + a_0 = -(a_+ + a_- - a_0) \end{aligned}$$

Fall 2: $r(V_+)$ ist ungerade

$$\begin{aligned} 0 &= a_+ \cdot (-1)^{r(V_+)+1} + a_- \cdot (-1)^{r(V_+)+1} - a_0 \cdot (-1)^{r(V_+)+1\pm 1} \\ &= a_+ + a_- - a_0 \end{aligned}$$

Daraus folgt $a_+ + a_- - a_0 = 0$ und damit (i).

(i) \Rightarrow (ii)

Seien a_+, a_-, a_0 Entwirrungs-Koeffizienten für γ , die der Gleichung $-a_+ = a_- - a_0$ genügen. Dann folgt mit Hilfssatz 5.3.(a)

$$\begin{aligned} \gamma(O^2) &= -a_+a_0^{-1} - a_-a_0^{-1} \\ &= (a_- - a_0)a_0^{-1} - a_-a_0^{-1} \\ &= a_-a_0^{-1} - a_0a_0^{-1} - a_-a_0^{-1} = -1. \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iii)

Sei $\gamma(O^2) = -1$. Mit $\gamma(O^2) = a_+a_0^{-1} - a_-a_0^{-1}$ folgt $a_+ + a_- - a_0 = 0$ und damit (i). Da die Entwirrungsinvariante $\gamma(V)$ durch zwei Entwirrungsinvarianten von Verschlingungen niedrigerer Komplexität bestimmt wird, setzen wir (i) voraus und beweisen (iii) per Induktion über die Komplexität. Sei o.B.d.A $V = V_+$ die Verschlingung mit der höchsten Komplexität im Entwirrungs-Tripel (V_+, V_-, V_0) . Da die Behauptung für den Induktionsanfang

$$\begin{aligned} \gamma(O^r) &= (-a_+a_0^{-1} - a_-a_0^{-1})^{r-1} \\ &= (\gamma(O^2))^{r-1} = (-1)^{r-1} \\ &= (-1)^{r+1} = (-1)^{r(V)+1} \end{aligned}$$

gilt, nehmen wir als Induktionsvoraussetzung an, dass

$$\gamma(V_-) = (-1)^{r(V)+1} \text{ und } \gamma(V_0) = (-1)^{r(V)+1\pm 1}$$

gilt und es folgt per Induktion über die Komplexität

$$\begin{aligned} \gamma(V) &= -a_-a_+^{-1}\gamma(V_-) + a_0a_+^{-1}\gamma(V_0) \\ &= -a_-a_+^{-1}(-1)^{r(L)+1} + a_0a_+^{-1}(-1)^{r(L)+1\pm 1} \\ &= (-1)^{r(L)+1}(a_-a_+^{-1} + a_0a_+^{-1}(-1)^{\pm 1}) \\ &= (-1)^{r(L)+1}((a_0 + a_+)a_+^{-1} + a_0a_+^{-1}(-1)) \\ &= (-1)^{r(L)+1}. \end{aligned}$$

zu (d) (i) Die Entwirrungsinvarianten aus Hilfssatz 5.3.(a) und 5.3.(b) in die Gleichungen eingesetzt ergeben

$$\begin{aligned}
a_+ \cdot (\gamma(H) - \gamma(O^2)) &= a_+ \cdot ((a_- a_0^{-1} + a_+^{-1} a_-^2 a_0^{-1} - a_+^{-1} a_0) \\
&\quad - (-a_+ a_0^{-1} - a_- a_0^{-1})) \\
&= 2a_+ a_- a_0^{-1} + a_-^2 a_0^{-1} - a_0 + a_+^2 a_0^{-1} \\
&= a_0 \cdot (2a_+ a_- a_0^{-2} + a_-^2 a_0^{-2} + a_+^2 a_0^{-2} - 1) \\
&= a_0 \cdot ((-a_- a_0^{-1} - a_+ a_0^{-1})^2 - 1) \\
&= a_0 \cdot (\gamma(O^2)^2 - 1).
\end{aligned}$$

(ii) Die Behauptung folgt mit

$$\begin{aligned}
a_- &= -a_+ + a_+ + a_- \\
&= -a_+ - a_0 \cdot (-a_+ a_0^{-1} - a_- a_0^{-1}) \\
&= -a_+ - a_0 \cdot \gamma(O^2)
\end{aligned}$$

direkt aus Hilfssatz 5.3.(a).

(iii) Wir erhalten aus den beiden Gleichungen in (d) ein lineares Gleichungssystem für die Entwirrungsinvarianten. Ist $\gamma(O^2) \neq \pm 1$, dann sind die Lösungen und damit die Entwirrkoeffizienten bis auf eine Einheit in \mathbb{R} eindeutig festgelegt, da \mathbb{R} ein nullteilerfreier Ring ist. Damit ist γ nach (a) durch die Werte $\gamma(O^2)$ und $\gamma(H)$ vollständig bestimmt. \square

2.5.2 Das Jones-Polynom als Entwirrungsinvariante

Satz 5.5 (vgl. z.B. [Kaw96], S. 103)

Sei V eine beliebige Verschlingung. Das Jones-Polynom $X_V(A)$ aus Definition 4.7 ist eine Entwirrungsinvariante mit der Entwirrungs-Relation

$$A^{-4} \cdot X(V_+) - A^4 \cdot X(V_-) + (A^2 - A^{-2}) \cdot X(V_0) = 0.$$

Beweis Nach Satz 4.3.1 gilt $X(O) = 1$.

Für den Beweis der Entwirrungs-Relation führen wir eine Diagrammrechnung durch, wobei $X(V_+) = (-A^3)^{-w(\times)} \langle \times \rangle$, $X(V_-) = (-A^3)^{-w(\times)} \langle \times \rangle$ und $X(V_0) = (-A^3)^{-w(\times)} \langle \times \rangle$ ist. Wenn wir die Eigenschaft 4.3.3. des Klammerpolynoms betrachten, dann gilt

$$\langle \times \rangle = A \langle \times \rangle + A^{-1} \langle \times \rangle \quad \text{und} \quad \langle \times \rangle = A \langle \times \rangle + A^{-1} \langle \times \rangle.$$

Es folgt

$$A \langle \times \rangle - A^{-1} \langle \times \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle \times \rangle.$$

Für die Verdrillungszahlen $w(\times)$ und $w(\times)$ gilt $w(\times) = w(\times) + 1$ und $w(\times) = w(\times) - 1$. Aus

$$\begin{aligned}
A^4 \cdot X(V_+) - A^{-4} \cdot X(V_-) &= A^4(-A^3)^{-w(\times)} \langle \times \rangle - A^{-4}(-A^3)^{-w(\times)} \langle \times \rangle \\
&= A^4(-A^3)^{-w(\times)-1} \langle \times \rangle - A^{-4}(-A^3)^{-w(\times)+1} \langle \times \rangle \\
&= -(-A^3)^{-w(\times)} (A \langle \times \rangle - A^{-1} \langle \times \rangle) \\
&= -(-A^3)^{-w(\times)} (A^2 - A^{-2}) \langle \times \rangle \\
&= -(A^2 - A^{-2}) \cdot X(V_0)
\end{aligned}$$

folgt die Behauptung. □

Nun können wir das Jones-Polynom für den Achterknoten berechnen.

Beispiel 5.6

Sei V_8 der Achterknoten. Aus Abb. 44 erhalten wir die Relation

$$A^{-4} \cdot X(O) - A^4 \cdot X(V_8) + (A^2 - A^{-2}) \cdot X(H) = 0.$$

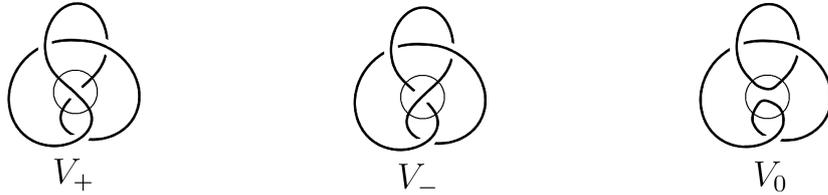


Abb. 44: Entwirrungs-Tripel mit Achterknoten

Es gilt

$$\begin{aligned}
X(H) &= -A^4(A^2 - A^{-2})^{-1} + A^4(-A^4)^2(A^2 - A^{-2})^{-1} - A^4(A^2 - A^{-2}) \\
&= -A^4(A^2 - A^{-2})^{-1} + A^{12}(A^2 - A^{-2})^{-1} - A^4(A^2 - A^{-2})
\end{aligned}$$

(vgl. Hilfssatz 5.3.(b)) und $X(O) = 1$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
X(V_8) &= A^{-4}(A^{-4} \cdot X(O) + (A^2 - A^{-2}) \cdot X(H)) \\
&= A^{-4}(A^{-4} + (A^2 - A^{-2})(-A^4(A^2 - A^{-2})^{-1} \\
&\quad + A^{12}(A^2 - A^{-2})^{-1} - A^4(A^2 - A^{-2}))) \\
&= A^{-4}(A^{-4} + (-A^4 + A^{12} - A^4(A^2 - A^{-2})^2)) \\
&= A^{-8} - 1 + A^8 - (A^4 - 2 + A^{-4}) \\
&= A^{-8} - A^{-4} - 1 - A^4 + A^8.
\end{aligned}$$

Damit ist der Achterknoten nicht äquivalent zum Unknoten.

Bemerkung 5.7

Neben dem Jones-Polynom gibt es noch weitere Entwirrungsinvarianten, zum Beispiel das Alexander-Polynom $\Delta_V(t)$ nach Conway (vgl. z.B. [Ada95], S. 173) mit der Relation

$$\Delta(V_+) - \Delta(V_-) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta(V_0) = 0.$$

Es stellt sich die Frage, ob eine Entwirrungsinvariante existiert, aus der sich alle Entwirrungsinvarianten gewinnen lassen. Eine solche Entwirrungsinvariante wird universelle Entwirrungsinvariante genannt.

2.5.3 Universelle Entwirrungsinvarianten**Definition 5.8 (Universelle Entwirrungsinvariante)**

Sei W die Menge aller Äquivalenzklassen von orientierten Verschlingungen. Eine Entwirrungsinvariante

$$\Gamma: W \longrightarrow \tilde{R}$$

heißt universelle² Entwirrungsinvariante wenn es für jede Entwirrungsinvariante

$$\gamma: W \longrightarrow R$$

einen Ringhomomorphismus $\Phi: \tilde{R} \longrightarrow R$ gibt, so dass $\gamma = \Phi \circ \Gamma$ gilt.

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\gamma} & R \\ & \searrow \Gamma & \nearrow \Phi \\ & & \tilde{R} \end{array}$$

Satz 5.9 (vgl. z.B. [Lüc97], S. 33f.)

Sei W die Menge aller Äquivalenzklassen von orientierten Verschlingungen. Wir nehmen an, es gibt eine Entwirrungsinvariante

$$\Gamma: W \longrightarrow \mathbb{Z}[a_+, a_+^{-1}, a_-, a_-^{-1}, a_0, a_0^{-1}]$$

mit Entwirrungskoeffizienten a_+, a_- und a_0 . Dann gilt

(a) Γ ist eine universelle Invariante;

²Die universelle Entwirrungsinvariante ist keine universelle Invariante im eigentlichen Sinne, da wir keine Eindeutigkeit für den Homomorphismus Φ verlangen.

(b) Sei δ eine Entwirrungsinvariante mit Werten in R und sei $\delta(O^2) \neq \pm 1$. Seien Φ und Ψ Homomorphismen von $\mathbb{Z}[a_+, a_+^{-1}, a_-, a_-^{-1}, a_0, a_0^{-1}]$ nach R . Sei $\Phi \circ \Gamma = \delta$ und R nullteilerfrei. Dann gilt $\Psi \circ \Gamma = \delta$ genau dann, wenn es eine Einheit $u \in R$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} u \cdot \Phi(a_+) &= \Psi(a_+); \\ u \cdot \Phi(a_-) &= \Psi(a_-); \\ u \cdot \Phi(a_0) &= \Psi(a_0); \end{aligned}$$

(c) Für alle V ist $\Gamma(V)$ ein nichttriviales homogenes Polynom von Totalgrad 0.

Beweis

zu (a) Gesucht ist ein Ringhomomorphismus Φ , so dass $\gamma = \Phi \circ \Gamma$ für jede Entwirrungsinvariante γ gilt.

Sei γ eine Entwirrungsinvariante mit Werten in R und Entwirrungskoeffizienten α_+ , α_- und α_0 . Wir definieren

$$\Phi : \mathbb{Z}[a_+, a_+^{-1}, a_-, a_-^{-1}, a_0, a_0^{-1}] \longrightarrow R,$$

indem wir a_+ auf α_+ , a_- auf α_- und a_0 auf α_0 abbilden. Wir zeigen per Induktion über die Komplexität, dass $\gamma = \Phi \circ \Gamma$ gilt. Sei $V = V_+$ o.B.d.A die Verschlingung mit der höchsten Komplexität im Entwirrungs-Tripel (V_+, V_-, V_0) . Da die Behauptung für den Induktionsanfang

$$\begin{aligned} \gamma(O^r) &= (-\alpha_+ \alpha_0^{-1} - \alpha_- \alpha_0^{-1})^{r-1} = (\Phi(-a_+ a_0^{-1} - a_- a_0^{-1}))^{r-1} \\ &= (\Phi(-a_+ a_0^{-1} - a_- a_0^{-1}))^{r-1} \\ &= \Phi \circ \Gamma(O^r) \end{aligned}$$

gilt, nehmen wir als Induktionsvoraussetzung an, dass

$$\gamma(V_-) = \Phi \circ \Gamma(V_-) \text{ und } \gamma(V_0) = \Phi \circ \Gamma(V_0)$$

gilt.

Dann folgt per Induktion über die Komplexität

$$\begin{aligned} \gamma(V) &= -\alpha_- \alpha_+^{-1} \gamma(V_-) - \alpha_0 \alpha_+^{-1} \gamma(V_0) \\ &= -\alpha_- \alpha_+^{-1} \Phi \circ \Gamma(V_-) - \alpha_0 \alpha_+^{-1} \Phi \circ \Gamma(V_0) \\ &= \Phi(-\alpha_- \alpha_+^{-1} \Gamma(V_-) - \alpha_0 \alpha_+^{-1} \Gamma(V_0)) \\ &= \Phi \circ \Gamma(V) \end{aligned}$$

für alle $V \in W$.

zu (b) Da der Ring R nullteilerfrei und $\delta(O^2) \neq \pm 1$ ist, sind die Entwirrungskoeffizienten von δ bis auf gemeinsame Multiplikation mit einer Einheit $u \in R$ vollständig bestimmt. Es gilt $\Phi \circ \Gamma = \delta$, also sind $\Phi(\alpha_+)$, $\Phi(\alpha_-)$ und $\Phi(\alpha_0)$ Entwirrungskoeffizienten für δ .

Sei nun $\Psi \circ \Gamma = \delta$, dann erhalten wir $\Psi(a_+)$, $\Psi(a_-)$ und $\Psi(a_0)$ als weitere Entwirrungskoeffizienten für δ .

Also existiert eine Einheit $u \in R$, so dass gilt

$$\begin{aligned} u \cdot \Phi(a_+) &= \Psi(a_+), \\ u \cdot \Phi(a_-) &= \Psi(a_-), \\ u \cdot \Phi(a_0) &= \Psi(a_0). \end{aligned}$$

Seien wiederum Φ und Ψ Ringhomomorphismen, so dass

$$\begin{aligned} u \cdot \Phi(a_+) &= \Psi(a_+), \\ u \cdot \Phi(a_-) &= \Psi(a_-), \\ u \cdot \Phi(a_0) &= \Psi(a_0) \end{aligned}$$

gilt und seien $\Phi \circ \Gamma$ bzw. $\Psi \circ \Gamma$ Entwirrungsinvarianten mit Entwirrungskoeffizienten $\Phi(a_+)$, $\Phi(a_-)$ und $\Phi(a_0)$ bzw. $\Psi(a_+)$, $\Psi(a_-)$ und $\Psi(a_0)$. Da sich die Entwirrungskoeffizienten, die $\Phi \circ \Gamma$ und $\Psi \circ \Gamma$ festlegen, nur durch eine Einheit $u \in R$ unterscheiden, bestimmen diese Entwirrungskoeffizienten dieselbe Entwirrungsinvariante. Es gilt

$$\Phi \circ \Gamma = \Psi \circ \Gamma,$$

und aus $\Phi \circ \Gamma = \delta$ folgt $\Psi \circ \Gamma = \delta$.

zu (c) Die Invariante des Unknotens besitzt den konstanten Wert 1 und ist nach Lemma 5.4 eine Entwirrungsinvariante. Somit kann $\Gamma(V)$ niemals 0 sein. Wir beweisen per Induktion über die Komplexität, dass $\Gamma(V)$ ein homogenes Polynom von Totalgrad 0 ist.

Sei o.B.d.A $V = V_+$ die Verschlingung mit der höchsten Komplexität im Entwirrungs-Tripel (V_+, V_-, V_0) . Da für den Induktionsanfang

$$\Gamma(O^r) = (-a_+a_0^{-1} - a_-a_0^{-1})^{r-1} = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r-1}{k} (-a_+a_0^{-1})^{r-1-k} (-a_-a_0^{-1})^k$$

die Behauptung gilt, nehmen wir als Induktionsvoraussetzung an, dass $\Gamma(V_-)$ und $\Gamma(V_0)$ homogene Polynome vom Totalgrad 0 sind.

Es folgt per Induktion, dass

$$\Gamma(V) = a_- a_+^{-1} \gamma(V_-) + a_0 a_+^{-1} \gamma(V_0)$$

ebenfalls ein homogenes Polynom vom Totalgrad 0 ist. \square

Hilfssatz 5.10 (vgl. z.B. [HKW86], S. 281f.)

Sei W die Menge aller Äquivalenzklassen von orientierten Verschlingungen. Wir nehmen an, es gibt eine Entwirrungsinvariante

$$J: W \longrightarrow \mathbb{Z}[l, l^{-1}, m, m^{-1}]$$

mit Entwirrungskoeffizienten l , l^{-1} und m . Sei V eine beliebige Verschlingung. Dann ist $J(V)$ eine Summe aus Monomen $r_{a,b} \cdot l^a \cdot m^b$ mit $r_{a,b} \in \mathbb{Z}$, so dass $a \equiv b \pmod{2}$ gilt.

Beweis Der Beweis erfolgt per Induktion über die Komplexität. Da die Behauptung für den Induktionsanfang

$$J(O^r) = (-lm^{-1} - l^{-1}m^{-1})^{r-1} = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r-1}{k} (-lm^{-1})^{r-1-k} (-l^{-1}m^{-1})^k$$

erfüllt ist, nehmen wir als Induktionsvoraussetzung an, $J(V_-)$ und $J(V_0)$ seien Summen aus Monomen $r_{a,b} \cdot l^a \cdot m^b$ mit $r_{a,b} \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b \pmod{2}$. Es folgt per Induktion über die Komplexität, dass

$$J(V) = l^{-1}l^{-1}J(V_-) + ml^{-1}J(V_0)$$

eine Summe aus Monomen $r_{a,b} \cdot l^a \cdot m^b$ mit $r_{a,b} \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b \pmod{2}$ ist. \square

Definition 5.11

Sei W die Menge aller Äquivalenzklassen von orientierten Verschlingungen. Sei

$$J: W \longrightarrow \mathbb{Z}[l, l^{-1}, m, m^{-1}]$$

eine Entwirrungsinvariante.

Wir definieren

$$\Gamma_J(V) \in \mathbb{Z}[a_+, a_+^{-1}, a_-, a_-^{-1}, a_0, a_0^{-1}]$$

durch

$$\Gamma_J(V)(a_+, a_-, a_0) := J(V)(a_+^{1/2} a_-^{-1/2}, a_0 a_+^{-1/2} a_-^{-1/2})$$

indem wir l auf $a_+^{1/2} a_-^{-1/2}$ und m auf $a_0 a_+^{-1/2} a_-^{-1/2}$ abbilden.

Satz 5.12 (vgl. z.B. [Lüc97], S. 34)

Γ ist eine Entwirrungsinvariante mit Entwirrungskoeffizienten a_+ , a_- und a_0 und damit eine universelle Entwirrungsinvariante.

Beweis $\Gamma_J(V) \in \mathbb{Z}[a_+, a_+^{-1}, a_-, a_-^{-1}, a_0, a_0^{-1}]$ wurde aus $J(V) \in \mathbb{Z}[l, l^{-1}, m, m^{-1}]$ eindeutig konstruiert, indem jedes Monom $l^a m^b$ von $J(V)$ durch ein Monom $a_+^i a_-^j a_0^k$ ersetzt wurde, wobei folgendes gilt:

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{2}(a - b); \\ j &= -\frac{1}{2}(a + b); \\ k &= b. \end{aligned}$$

Damit und mit Hilfssatz 5.10 ist Γ_J ein Laurent-Polynom in a_+ , a_- , a_0 . Da $J(O) = 1$ gilt auch $\Gamma_J(O) = 1$. Wenn wir nun in

$$l \cdot \Gamma_J(V_+) + l^{-1} \cdot \Gamma_J(V_-) + m \cdot \Gamma_J(V_0) = 0$$

l mit $a_+^{\frac{1}{2}} a_-^{-\frac{1}{2}}$ und m mit $a_0 \cdot (a_+ a_-)^{-\frac{1}{2}}$ substituieren, erhalten wir

$$a_+^{\frac{1}{2}} a_-^{-\frac{1}{2}} \cdot \Gamma_J(V_+) + a_+^{-\frac{1}{2}} a_-^{\frac{1}{2}} \cdot \Gamma_J(V_-) + a_0 \cdot (a_+ a_-)^{-\frac{1}{2}} \cdot \Gamma_J(V_0) = 0$$

und nach der Multiplikation mit $(a_+ a_-)^{\frac{1}{2}}$

$$a_+ \cdot \Gamma_J(V_+) + a_- \cdot \Gamma_J(V_-) + a_0 \cdot \Gamma_J(V_0) = 0.$$

Damit ist Γ eine Entwirrungsinvariante und mit Satz 5.9.(a) folgt, dass Γ eine universelle Entwirrungsinvariante ist. \square

Die Entwirrungsinvariante $J(V)$ mit Entwirrungskoeffizienten l , l^{-1} und m wird als HOMFLY-Polynom oder Jones Polynom in zwei Variablen bezeichnet. Da die universelle Entwirrungsinvariante Γ durch das HOMFLY-Polynom eindeutig bestimmt wird, wird das HOMFLY-Polynom ebenfalls als universelle Entwirrungsinvariante bezeichnet.³

³An dieser Stelle sind sich LÜCK und DE LA HARPE, KERVAIRE und WEBER nicht einig. Nach [Lüc97] handelt es sich bei $J(V)$ selbst um eine universelle Entwirrungsinvariante, während bei [HKW86] die Entwirrungsinvariante $J(V)$ in dem Sinne universell ist, dass sie Γ eindeutig bestimmt. Letzteres erscheint plausibler, da die Abbildung $\Psi : \mathbb{Z}[l, l^{-1}, m, m^{-1}] \longrightarrow \mathbb{Z}[a_+, a_+^{-1}, a_-, a_-^{-1}, a_0, a_0^{-1}]$, die durch $\Gamma_J(V)(a_+, a_-, a_0) := J(V)(a_+^{1/2} a_-^{-1/2}, a_0 a_+^{-1/2} a_-^{-1/2})$ bestimmt wird, nicht auf allen Elementen von $\mathbb{Z}[l, l^{-1}, m, m^{-1}]$ definiert ist.

Bisher haben wir noch nicht die Existenz dieser universellen Entwirrungsvariante bewiesen. Für diesen Beweis werden wir das HOMFLY-Polynom aus Zöpfen konstruieren. Zöpfe weisen im Gegensatz zu Knoten eine Gruppenstruktur auf, die uns bei der Konstruktion des HOMFLY-Polynoms hilfreich sein wird. Dazu müssen wir zunächst die Zopfgruppen definieren und anschließend die Beziehung zwischen Zöpfen und Knoten klären.

2.6 Zopfgruppen

Für die Konstruktion des HOMFLY-Polynoms durch Hecke-Algebren benötigen wir eine Gruppenstruktur auf den Knoten, wozu wir Zöpfe verwenden. Im Folgenden geben wir eine geometrische Definition der Zopfgruppen und klären dann, wie sich Verschlingungen als Zöpfe darstellen lassen.

2.6.1 Die Zopfgruppen B_n und Zopfäquivalenz

Definition 6.1 (Zöpfe und Zopfäquivalenz)

Wir betrachten im \mathbb{R}^3 die Punkte $A_i = (i, 0, 0)$ und $B_i = (i, 0, 1)$, mit $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Einen Polygonzug der einen Punkt A_i mit einem Punkt B_j verbindet nennen wir steigend, wenn die z -Koordinate eines Punktes, der entlang des Polygonzuges von A_i nach B_j geführt wird, streng monoton wächst. Also schneidet jede zur x - y -Ebene parallele Ebene, einen steigenden Polygonzug in genau einem Punkt.

Wir definieren einen Zopf mit n Fäden als eine Menge von steigenden, sich paarweise nicht schneidenden Polygonzügen (Fäden), die die Punkte A_1, \dots, A_n mit den Punkten B_1, \dots, B_n in beliebiger Reihenfolge verbinden. Falls die Polygonzüge jeweils den Punkt A_i mit B_i , $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ verbinden, erhalten wir den trivialen n -Zopf.

Die Zopfäquivalenz ist definiert wie die Knotenäquivalenz (vgl. Definition 1.3) mit der zusätzlichen Forderung, dass der Polygonzug ABC steigend sein muss.

Damit die Äquivalenzklassen der n -Zöpfe leichter zu handhaben sind, projizieren wir sie in die x - z -Ebene und erhalten analog zu Definition 2.4 Zopfdiagramme. Dabei stellen wir folgende Bedingungen:

- (a) Die Projektionen der Fäden berühren sich nicht gegenseitig.
- (b) Kein Punkt der x - z -Ebene ist die Projektion von drei oder mehr Punkten verschiedener Fäden.
- (c) Alle Doppelpunkte haben verschiedene z -Koordinaten.

Satz 6.2 (Zopfgruppen B_n)

Sei das Zopfprodukt durch das „Zusammenstecken“ von zwei Zöpfen bzw. Zopfdiagramme a und b wie in Abb. 45 definiert. Dann bilden die Äquivalenzklassen der Zöpfe mit n Fäden mit dem Zopfprodukt die Zopfgruppen B_n mit n Fäden.

Am Beispiel von Abb. 45 ist o.B.d.A ersichtlich, dass durch das „Zusammenstecken“ zweier n -Zöpfe wieder ein n -Zopf entsteht, und dass das Zopfprodukt assoziativ ist.

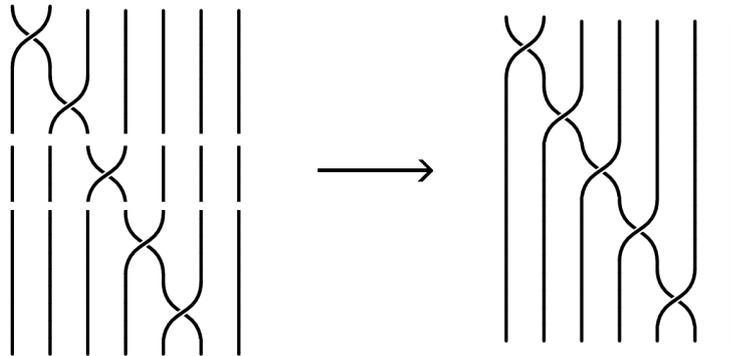


Abb. 45: Assoziatives Zopfprodukt

Das Einselement ist der triviale n -Zopf.

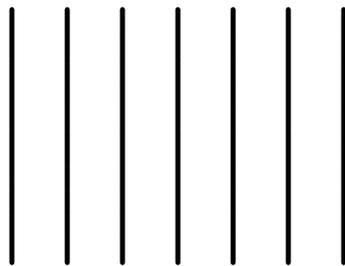


Abb. 46: Trivialer Zopf

Der Inverse Zopf b^{-1} zu einem gegebenen n -Zopf b ist das Spiegelbild zur Spiegelebene $z = \frac{1}{2}$ und damit wieder ein n -Zopf.

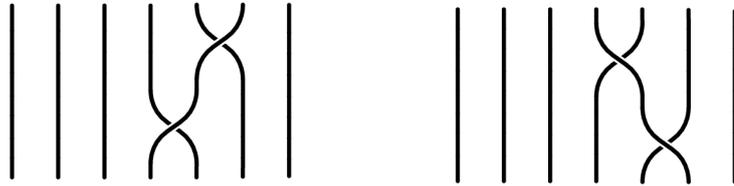
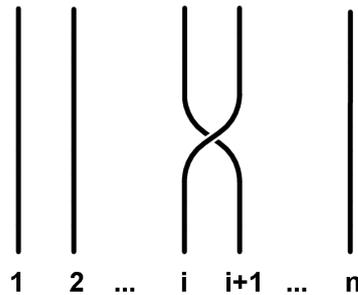


Abb. 47: 7-Zopf und sein inverser Zopf

Satz 6.3

Sei $\beta_i \in B_n$, $1 \leq i \leq n - 1$ der folgende Zopf:

Abb. 48: Erzeuger β_i

Die Zöpfe $\beta_1 \dots \beta_{n-1}$ erzeugen die Zopfgruppen B_n .

Satz 6.4 (Artin-Theorem, vgl. z.B [Pra97], S. 51)

Die Zopfgruppen B_n haben folgende Präsentation:

$$B_n = \left\langle \beta_1, \dots, \beta_{n-1} \left| \begin{array}{ll} \beta_i \beta_j = \beta_j \beta_i & \text{für } 1 \leq i, j \leq n-1, |i-j| \geq 2 \\ \beta_{i+1} \beta_i \beta_{i+1} = \beta_i \beta_{i+1} \beta_i & \text{für } 1 \leq i \leq n-2 \end{array} \right. \right\rangle$$

Bemerkung 6.5

Die Relation

$$(1) \quad \beta_i \beta_j = \beta_j \beta_i \text{ für } 1 \leq i, j \leq n-1, |i-j| \geq 2$$

wird als *ferne Kommutativität* bezeichnet, die Relation

$$(2) \quad \beta_{i+1} \beta_i \beta_{i+1} = \beta_i \beta_{i+1} \beta_i \text{ für } 1 \leq i \leq n-1$$

als *Zopfrelation*.

Beweis Aus Abb. 49 und Abb. 50 ist ersichtlich, dass Zöpfe, die durch die Elemente $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ erzeugt werden, der fernen Kommutativität und der Zopfrelation genügen.

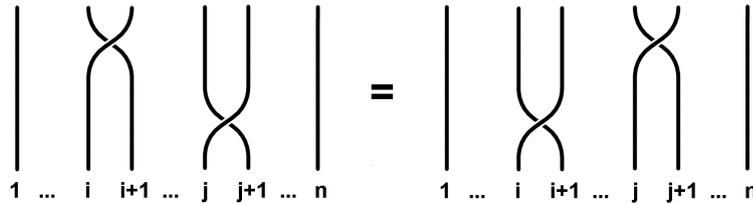


Abb. 49: Ferne Kommutativität

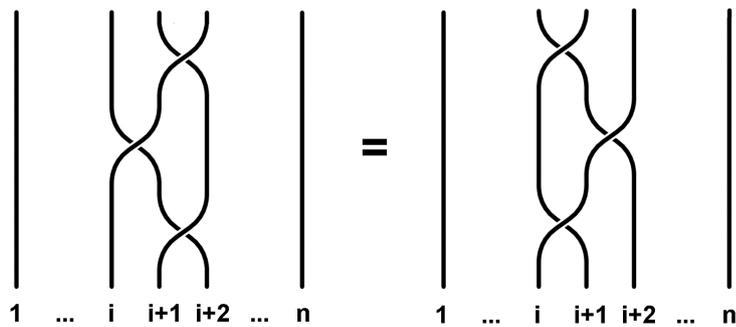


Abb. 50: Zopfrelation

Nun müssen wir noch zeigen, dass alle Relationen zwischen Zöpfen von den beiden angegebenen Relationen abgeleitet werden können.

Es genügt zu zeigen, dass jede elementare Äquivalenzumformung der Zöpfe in B_n unter Verwendung der Relationen von B_n und den trivialen Relationen ausgeführt werden kann. Der Beweis ist ähnlich dem des Reidemeister-Theorems (vgl. Satz 2.10).

Wir betrachten die projizierte Deformation eines Fadenteilstückes eines Zopfes \overline{AC} in $\overline{AB} \cup \overline{BC}$. Zunächst unterteilen wir analog zum Beweis zu 2.10 das Dreieck ABC in Teildreiecke vom Typ I - IV und führen statt der ursprünglichen Deformation von \overline{AC} in $\overline{AB} \cup \overline{BC}$ Teildeformationen entlang der Teildreiecke durch, wobei wir bei \overline{AC} beginnen und bei $\overline{AB} \cup \overline{BC}$ aufhören. Der weitere Beweis unterscheidet sich in zwei Punkten von dem des Reidemeister-Theorems. Zum Einen müssen wir nicht darauf achten, dass eine Kant \overline{EA} und \overline{CF} das Innere des Dreiecks ABC schneiden könnte, da dies per Definition nicht möglich ist. Zum anderen müssen wir die Bedingungen beachten, die an Zopfprojektionen gestellt wurden. Aus diesen ergeben sich drei singuläre Projektionsrichtungen, die bei den Teildeformationen

berücksichtigt werden müssen.

Die Bedingungen (a) und (b) werden auch an reguläre Knotenprojektionen gestellt. Sie ergeben sich im Fall (a) aus elementaren Knotendeformation Δ bzw. Δ' und im Fall (b) aus der Zopfrelation und werden durch Ω_2 - und Ω_3 -Bewegungen passiert. Im Fall (c) kann sich aus einer Teildeformation eine Höhenänderung eines Doppelpunktes, also eine Änderung der z -Koordinate dieses Doppelpunktes ergeben, die jedoch durch die ferne Kommutativität in die Präsentation mit eingeht. Da die Deformationen der Teildreiecke die genannten Relationen erfüllen, folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 6.6

Es gibt offensichtlich eine Inklusion $i : B_n \longrightarrow B_{n+1}$, die durch das Addieren eines trivialen Fadens definiert ist.

2.6.2 Der Abschluss eines Zopfes

Definition 6.7 (Zopfabschluss)

Der Abschluss eines Zopfes *oder* Zopfabschluss ist definiert als die Abbildung

$$\text{clos} : \coprod_{n \geq 1} B_n \longrightarrow W.$$

Wir ordnen jedem Zopf b eine Verschlingung zu, indem wir die Punkte A_i des Zopfes mit den Punkten B_i des Zopfes wie in Abb. 51 verbinden.

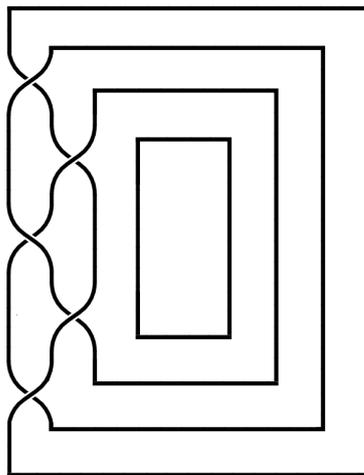


Abb. 51: Abschluss eines 4-Zopfs

Satz 6.8 (Alexander-Theorem, vgl. z.B [Pra97], S. 55f.)

Die Abbildung

$$clos : \coprod_{n \geq 1} B_n \longrightarrow \text{Knoten}$$

ist surjektiv.

Beweis Gegeben sei ein orientiertes Verschlingungsdiagramm V . Wir sagen, dass sich die Verschlingung um den Punkt O wickelt, wenn jede orientierte Kante von O aus als positiv gesehen wird. Die Kanten sind also von rechts nach links orientiert.

Besitzt V einen solchen Punkt O , dann kann V entlang eines Strahls mit Startpunkt O aufgeschnitten und zu einem Zopf entzerrt werden.

Besitzt V keinen solchen Punkt O , wählen wir einen beliebigen Punkt O' . Dann ersetzen wir alle negativ orientierten Kanten \overline{AC} mit Hilfe von Knoten-deformationen und Reidemeister-Bewegungen durch zwei positiv orientierte Kanten $\overline{AB} \cup \overline{BC}$, indem wir das Dreieck ABC so wählen, dass der Punkt O' innerhalb des Dreiecks liegt. Besitzt das so entstandene Verschlingungsdiagramm V' von O' aus gesehen nur noch positiv orientierte Kanten, kann V' entlang eines Strahls mit Startpunkt O' aufgeschnitten und zu einem Zopf entzerrt werden. Da sich auf diese Weise zu jedem Knoten ein Zopf finden lässt, ist die Behauptung bewiesen. \square

Bemerkung 6.9

Die Abbildung $clos$ ist nicht injektiv. Zum Beispiel wird jeder Erzeuger der Zopfgruppe B_i auf die triviale Verschlingung mit $i - 1$ Komponenten abgebildet.

Unsere nächste Aufgabe ist nun herauszufinden, wie die Zöpfe, deren Abschlüsse äquivalent sind, in Beziehung stehen. Hierzu betrachten wir die folgenden algebraischen Transformationen von Zöpfen.

Definition 6.10 (1. und 2. Markov-Bewegung)

Die Markov-Bewegungen sind wie folgt definiert:

1. Markov-Bewegung: $b \leftrightarrow aba^{-1}$ für $a, b \in B_n$.
2. Markov-Bewegung: $b \leftrightarrow b\beta_n^{\pm 1}$ für $b \in B_n, \beta_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$.

Satz 6.11 (Markov-Theorem, vgl. z.B [Bir75], Kapitel 2.2)

Der Abschluss von zwei Zöpfen ist genau dann äquivalent wenn ein Zopf durch eine endliche Folge von Markov-Bewegungen in den anderen übergeführt werden kann.

Beweis Da der Beweis des Markov-Theorems sehr umfangreich ist, werden wir uns hier darauf beschränken zu zeigen, dass der Abschluss von zwei Zöpfen äquivalent ist, wenn ein Zopf durch eine endliche Folge von Markov-Bewegungen in den anderen übergeführt werden kann. Der vollständige Beweis ist bei [Bir75] nachzulesen.

Es genügt zu zeigen, dass der Abschluss eines Zopfes invariant unter der 1. und 2. Markov-Bewegung ist. Für die 1. Markov-Bewegung gilt, wie aus Abb. 52 ersichtlich ist,

$$\text{clos}(aba^{-1}) = \text{clos}(a^{-1}ab) = \text{clos}(b). \quad \square$$

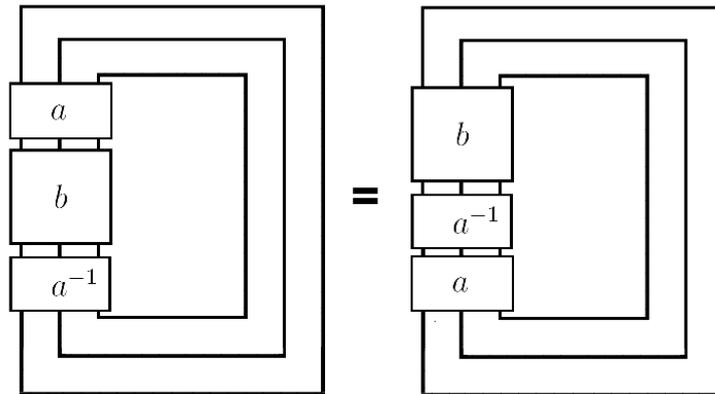


Abb. 52: Invarianz des Zopfabschlusses unter der 1. Markov-Bewegung

Bei der 2. Markov-Bewegung entsteht im Zopfabschluss eine zusätzliche Schleife, die durch eine Ω_1 -Bewegung eliminiert werden kann.

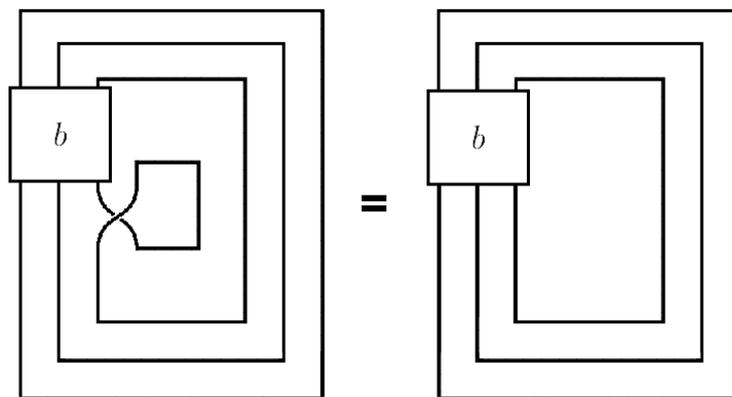


Abb. 53: Invarianz des Zopfabschlusses unter der 2. Markov-Bewegung

Für die Konstruktion einer Verschlingungs-Invariante bietet sich nun folgende Strategie an: Man finde eine Darstellung der Zopf-Gruppe und konstruiere daraus eine Zopf-Invariante, die invariant unter den Markov-Operationen ist. Da es sich bei der ersten Markov-Operation um eine Konjugation handelt, bietet es sich an, eine Spur zu verwenden. Im Folgenden werden wir die Hecke-Algebren betrachten, die eine geeignete Darstellung der Zopfgruppen liefern. Aus den Hecke-Algebren werden wir eine universelle Entwirrunsinvariante, das Homfly-Polynom konstruieren.

2.7 Konstruktion einer universellen Entwirrunsinvariante mittels Hecke-Algebren

2.7.1 Hecke-Algebren

Definition 7.1 (Hecke-Algebren)

Sei K ein Körper und $q \in K$ ein Element in diesem Körper. Die Hecke-Algebren $H_n = H_n(K, q)$, assoziiert zu K und q für $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, sind die assoziativen K -Algebren mit Einselement 1, die von T_1, T_2, \dots, T_{n-1} unter folgenden Relationen erzeugt werden:

- (1) $T_i T_j = T_j T_i$ für $1 \leq i, j \leq n-1$ und $|i-j| \geq 2$;
- (2) $T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n-1$;
- (3) $T_i^2 = (1-q)T_i + q$ für $1 \leq i \leq n-1$.

Für $n = 0, 1$ gilt $H_0 = H_1 = K$.

Bemerkung 7.2

Es gibt eine natürliche Abbildung der Zopfgruppen in die Hecke-Algebren

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} : B_{n+1} &\longrightarrow H_{n+1} \\ \beta_i &\mapsto T_i \end{aligned}$$

Wir sehen, dass eine kanonische Abbildung $H_n \rightarrow H_{n+1}$ von K -Algebren existiert, wodurch insbesondere H_{n+1} zu einem (H_n, H_n) -Bimodul wird.

Satz 7.3 (Strukturlemma, vgl. z.B. [HKW86], Paragraph 4)

Für alle $n \geq 1$ gibt es einen Isomorphismus von (H_n, H_n) -Bimoduln

$$\begin{aligned} \varphi : H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n &\longrightarrow H_{n+1} \\ a + \sum_i b_i \otimes c_i &\mapsto a + \sum_i b_i T_n c_i. \end{aligned}$$

Beweis Wir zeigen

- (a) φ ist wohldefiniert;
- (b) φ ist surjektiv;
- (c) $\dim_K(H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n) = \dim_K(H_{n+1})$.

zu (a) Sei $u \in H_{n-1}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(bu \otimes c) &= buT_n c \\ \text{und} \quad \varphi(b \otimes uc) &= bT_n uc. \end{aligned}$$

Da u eine K -Linearkombination aus den Monomen T_1, \dots, T_{n-2} ist und diese in H_{n+1} mit T_n kommutieren, gilt

$$buT_n c = bT_n uc$$

und somit ist φ wohldefiniert.

zu (b) Es genügt zu zeigen, dass sich jedes Monom in H_{n+1} als Summe von Monomen schreiben lässt, die das Element T_n höchstens einmal enthalten. Wir zeigen die Aussage durch Induktion über n .

Für $n = 1$ ist die Annahme trivial. Sei $n > 1$. Wir betrachten o.B.d.A. das Monom $x \in H_{n+1}$, welches mindestens zweimal T_n enthält. Wir schreiben $x = x_1 T_n x_2 T_n x_3$, wobei x_1 und x_3 ebenfalls T_n enthalten können, während x_2 nur aus T_1, \dots, T_{n-1} besteht. Per Induktionsvoraussetzung gehen wir davon aus, dass x_2 höchstens einmal T_{n-1} enthält. Falls T_{n-1} in x_2 überhaupt nicht auftritt, wird durch die Hecke-Relation (3) mit

$$x = x_1 T_n x_2 T_n x_3 = x_1 x_2 T_n^2 x_3 = (1 - q)x_1 x_2 T_n x_3 + qx_1 x_2 x_3$$

die Anzahl der auftretenden T_n in jedem durch diese Gleichung neu entstandenen Monom reduziert. Wenn x_2 das Monom T_{n-1} genau einmal enthält, können wir x_2 als $x'_2 T_{n-1} x''_2$ schreiben, wobei x'_2 und x''_2 aus den Monomen T_1, \dots, T_{n-2} bestehen. Dann wird unter Anwendung der Hecke-Relationen (1) und (2) durch

$$x = x_1 x'_2 T_n T_{n-1} T_n x''_2 x_3 = x_1 x'_2 T_{n-1} T_n T_{n-1} x''_2 x_3$$

die Anzahl der T_n in x weiter reduziert und wir erhalten die Behauptung.

zu (c) Um zu zeigen, dass $\dim_K(H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n) = \dim_K(H_{n+1})$ gilt, betrachten wir die Liste von Monomen

$$\begin{aligned} S_1 &= \{1, T_1\}, \\ S_2 &= \{1, T_2, T_2T_1\}, \\ S_3 &= \{1, T_3, T_3T_2, T_3T_2T_1\}, \\ &\vdots \\ S_n &= \{1, T_n, T_nT_{n-1}, \dots, T_nT_{n-1} \dots T_1\}. \end{aligned}$$

Definition 7.4 (Normalform)

Ein Monom $M \in H_{n+1}$ heißt in Normalform dargestellt, wenn es die Form $M = U_1 \cdot \dots \cdot U_n$ hat, mit $U_i \in S_i$ für $1 \leq i \leq n$. Es gibt $(n+1)!$ Monome in Normalform.

Wenn die Menge der Monome $M \in H_{n+1}$ in Normalform eine K -Basis von H_{n+1} bilden, dann gilt $\dim_K H_{n+1} = (n+1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere wird der K -Vektorraum $H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n$ durch die Unterräume $H_n \otimes U_{n-1}$ mit $U_{n-1} \in S_{n-1}$ über K aufgespannt und es gilt

$$\dim_K(H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n) \leq n! + n \cdot n! = (n+1) \cdot n! = (n+1)!.$$

Damit und mit der Surjektivität von

$$\varphi : H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n \rightarrow H_{n+1}$$

gilt

$$\dim_K(H_n \oplus (H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n)) = (n+1)!.$$

Es folgt

$$\dim_K(H_n \oplus (H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n)) = \dim_K(H_{n+1}).$$

Dann ist φ ein Isomorphismus und das Strukturlemma bewiesen. □

Es bleibt zu zeigen, dass die Menge der Monome $M \in H_{n+1}$ in Normalform eine K -Basis von H_{n+1} bildet. Dies folgt aus Hilfssatz 7.5.

Hilfssatz 7.5

(a) Die Menge der Monome $M \in H_{n+1}$ in Normalform ist ein Erzeugendensystem von H_{n+1} .

(b) Die Menge der Monome $M \in H_{n+1}$ in Normalform ist linear unabhängig.

Beweis

zu (a) Wir zeigen, dass die Menge der Monome $M \in H_{n+1}$ in Normalform H_{n+1} erzeugt, per Induktion über n . Für den Induktionsanfang $n = 0, 1, 2$ ist die Behauptung trivial. Wir nehmen als Induktionsvoraussetzung an, dass H_n von der Menge der Monome $M = U_1 \cdot \dots \cdot U_n$ in Normalform erzeugt wird. H_{n+1} wird über K durch die Monome M_0 und $M = M_1 T_n M_2$ erzeugt, wobei $M_0, M_1, M_2 \in H_n$ gilt. Aufgrund der Induktionsvoraussetzung genügt es, die Behauptung für $M = M_1 T_n M_2$ zu zeigen.

M_2 ist nach Induktionsvoraussetzung eine K -Linearkombination von Monomen der Form $V_1 \dots V_{n-1}$ mit $V_i \in S_i$ für $i = 1, \dots, n$. Es gilt

$$M = M_1 T_n M_2 = M_1 T_n V_1 \dots V_{n-1} = M'_1 T_n V_{n-1} = M'_1 U_n$$

mit $U_n = T_n V_{n-1} \in S_n$, da aus $U_i \in S_i$ die Eigenschaft $T_{i+1} U_i \in S_{i+1}$ folgt.

Wiederum induktiv ist M'_1 eine K -Linearkombination von Monomen der Form $U_1 \dots U_{n-1}$ mit $U_i \in S_i$ und damit M eine K -Linearkombination von Monomen der Form $U_1 \cdot \dots \cdot U_n$. Somit bildet die Menge der Monome M in Normalform ein Erzeugendensystem von H_{n+1} und $\dim_k(H_{n+1}) \leq (n+1)!$.

zu (b) Um zu zeigen, dass die Menge der Monome $M \in H_{n+1}$ in Normalform linear unabhängig ist, bedienen wir uns der Eigenschaften der symmetrischen Gruppe Σ_{n+1} als Basis des K -Vektorraums $K\Sigma_{n+1}$.

Bemerkung 7.6

Sei Σ_{n+1} die symmetrische Gruppe auf $\{1, \dots, n+1\}$ und s_i die Transposition $(i, i+1)$. Dann kann jedes $\pi \in \Sigma_{n+1}$ als ein Produkt $w_1 w_2 \dots w_n$ geschrieben werden, wobei

$$w_i \in \{1, s_i, s_i s_{i-1}, \dots, s_i s_{i-1} \dots s_1\}.$$

Der Beweis, dass die Produkte $w_1 w_2 \dots w_n$ ein Erzeugendensystem des K -Vektorraums $K\Sigma_{n+1}$ sind, folgt analog zum Beweis von Hilfssatz 7.5.(a). Da es $(n+1)!$ mögliche Produkte $w_1 w_2 \dots w_n$ gibt und Σ_{n+1} genau $(n+1)!$ Elemente hat, ist die Darstellung eindeutig.

Bemerkung 7.7

Sei $l : \Sigma_{n+1} \rightarrow N$ die Wortlänge von Σ_{n+1} bezüglich der Erzeuger $\{s_1, \dots, s_n\}$. Sei $\pi \in \Sigma_{n+1}$ und $s \in \{s_1, \dots, s_n\}$. Dann ist $l(s\pi) \in \{l(\pi) + 1, l(\pi) - 1\}$ und

$l(\pi s) \in \{l(\pi) + 1, l(\pi) - 1\}$.

Es ist leicht ersichtlich, dass $l(s\pi) \leq l(\pi) + 1$ sein muss. Angenommen $l(s\pi) < l(\pi) - 1$, dann wäre $l(\pi) = l(s(s\pi)) \leq l(s\pi) + 1 < l(\pi)$, was ein Widerspruch ist. Weiterhin gilt, da $\{s_1, \dots, s_n\}$ Transpositionen sind, $sign(s\pi) \neq sign(\pi)$ und damit $l(s\pi) \neq l(\pi)$.

Sei nun $l : \Sigma_{n+1} \rightarrow N$ die Wortlänge von Σ_{n+1} bezüglich der Erzeuger $\{s_1, \dots, s_n\}$. Für $i \in 1, \dots, n$ definieren wir $L_i \in End_K(K\Sigma_{n+1})$ durch

$$L_i(\pi) = \begin{cases} s_i\pi & \text{für } l(s_i\pi) > l(\pi), \\ qs_i\pi + (1-q)\pi & \text{für } l(s_i\pi) < l(\pi), \end{cases}$$

für jedes $\pi \in \Sigma_{n+1}$.

Wenn es eine Abbildung $L : H_{n+1} \rightarrow End_K(K\Sigma_{n+1})$ zwischen Algebren gibt, so dass $L(T_i) = L_i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt, dann können wir die K -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} H_{n+1} &\rightarrow K\Sigma_{n+1} \\ x &\mapsto L(x)(1) \end{aligned}$$

betrachten. Ist $M = U_1U_2 \cdot \dots \cdot U_n$ mit $U_i \in S_i$ gegeben, dann gilt

$$L(M)(1) = w_1w_2 \cdot \dots \cdot w_n$$

mit $w_i \in \{1, s_i, s_i s_{i-1}, \dots, s_i s_{i-1} \dots s_1\}$.

Da jedes $\pi \in \Sigma_{n+1}$ eindeutig in der Form $\pi = w_1w_2 \cdot \dots \cdot w_n$ dargestellt werden kann, bilden die Bilder von M eine Basis des K -Vektorraums $K\Sigma_{n+1}$ und es folgt die lineare Unabhängigkeit der Menge der Monome $M = U_1U_2 \cdot \dots \cdot U_n$ in Normalform. \square

Es bleibt zu zeigen, dass eine Abbildung $L : H_{n+1} \rightarrow End_K(K\Sigma_{n+1})$ existiert, so dass $L(T_i) = L_i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt. Dies folgt aus Hilfssatz 7.8.

Hilfssatz 7.8

Der Endomorphismus $L_i \in End_K(K\Sigma_{n+1})$ genügt den Relationen

- (1) $L_i L_j = L_j L_i$ für $1 \leq i, j \leq n-1$ und $|i-j| \geq 2$;
- (2) $L_i L_{i+1} L_i = L_{i+1} L_i L_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n-1$;
- (3) $L_i^2 = (1-q)L_i + q$ für $1 \leq i \leq n-1$;

durch die die Hecke-Algebren H_{n+1} (vgl. Definition 7.1) definiert werden.

Beweis

zu (1) Wir definieren $R_j \in \text{End}_K(K\Sigma_{n+1})$ für $j = 1, \dots, n$ durch

$$R_j(\pi) = \begin{cases} \pi s_j & \text{für } l(\pi s_j) > l(\pi), \\ q\pi s_j + (1-q)\pi & \text{für } l(\pi s_j) < l(\pi). \end{cases}$$

Dann gilt für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$L_i R_j = R_j L_i.$$

Um dies zu zeigen, sind für beliebige $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und $\pi \in \Sigma_{n+1}$ die sechs folgenden Fälle zu überprüfen, die aus den Definitionen von L_i und R_j hervorgehen:

- (i) $l(s_i \pi s_j) = l(\pi) + 2$;
- (ii) $l(s_i \pi s_j) = l(\pi) - 2$;
- (iii) $l(s_i \pi s_j) = l(\pi)$ und
 - (a) $l(s_i \pi) = l(\pi) + 1, l(\pi s_j) = l(\pi) - 1$;
 - (b) $l(s_i \pi) = l(\pi) - 1, l(\pi s_j) = l(\pi) + 1$;
 - (c) $l(s_i \pi) = l(\pi) + 1, l(\pi s_j) = l(\pi) + 1$;
 - (d) $l(s_i \pi) = l(\pi) - 1, l(\pi s_j) = l(\pi) - 1$.

zu (i)

$$L_i R_j(\pi) = L_i(\pi s_j) = s_i \pi s_j = R_j(s_i \pi) = R_j L_i(\pi)$$

zu (ii)

$$\begin{aligned} L_i R_j(\pi) &= L_i(q\pi s_j + (1-q)\pi) \\ &= q s_i(q\pi s_j + (1-q)\pi) + (1-q)(q\pi s_j + (1-q)\pi) \\ &= q^2 s_i \pi s_j + q(1-q)s_i \pi + (1-q)q\pi s_j + (1-q)^2 \pi \\ &= q^2 s_i \pi s_j + (1-q)q\pi s_j + q(1-q)s_i \pi + (1-q)^2 \pi \\ &= q(qs_i \pi + (1-q)\pi)s_j + (1-q)(qs_i \pi + (1-q)\pi) \\ &= R_j(qs_i \pi + (1-q)\pi) = R_j L_i(\pi) \end{aligned}$$

zu (iii) (a)

$$\begin{aligned} L_i R_j(\pi) &= L_i(q\pi s_j + (1-q)\pi) = q s_i \pi s_j + (1-q)s_i \pi \\ &= R_j(s_i \pi) = R_j L_i(\pi) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} L_i R_j(\pi) &= L_i(\pi s_j) = q s_i \pi s_j + (1 - q) \pi s_j \\ &= R_j(q s_i \pi + (1 - q) \pi) = R_j L_i(\pi) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} L_i R_j(\pi) &= L_i(\pi s_j) = q s_i \pi s_j + (1 - q) \pi s_j \\ &\stackrel{(*)}{=} q s_i \pi s_j + (1 - q) s_i \pi \\ &= R_j(s_i \pi) = R_j L_i(\pi) \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} L_i R_j(\pi) &= L_i(q \pi s_j + (1 - q) \pi) = q s_i \pi s_j + (1 - q) s_i \pi \\ &\stackrel{(*)}{=} q s_i \pi s_j + (1 - q) \pi s_j = R_j(q s_i \pi + (1 - q) \pi) \\ &= R_j L_i(\pi) \end{aligned}$$

Die Gültigkeit der bei $\stackrel{(*)}{=}$ verwendete Gleichung $\pi s_j = s_i \pi$ ist unter [Bou02], Chapter 4, No. 1.7 nachzulesen.

Da die obigen Gleichungen für alle $\pi \in \Sigma_{n+1}$ erfüllt sind, folgt

$$L_i R_j = R_j L_i.$$

Sei nun $\pi \in \Sigma_{n+1}$, $1 \leq i, j \leq n - 1$ und $|i - j| \geq 2$. Wir schreiben $\pi = s_{i_1} \cdot s_{i_2} \cdot \dots \cdot s_{i_r}$ mit $r = l(\pi)$. Dann gilt $\pi = R_{i_r} R_{i_{r-1}} \dots R_{i_1}(1)$. Wir setzen $R = R_{i_r} R_{i_{r-1}} \dots R_{i_1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L_i L_j(\pi) &= L_i L_j R(1) = R L_i L_j(1) = R(s_i s_j) \\ &= R(s_j s_i) = R L_j L_i(1) = L_j L_i R(1) \\ &= L_j L_i(\pi). \end{aligned}$$

Da dies für alle $\pi \in \Sigma_{n+1}$ gilt, gilt $L_i L_j = L_j L_i$.

zu (2) Ähnlich wie bei (1) berechnen wir für $\pi \in \Sigma_{n+1}$ und $1 \leq i < n$

$$\begin{aligned} L_i L_{i+1} L_i(\pi) &= L_i L_{i+1} L_i R(1) = R L_i L_{i+1} L_i(1) = R(s_i s_{i+1} s_i) \\ &= R(s_{i+1} s_i s_{i+1}) = R L_{i+1} L_i L_{i+1}(1) = L_{i+1} L_i L_{i+1} R(1) \\ &= L_{i+1} L_i L_{i+1}(\pi). \end{aligned}$$

Da dies für alle $\pi \in \Sigma_{n+1}$ gilt, gilt $L_i L_{i+1} L_i = L_{i+1} L_i L_{i+1}$.

zu (3) Sei $\pi \in \Sigma_{n+1}$. Wenn $l(s_i\pi) > l(\pi)$ ist, dann gilt

$$\begin{aligned} L_i^2(\pi) &= L_i(L_i(\pi)) = L_i(s_i\pi) = qs_i^2\pi + (1-q)s_i\pi \\ &= (1-q)s_i\pi + q\pi = ((1-q)L_i + q)(\pi). \end{aligned}$$

Für $l(s_i\pi) < l(\pi)$ setzen wir $\pi' = s_i\pi$. Dann ist $l(s_i\pi') > l(\pi')$ und es folgt

$$\begin{aligned} L_i^2(\pi) &= L_i(L_i(\pi)) = L_i(qs_i\pi + (1-q)\pi) = L_i(q\pi' + (1-q)\pi) \\ &= qs_i\pi' + (1-q)L_i(\pi) = (1-q)L_i(\pi) + q\pi \\ &= ((1-q)L_i + q)(\pi). \end{aligned}$$

□

2.7.2 Konstruktion einer Verschlingungs-Invariante mittels Hecke-Algebren

Satz 7.9 (Spur, vgl. z.B. [HKW86], Paragraph 5)

Sei K ein Körper und seien $q, z \in K$. Seien H_n die Hecke-Algebren $H_n(K, q)$, die von T_1, T_2, \dots, T_{n-1} erzeugt werden (vgl. Definition 7.1). Dann gibt es K -lineare Abbildungen

$$Sp_n : H_n \rightarrow K$$

mit folgenden Eigenschaften:

(a) Sp_{n+1} eingeschränkt auf H_n ist Sp_n ;

(b) $Sp_n(1) = 1$;

(c) $Sp_{n+1}(aT_nb) = zSp_n(ab)$;

(d) $Sp_n(ab) = Sp_n(ba)$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in H_n$.

Beweis Wir definieren die K -lineare Abbildung $Sp_{n+1} : H_{n+1} \rightarrow K$ unter Verwendung des Strukturlemmas 7.3 durch Induktion über n . Beginnend mit der Identität $Sp_1 : H_1 = K \rightarrow K$ ist $Sp_{n+1} : H_{n+1} \rightarrow K$ durch

$$Sp_{n+1}(x) = Sp_{n+1}(a + \sum_i b_i T_n c_i) = Sp_n(a) + \sum_i z Sp_n(b_i c_i),$$

definiert, wenn $\varphi(a + \sum_i b_i \otimes c_i) = x$. Aus dem Strukturlemma 7.3 ist ersichtlich, dass Sp_{n+1} wohldefiniert ist. Die Eigenschaften (a) und (b) ergeben sich direkt aus der Definition. Da $a, b \in H_n$ sind, gilt (c)

$$Sp_{n+1}(aT_nb) = zSp_n(ab),$$

denn $\varphi(a \otimes b) = aT_nb$.

Ebenfalls durch Induktion über n erfolgt der noch ausstehende Beweis von (d). Die Abbildungen

$$Sp_1 : K \rightarrow K \text{ und } Sp_2 : H_2 \rightarrow K$$

erfüllen die Behauptung, da H_1 und H_2 kommutativ sind.

Wir nehmen an, für alle $a, b \in H_{n-1}$ gilt

$$Sp_{n-1}(ab) = Sp_{n-1}(ba).$$

Wir betrachten o.B.d.A die Monome $a, b \in H_n$, welche T_{n-1} maximal einmal enthalten. Wenn T_{n-1} nicht in b , sondern nur in a enthalten ist, dann schreiben wir $a = xT_{n-1}y$, wobei x, y Monome aus T_1, \dots, T_{n-2} . Dann gilt

$$\begin{aligned} Sp_n(ab) &= Sp_n(xT_{n-1}yb) = zSp_{n-1}(xyb) \\ &= zSp_{n-1}(bxy) = Sp_n(bxT_{n-1}y) \\ &= Sp_n(ba). \end{aligned}$$

Wenn T_{n-1} in b enthalten ist, genügt es, den Fall $b = T_{n-1}$ zu überprüfen, da

$$\begin{aligned} Sp_n(x_1T_{n-1}y_1x_2T_{n-1}y_2) &= Sp_n(y_2x_1T_{n-1}y_1x_2T_{n-1}) \doteq \\ Sp_n(T_{n-1}y_2x_1T_{n-1}y_1x_2) &= Sp_n(x_2T_{n-1}y_2x_1T_{n-1}y_1) \end{aligned}$$

für x_1, x_2, y_1, y_2 Monome aus T_1, \dots, T_{n-2} .

Es ergeben sich mehrere Möglichkeiten, je nachdem ob T_{n-2} in x und y enthalten ist oder nicht. Hier genügt es, den mit $x = x'T_{n-2}x'', y = y'T_{n-2}y''$ für $x', x'', y', y'' \in H_{n-2}$ kompliziertesten Fall zu betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned} Sp_n(xT_{n-1}yT_{n-1}) &= Sp_n(x'T_{n-2}x''T_{n-1}y'T_{n-2}y''T_{n-1}) \\ &= Sp_n(x'T_{n-2}x''y'T_{n-1}T_{n-2}T_{n-1}y'') \\ &= Sp_n(x'T_{n-2}x''y'T_{n-2}T_{n-1}T_{n-2}y'') \\ &= zSp_{n-1}(xy'T_{n-2}^2y'') \\ &= zSp_{n-1}(xy'((1-q)T_{n-2} + q)y'') \\ &= z(Sp_{n-1}(xy'(1-q)T_{n-2}y'') + Sp(xy'qy'')) \\ &= z((1-q)Sp_{n-1}(xy) + qSp_{n-1}(xy'y'')) \end{aligned}$$

und analog

$$Sp_n(T_{n-1}xT_{n-1}y) = z((1-q)Sp_{n-1}(xy) + qSp_{n-1}(x'x''y)).$$

Da

$$Sp_{n-1}(xy'y'') = Sp_{n-1}(x'T_{n-2}x''y'y'') = zSp_{n-2}(x'x''y'y'')$$

und

$$Sp_{n-1}(x'x''y) = Sp_{n-1}(x'x''y'T_{n-2}y'') = zSp_{n-2}(x'x''y'y'')$$

ergibt sich

$$Sp_n(ab) = Sp_n(xT_{n-1}yT_{n-1}) = Sp_n(T_{n-1}xT_{n-1}y) = Sp_n(ba)$$

und damit die Behauptung. \square

Nun definieren wir eine Verschlingungs-Invariante wie folgt:

Satz 7.10

Sei $w := \frac{1}{q}(z + q - 1)$ und sei $e : B_n \rightarrow \mathbb{Z}$ der Gruppenhomomorphismus, der die Erzeuger $\beta_i \in B_n$ auf 1 abbildet. Sei V eine Verschlingung und sei $b \in B_n$ ein Zopf mit $V = \text{clos}(b)$. Dann ist

$$\widehat{J}(V) := z^{\frac{1}{2}(-e(b)-n+1)} \cdot w^{\frac{1}{2}(e(b)-n+1)} \cdot Sp_n(\rho_n(b))$$

eine Verschlingungs-Invariante.

Beweis Wir müssen zeigen, dass $\widehat{J}(V)$ unter den beiden Markov-Bewegungen (vgl. Definition 6.10) invariant ist.

Die erste Markov-Bewegung verändert die Invariante nicht, da

$$Sp_n(\rho_n(b)) = Sp_n(\rho_n(aba^{-1}))$$

sowie

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{2}(-e(b)-n+1)} &= z^{\frac{1}{2}(e(a)-e(b)-e(a)-n+1)} = z^{\frac{1}{2}(e(a)+e(b^{-1})+e(a^{-1})-n+1)} \\ &= z^{\frac{1}{2}(e(ab^{-1}a^{-1})-n+1)} = z^{\frac{1}{2}(-e(aba^{-1})-n+1)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} w^{\frac{1}{2}(e(b)-n+1)} &= w^{\frac{1}{2}(e(a)+e(b)-e(a)-n+1)} = w^{\frac{1}{2}(e(a)+e(b)+e(a^{-1})-n+1)} \\ &= w^{\frac{1}{2}(e(aba^{-1})-n+1)} \end{aligned}$$

gilt. Bei der zweiten Markov-Bewegung ergibt sich für $b \in B_n$ und den Erzeuger $b_n \in B_{n+1}$

$$\begin{aligned} Sp_{n+1}(\rho_{n+1}(bb_n)) &= z \cdot Sp_n(\rho_n(b)); \\ Sp_{n+1}(\rho_{n+1}(bb_n^{-1})) &= w \cdot Sp_n(\rho_n(b)). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
& z^{\frac{1}{2}(-e(bb_n)-(n+1)+1)} \cdot w^{\frac{1}{2}(e(bb_n)-(n+1)+1)} \cdot Sp_{n+1}(\rho_{n+1}(bb_n)) \\
&= z^{\frac{1}{2}(-e(b)-e(b_n)-n)} \cdot w^{\frac{1}{2}(e(b)+e(b_n)-n)} \cdot z \cdot Sp_n(\rho_n(b)) \\
&= z^{\frac{1}{2}(-e(b)-1-n)} \cdot w^{\frac{1}{2}(e(b)+1-n)} \cdot z \cdot Sp_n(\rho_n(b)) \\
&= z^{\frac{1}{2}(-e(b)-n+1)-1} \cdot w^{\frac{1}{2}(e(b)-n+1)} \cdot z \cdot Sp_n(\rho_n(b)) \\
&= z^{\frac{1}{2}(-e(b)-n+1)} \cdot z^{-1} \cdot w^{\frac{1}{2}(e(b)-n+1)} \cdot z \cdot Sp_n(\rho_n(b)) \\
&= z^{\frac{1}{2}(-e(b)-n+1)} \cdot w^{\frac{1}{2}(e(b)-n+1)} \cdot Sp_n(\rho_n(b))
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& z^{\frac{1}{2}(-e(bb_n^{-1})-(n+1)+1)} \cdot w^{\frac{1}{2}(e(bb_n^{-1})-(n+1)+1)} \cdot Sp_{n+1}(\rho_{n+1}(bb_n^{-1})) \\
&= z^{\frac{1}{2}(-e(b)+e(b_n)-n)} \cdot w^{\frac{1}{2}(e(b)-e(b_n)-n)} \cdot w \cdot Sp_n(\rho_n(b)) \\
&= z^{\frac{1}{2}(-e(b)+1-n)} \cdot w^{\frac{1}{2}(e(b)-1-n)} \cdot w \cdot Sp_n(\rho_n(b)) \\
&= z^{\frac{1}{2}(-e(b)-n+1)} \cdot w^{\frac{1}{2}(e(b)-n+1)-1} \cdot w \cdot Sp_n(\rho_n(b)) \\
&= z^{\frac{1}{2}(-e(b)-n+1)} \cdot w^{\frac{1}{2}(e(b)-n+1)} \cdot w^{-1}w \cdot Sp_n(\rho_n(b)) \\
&= z^{\frac{1}{2}(-e(b)-n+1)} \cdot w^{\frac{1}{2}(e(b)-n+1)} \cdot Sp_n(\rho_n(b))
\end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. \square

2.7.3 Konstruktion des HOMFLY-Polynoms als universelle Entwirrungsinvariante

Zur Konstruktion des HOMFLY-Polynoms als universelle Entwirrungsinvariante legen wir den Körper K fest. Sei $\mathbb{C}(q, z)$ der rationale Funktionenkörper über \mathbb{C} in zwei unabhängigen Variablen q und z . Sei K die Erweiterung durch Hinzufügen der Wurzeln \sqrt{q} und $\sqrt{\frac{z}{w}}$, wobei $w := \frac{1}{q}(z + q - 1)$. Wir nehmen H_n über das so definierte K . Seien q und z in den Definitionen 7.1 und 7.9 die durch die Variablen q und z in K gegebene Elemente.

Hilfssatz 7.11

Sei $K := \mathbb{C}(q, z)[\sqrt{q}, \sqrt{\frac{z}{w}}]$ und sei $w := \frac{1}{q}(z + q - 1)$.

Sei $\Psi : \mathbb{Z}[l, l^{-1}, m, m^{-1}] \rightarrow K$ festgelegt durch

$$\begin{aligned}
\Psi(l) &:= iz^{\frac{1}{2}}w^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}} \\
\Psi(m) &:= i(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

Dann ist Ψ injektiv.

Beweis Wir zeigen, dass $\mathbb{C}(\Psi(m), \Psi(l)) \subseteq K$ eine Körpererweiterung von \mathbb{C} von Transzendenzgrad 2 ist. Dann ist $\{\Psi(m), \Psi(l)\}$, nach [Bos04], Kapitel 7.1, Lemma 4, eine Transzendenzbasis von K . Daraus folgt, dass Ψ injektiv ist.

Da K eine Körpererweiterung von \mathbb{C} von Transzendenzgrad 2 ist, genügt es zu zeigen, dass $K/\mathbb{C}(\Psi(m), \Psi(l))$ eine algebraische Körpererweiterung ist. Zunächst zeigen wir, dass $\mathbb{C}(q)[\sqrt{q}]/\mathbb{C}(\Psi(m))$ eine algebraische Körpererweiterung ist. Sei $\mathbb{C}[i(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})]$ der kleinste Unterkörper von $\mathbb{C}(q)[\sqrt{q}]$ der \mathbb{C} und $i(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})$ enthält. Da \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen ist, ist sowohl der Transzendenzgrad von $\mathbb{C}(q)[\sqrt{q}]$ als auch der Transzendenzgrad von $\mathbb{C}(i(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}))$ über \mathbb{C} gleich 1. Dann ist die Körpererweiterung von $\mathbb{C}(i(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}))$ nach $\mathbb{C}(q)[\sqrt{q}]$ algebraisch. Daraus folgt, dass $\mathbb{C}(q)[\sqrt{q}, \Psi(l)]$ algebraisch über $\mathbb{C}(\Psi(l), \Psi(m))$ ist. Außerdem gilt

$$\mathbb{C}(q)(\sqrt{q}, \Psi(l)) = \mathbb{C}(q)(\sqrt{q}, \sqrt{\frac{z}{w}}) = \mathbb{C}(q)[\sqrt{q}, \sqrt{\frac{z}{w}}],$$

da wir z aus Elementen von $\mathbb{C}(q)[\sqrt{q}, \sqrt{\frac{z}{w}}]$ wie folgt darstellen können:

$$\frac{\frac{z}{w}(q-1)}{q - \frac{z}{w}} = \frac{z(q-1)}{qw - z} = \frac{z(q-1)}{(z+q-1) - z} = \frac{z(q-1)}{q-1} = z.$$

Damit ist $\mathbb{C}(q, z)[\sqrt{q}, \sqrt{\frac{z}{w}}]$ algebraisch über $\mathbb{C}(\Psi(l), \Psi(m))$ und es folgt die Behauptung. \square

Hilfssatz 7.12

Sei die Einbettung Ψ wie in Hilfssatz 7.11. Dann liegt $\hat{J}(V)$ im Bild von Ψ .

Beweis Der Beweis wird induktiv über die Komplexität geführt. Für den Induktionsanfang betrachten wir den Abschluss des Erzeugers β_r der Zopfgruppe B_{r+1} , der äquivalent zu O^r ist.

Es ist

$$\begin{aligned} \hat{J}(O^r) &= z^{\frac{1}{2}(-e(\beta_r)-(r+1)+1)} \cdot w^{\frac{1}{2}(e(\beta_r)-(r+1)+1)} \cdot Sp_{r+1}(\rho_{r+1}(\beta_r)) \\ &= z^{-\frac{1}{2}(r+1)} \cdot w^{-\frac{1}{2}(r-1)} \cdot Sp_{r+1}(T_{r+1}) = z^{-\frac{1}{2}(r-1)} \cdot w^{-\frac{1}{2}(r-1)} \cdot Sp_r(1) \\ &= (z^{-\frac{1}{2}} \cdot w^{-\frac{1}{2}})^{r-1} = \left(\frac{z^{-\frac{1}{2}} \cdot w^{-\frac{1}{2}} \cdot (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})}{(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})} \right)^{r-1} \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(\frac{-z^{\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right)^{r-1} = \left(\frac{-iz^{\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}} - i^{-1} z^{-\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}}{i(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})} \right)^{r-1} \\ &= \Psi \left(\left(\frac{-l - l^{-1}}{m} \right)^{r-1} \right), \end{aligned}$$

denn es gilt für $\stackrel{(*)}{=}$

$$\begin{aligned} -\frac{z^{\frac{1}{2}}}{w^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}} + \frac{w^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}} - \frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} \cdot w^{\frac{1}{2}}} &= \frac{-z^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} + w^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} - (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})q^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-z + wq - (q - 1)}{z^{\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

und mit $w := \frac{1}{q}(z + q - 1)$ folgt:

$$-z + wq - (q - 1) = -z + z + q - 1 - z - (q - 1) = 0.$$

Damit ist die Behauptung für den Induktionsanfang bewiesen.

Sei o.B.d.A $V = V_+$ die Verschlingung mit der höchsten Komplexität im Entwirrungs-Tripel (V_+, V_-, V_0) . Wir nehmen als Induktionsvoraussetzung an, dass $\hat{J}(V_-)$ und $\hat{J}(V_0)$ im Bild von Ψ liegen. $\hat{J}(V)$ liegt im Bild von Ψ , wenn $\hat{J}(V_-)$ und $\hat{J}(V_0)$ im Bild von Ψ liegen. Dies ist jedoch per Induktionsvoraussetzung gegeben und die Behauptung damit bewiesen. \square

Definition 7.13

Sei V eine orientierte Verschlingung. Das Jones-Polynom in zwei Variablen oder HOMFLY-Polynom

$$J(V) \in \mathbb{Z}[l, l^{-1}, m, m^{-1}]$$

ist definiert als

$$\Psi(J(V)) = \hat{J}(V).$$

Satz 7.14 (Skein-Invarianz-Lemma, vgl. [HKW86], S. 293f.)

Sei W die Menge aller Äquivalenzklassen von orientierten Verschlingungen. Sei (V_+, V_-, V_0) ein Entwirrungs-Tripel von orientierten Verschlingungen in W . Seien $l, m \in K := \mathbb{C}(q, z)[\sqrt{q}, \sqrt{\frac{z}{w}}]$ definiert durch

$$\begin{aligned} l &:= iz^{\frac{1}{2}}w^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}, \\ m &:= i(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$l \cdot \hat{J}(V_+) + l^{-1} \cdot \hat{J}(V_-) + m \cdot \hat{J}(V_0) = 0.$$

Insbesondere gilt

$$l \cdot J(V_+) + l^{-1} \cdot J(V_-) + m \cdot J(V_0) = 0$$

und das HOMFLY-Polynom ist eine universelle Entwirrungsinvariante mit Entwirrungs-Koeffizienten l, l^{-1} und m .

Beweis Aus dem Alexander-Theorem (vgl. Satz 6.8) folgt, dass wir Zahlen $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n - 1$ und Zöpfe $a, b \in B_n$ finden können, so dass

$$V_+ = \text{clos}(\alpha_+), V_- = \text{clos}(\alpha_-) \text{ und } V_0 = \text{clos}(\alpha_0)$$

mit $\alpha_+ = b\beta_k a$, $\alpha_- = b\beta_k^{-1} a$ und $\alpha_0 = ba$.

Nun lässt sich Folgendes berechnen:

$$\begin{aligned} & lz^{\frac{1}{2}(-e(\alpha_+)-n+1)} w^{\frac{1}{2}(e(\alpha_+)-n+1)} \rho_n(\alpha_+) \\ & + l^{-1} z^{\frac{1}{2}(-e(\alpha_-)-n+1)} w^{\frac{1}{2}(e(\alpha_-)-n+1)} \rho_n(\alpha_-) \\ & + mz^{\frac{1}{2}(-e(\alpha_0)-n+1)} w^{\frac{1}{2}(e(\alpha_0)-n+1)} \rho_n(\alpha_0) \\ = & lz^{\frac{1}{2}(-e(\alpha_0)-e(b_k)-n+1)} w^{\frac{1}{2}(e(\alpha_0)+e(b_k)-n+1)} \rho_n(b) T_k \rho_n(a) \\ & + l^{-1} z^{\frac{1}{2}(-e(\alpha_0)+e(b_k)-n+1)} w^{\frac{1}{2}(e(\alpha_0)-e(b_k)-n+1)} \rho_n(b) T_k^{-1} \rho_n(a) \\ & + mz^{\frac{1}{2}(-e(\alpha_0)-n+1)} w^{\frac{1}{2}(e(\alpha_0)-n+1)} \rho_n(b) \rho_n(a) \\ = & lz^{-\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}(-e(\alpha_0)-n+1)} w^{\frac{1}{2}(e(\alpha_0)-n+1)} \rho_n(b) T_k \rho_n(a) \\ & + l^{-1} z^{\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}(-e(\alpha_0)-n+1)} w^{\frac{1}{2}(e(\alpha_0)-n+1)} \rho_n(b) q^{-1} (T_k + q - 1) \rho_n(a) \\ & + mz^{\frac{1}{2}(-e(\alpha_0)-n+1)} w^{\frac{1}{2}(e(\alpha_0)-n+1)} \rho_n(b) \rho_n(a) \\ = & z^{\frac{1}{2}(-e(\alpha_0)-n+1)} w^{\frac{1}{2}(e(\alpha_0)-n+1)} \rho_n(b) (lz^{-\frac{1}{2}} \cdot w^{\frac{1}{2}} T_k \\ & + l^{-1} z^{\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}} q^{-1} (T_k + q - 1) + m) \rho_n(a). \end{aligned}$$

Aus

$$\begin{aligned} & lz^{-\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} T_k + l^{-1} z^{\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}} q^{-1} (T_k + q - 1) + m \\ = & iz^{\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} T_k - iz^{-\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}} q^{-1} (T_k + q - 1) + i(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}) \\ = & iq^{-\frac{1}{2}} T_k - iq^{-\frac{1}{2}} T_k - iq^{\frac{1}{2}} + iq^{-\frac{1}{2}} + iq^{\frac{1}{2}} - iq^{-\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} & lz^{\frac{1}{2}(-e(\alpha_+)-n+1)} w^{\frac{1}{2}(e(\alpha_+)-n+1)} \rho_n(\alpha_+) + l^{-1} z^{\frac{1}{2}(-e(\alpha_-)-n+1)} w^{\frac{1}{2}(e(\alpha_-)-n+1)} \rho_n(\alpha_-) \\ & + mz^{\frac{1}{2}(-e(\alpha_0)-n+1)} w^{\frac{1}{2}(e(\alpha_0)-n+1)} \rho_n(\alpha_0) = 0. \end{aligned}$$

Wenn wir nun auf die obige Gleichung Sp_n anwenden, folgt

$$l \cdot \widehat{J}(V_+) + l^{-1} \cdot \widehat{J}(V_-) + m \cdot \widehat{J}(V_0) = 0.$$

Mit Definition 7.13 folgt

$$l \cdot J(V_+) + l^{-1} \cdot J(V_-) + m \cdot J(V_0) = 0.$$

Da $\widehat{J}(O) = J(O) = 1$ gilt, ist das HOMFLY-Polynom $J(V)$ eine Entwirrungs-invariante mit Entwirrungs-Koeffizienten l, l^{-1} und m .

Damit sind die Voraussetzungen für Satz 7.14 erfüllt und da $J(V)$ eindeutig die universelle Entwirrungsinvariante Γ bestimmt, wird $J(V)$ deshalb ebenfalls als universelle Entwirrungsinvariante bezeichnet. \square

Da es sich bei dem HOMFLY-Polynom um eine universelle Entwirrungs-invariante handelt, lässt es sich auf alle Entwirrungsinvarianten spezialisieren. Insbesondere sind das Jones-Polynom (vgl. Satz 5.5) durch

$$X_V(A) := J_V(iA, i(A^{\frac{1}{2}} - A^{-\frac{1}{2}}))$$

und das Alexander-Polynom (vgl. Bemerkung 5.7) durch

$$\Delta_V(t) := J_V(i, i(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}))$$

definiert.

3 Knotentheorie in der Schulmathematik

3.1 Klärung der inhaltlichen Voraussetzungen und Schwierigkeiten

3.1.1 Vorgehensweise

Knotentheorie auf unterstem Anforderungsniveau ist bereits für die Grundschule geeignet. Für eine erste Beschäftigung mit Knotentheorie sind kaum inhaltliche Voraussetzungen notwendig sind. Gleichzeitig bietet die Knotentheorie Inhalte, die auf unterschiedlichstem Anforderungsniveau unterrichtet werden können (vgl. [RR00], S. 72), so dass sich auch für die Sekundarstufe II anspruchsvolle Aufgabenstellungen ergeben. Um die Knotentheorie in allen Schuljahren angemessen unterrichten zu können, bedarf es zunächst der Analyse sowohl der inhaltlichen Voraussetzungen als auch der möglichen inhaltlichen Schwierigkeiten.

Im Folgenden werde ich die, im ersten Teil der Arbeit vorgestellte Theorie detailliert unter den genannten Aspekten analysieren. Hierzu teile ich die Inhalte in sechs Bausteine auf, wobei ich bei der Aufteilung den Grad der inhaltlichen Voraussetzungen bereits berücksichtigt habe. Die Bausteine enthalten folgende Themen:

Baustein 1: Knoten

Baustein 2: Knotenprojektionen und Reidemeister-Bewegungen

Baustein 3: Knoteninvarianten

Baustein 4: Jones-Polynom und Entwirrungsinvarianten

Baustein 5: Zöpfe und Zopfgruppen

Baustein 6: Universelle Entwirrungsinvarianten und Konstruktion derselben mittels Hecke-Algebren

Die genannten Bausteine orientieren sich an den einzelnen Kapiteln und bauen inhaltlich aufeinander auf. Eine Ausnahme bildet Baustein 5, der nicht auf die Inhalte der Bausteine 3 und 4 und zum Teil auch nicht auf die Inhalte der Bausteine 1 und 2 angewiesen ist, aber aufgrund von inhaltlich anspruchsvollerer Voraussetzungen dahinter eingeordnet wurde.

Auch in diesem Teil der Arbeit werde ich zunächst den Begriff der Verschlingung äquivalent zu dem Begriff Knoten verwenden, da bei der Behandlung von Verschlingungen in der Regel keine zusätzlichen Schwierigkeiten entstehen. Falls dies doch der Fall sein sollte, werde ich explizit von Verschlingungen sprechen.

3.1.2 Inhaltsanalyse

Baustein 1: Knoten Die Einführung des Knotens ist zunächst mit Hindernissen verbunden, da sich Knoten, wie sie aus dem Alltag bekannt sind, in denen bereits in Abschnitt 2.1 genannten Punkten vom mathematischen Knoten unterscheiden. Der Weg von einem alltäglichen Knoten über einen Knoten mit festen Enden hin zu einem abgeschlossenen Knoten sollte für Schülerinnen und Schüler kein allzu großes Problem darstellen. Die unendliche Dehn- und Zusammenziehbarkeit eines Knotens und die Vernachlässigbarkeit der Knotendicke können, aufgrund der Verwendung von Seilen unterschiedlicher Länge und Dicke, von den Schülerinnen und Schülern unbewusst als gegeben vorausgesetzt werden und müssen deshalb noch einmal explizit genannt oder erarbeitet werden.

Die Definition des Knotens als geschlossener doppelunktfreier Polygonzug im \mathbb{R}^3 ist bereits ein mathematisches Modell, dass für Schülerinnen und Schüler zwar nachvollziehbar ist, aber vermutlich nicht ohne weitere Diskussion angenommen wird. Dafür kann es mehrere Gründe geben, von denen ich hier drei nennen möchte. Erstens werden die Schülerinnen und Schüler nicht die Notwendigkeit sehen, Knoten als geschlossene Polygonzüge darzustellen, da das in Kapitel 2 behandelte Stoffgebiet bis auf wenige Beweise mit glatten Knoten auskommt. Zweitens ist der exakte Umgang mit polygonalen Knoten und Knotendiagrammen schwieriger als mit glatten Knoten, da Knotendeformationen und Reidemeister-Bewegungen ausführlicher und damit komplizierter beschrieben werden müssen. Als dritter Punkt ist noch der ästhetische Aspekt zu nennen, der für Schülerinnen und Schülern sicherlich von Bedeutung ist.

Der Begriff „äquivalent“ wird von den Schülerinnen und Schülern in Niedersachsen im siebten bzw achten Schuljahr im Zusammenhang mit Gleichungen gelernt. Ein Merksatz aus einem Schulbuch der siebten Klasse lautet: „Zwei Gleichungen heißen zueinander äquivalent, wenn sie dieselbe Lösungsmenge L haben“ ([Gri99a], S. 44). Die Äquivalenzrelation ist jedoch kein Bestandteil der Schulmathematik und muss erst eingeführt werden. Dabei ist darauf zu achten, dass gegebenenfalls ein Zusammenhang mit dem bisher erlernten Äquivalenzbegriff hergestellt wird. Auf die Äquivalenzrelation kann verzichtet werden, indem zwei Knoten als gleich, statt als äquivalent oder isotop bezeichnet werden. Dies sehe ich jedoch nicht als notwendig an, da die Äquivalenzrelation in der Regel bereits für Schülerinnen und Schüler ab der fünften Klasse nach der Einführung des Kommutativgesetzes erlernbar ist. Gerade für die unteren Schuljahrgänge gibt es allerdings geeignetere, alltägliche Beispiele, mit Hilfe derer die Äquivalenzrelation gelehrt werden kann.

Orientierte Knoten stellen für Schülerinnen und Schüler aller Schuljahre kein Problem dar. Bei der Benennung von symmetrischen und amphichiralen Knoten ist jedoch Vorsicht geboten. Die Symmetrie als Punkt-, Achsen- und Flächensymmetrie ist bereits Thema des fünften und sechsten Schuljahres. Der in diesen Schuljahren erlernte Symmetriebegriff deckt sich jedoch nicht mit dem Symmetriebegriff, der bei Knoten Verwendung findet. Zwei der Orientierung nach symmetrische Knoten sind weder punkt-, noch achsen-, noch flächensymmetrisch, während ein Paar amphichiraler Knoten von den Schülerinnen und Schülern verständlicherweise als symmetrisch identifiziert werden könnte. Um bei der Begriffsbildung Verwechslungen und Überlagerungen zu vermeiden, bietet es sich an, zumindest zu Beginn der Sekundarstufe I im Zusammenhang mit Knoten auf den Begriff Symmetrie ganz zu verzichten und statt dessen von umgekehrter Orientierung und von Spiegelbildern zu sprechen. Der Begriff „invers“ wird in der Knotentheorie ebenfalls anders als im Sinne des inversen Elementes in der Gruppentheorie verwendet. Dies sollte bei einer späteren oder vorausgegangenen Einführung des Gruppenbegriffs (vgl. Baustein 5) berücksichtigt werden. Da die Gruppe kein Bestandteil der Schulmathematik ist, sind Verwechslungen in der Regel ausgeschlossen.

Wilde Knoten entsprechen keinen realen Knoten und sind deshalb für Schülerinnen und Schüler schwieriger zu erfassen als zahme Knoten. Es ist außerdem nicht einfach, sie für Schüler sinnvoll in den Gesamtkontext der anschaulichen Knotentheorie einzubinden. Sie sollten deshalb, wenn überhaupt, gesondert oder von besonders begabten Schülerinnen und Schülern behandelt werden.

Baustein 2: Knotenprojektion und Reidemeister-Bewegungen Der Begriff der Projektion ist den Schülerinnen und Schülern meist bereits aus dem Alltag, spätestens mit Benutzung des Tageslicht-Projektors aus der Schule, bekannt und kann deshalb intuitiv eingeführt werden. Den Schülerinnen und Schülern den Unterschied zwischen Knotenprojektionen und Knotendiagrammen zu verdeutlichen, ist hingegen mit Schwierigkeiten verbunden. Das Problem kann damit umgangen werden, dass die Knotendiagramme direkt eingeführt werden, ohne Knotenprojektionen zu behandeln. Es ist nicht ratsam, die Begriffe Projektion und Diagramm anfangs äquivalent zu benutzen, da damit eine spätere Unterscheidung der Begriffe stark erschwert wird. Die Normierung der Knotenprojektionen und Diagramme wird ebenfalls intuitiv erfolgen. Die meisten Begriffe wie Kreuzung, Über- und Unterkreuzung, Doppelpunkte und Mehrfachpunkte sind bereits aus dem Alltag oder der Schule bekannt und werden hier gefestigt. Dabei sind die Begriffe, wie zum Beispiel der Doppelpunkt, gegebenenfalls mit neuer Bedeutung zu füllen.

Für die Definition von regulären und singulären Projektionen sind keine Vorkenntnisse notwendig. Die Frage, ob nur endlich viele Doppelpunkte oder überhaupt reguläre Projektionen existieren, werden sich, wenn überhaupt, nur wenige Schülerinnen und Schüler stellen. Wird die Frage behandelt, dann wird es den Schülerinnen und Schülern leicht fallen, die richtige Vermutung aufzustellen. Für einen exakten Beweis muss auf das Modell der Knoten als geschlossene Polygonzüge zurückgegriffen werden. Der Beweis der Existenz von regulären Projektionen kann höchstens von begabten Schülerinnen und Schülern in der Oberstufe behandelt werden, da die Voraussetzungen für den Beweis, wie Kurven zweiter Ordnung, einschalige Hyperboloide und der Ausdruck „liegt dicht“ Themen des Mathematik-Grundstudiums sind.

Für die Deformationen der Projektionskurve und die Reidemeister-Bewegungen sind wiederum keine Vorkenntnisse notwendig, da sie auf glatten Knoten eingeführt werden können. Die Frage, ob die genannten Umformungen immer ausreichen, zwei äquivalente Knoten ineinander zu überzuführen, wird zunächst instinktiv bejaht werden. Die Schwierigkeit liegt darin, die Schülerinnen und Schüler von der Notwendigkeit einer Begründung dieser Tatsache zu überzeugen. Nach meiner Einschätzung dürften begabte Schülerinnen und Schüler, die die Notwendigkeit des Beweises erkannt haben, durchaus in der Lage sein, den Beweis mit Unterstützung der Lehrperson selbst zu erarbeiten. Dazu ist allerdings ein erheblicher Zeitaufwand, sowie kombinatorisches Geschick erforderlich. Auch hier muss das Modell der Knoten als geschlossene Polygonzüge zu Rate gezogen werden.

Baustein 3: Knoteninvarianten Die niedersächsischen Schülerinnen und Schüler sollen laut Kerncurriculum zum Ende des sechsten Schuljahres Invarianz erkennen können (vgl. [Nie06b], S. 16). In den Schulbüchern ist der Begriff der Invariante hingegen erst ab dem siebten Schuljahr zu finden (vgl. [Gri99a], S. 107,150,171). Hier werden Invarianten als Eigenschaften von Spiegelungen, Drehungen und Verschiebungen behandelt. Es stellt sich die Frage, ob die Knotentheorie ein geeignetes Thema ist, um den Begriff der Invariante einzuführen, oder ob die erste Erwähnung des Begriffes in einer vorausgehenden Behandlung von Symmetrien, Drehungen und Verschiebungen oder einem ganz anderen Kontext erfolgen soll. Unabhängig von dieser Frage ist es möglich, den Begriff der Invariante vollständig auszusparen, indem statt dessen von Knoteneigenschaften gesprochen wird. Da der Begriff der Invariante jedoch Teil des niedersächsischen Kerncurriculums und nicht zuletzt ein wesentliches Konzept der Geometrie ist, halte ich dies nicht für sinnvoll.

Um die in Abschnitt 2.3 vorgestellten Knoteninvarianten zu berechnen und Knoten anhand von Invarianten unterscheiden zu können, sind bis auf Teil-

kenntnisse aus den Abschnitten 2.1 und 2.2 keine Vorkenntnisse notwendig. Für den Beweis, dass es sich bei den genannten Invarianten um Knoteninvarianten handelt, sollten die Schülerinnen und Schülern ausreichend Erfahrung mit den Reidemeister-Bewegungen gesammelt haben, damit ihnen die Verbindung zu Knoteninvarianten klar wird. Wenn dies der Fall ist, dann sollte das Überprüfen der Knoteninvarianten anhand der Reidemeister-Bewegungen die Schülerinnen und Schüler vor keine größeren Probleme stellen.

Die Bestimmung der Entknotungszahl bildet aufgrund der unter Paragraph 2.3.4 schon genannten Schwierigkeiten eine Ausnahme und kann deshalb nicht von den Schülerinnen und Schülern verlangt werden. Wird die Entknotungszahl trotzdem behandelt, muss sichergestellt werden, dass die Schülerinnen und Schüler die Entknotungszahl eines Knotens nicht mit der Entknotungszahl eines Knotendiagramms verwechseln. Das Berechnen der Entknotungszahl eines Knotendiagramms bereitet wiederum keine Schwierigkeiten. Für den Beweis von Satz 3.9 benötigen die Schülerinnen und Schüler jedoch ausreichende Erfahrung mit dem Finden von Algorithmen und den Reidemeister-Bewegungen. Die Definition der Komplexität findet erst bei den Beweisen zu den Entwirrungsinvarianten ihre Anwendung und kann deshalb vernachlässigt werden.

Baustein 4: Jones-Polynom und Entwirrungsinvarianten Neben Erfahrungen mit den Inhalten der Abschnitte 2.1 und 2.2 und einer allgemeinen Vorstellung von Knoteninvarianten aus Abschnitt 2.3 muss den Schülerinnen und Schülern zur Berechnung des Jones-Polynoms der Umgang mit Potenzgesetzen und Polynomen vertraut sein. Dies ist in der Regel nicht vor Beginn der Sekundarstufe II der Fall. Zwar sind Laurent-Polynome nicht Bestandteil der Schulmathematik, der Umgang mit negativen Exponenten im Rahmen der algebraischen Potenzrechnung sollte die Schülerinnen und Schüler der Oberstufe jedoch vor kein größeres Problem stellen, da Potenzgesetze bereits ab dem zehnten Schuljahr behandelt werden (vgl. [Gri96], Kapitel 1 und 2). Bis auf die genannten Schwierigkeiten kann die Berechnung des Jones-Polynoms für einfache Knoten von Schülerinnen und Schülern der Oberstufe in der Regel nachvollzogen werden, zumal für die Berechnung der Verdrillungszahl keine weiteren Vorkenntnisse benötigt werden.

Das eigenständige Erarbeiten eines Berechnungsalgorithmus aus der Definition des Jones-Polynoms erfordert hingegen einen geübten Umgang mit Mengen, Potenzen und dem Summenzeichen, sowie kombinatorisches Geschick. Deshalb stellen der Beweis, dass das Jones-Polynom eine Knoteninvariante ist, oder sogar die Konstruktion des Jones-Polynoms aus den Eigenschaften des Klammerpolynoms und der Verdrillungszahl die Schülerinnen und

Schüler vor eine Herausforderung, der sich nur begabte Schülerinnen und Schüler der Oberstufe unter Inkaufnahme eines großen Zeitaufwands stellen sollten.

Die Berechnung von Entwirrungsinvarianten kann ebenfalls von den Schülerinnen und Schülern höherer Schuljahre nachvollzogen und angewandt werden, wobei eine Beschäftigung mit Entwirrungsinvarianten darüber hinaus für Schülerinnen und Schüler in der Regel zu komplex ist (vgl. Baustein 6).

Baustein 5: Zöpfe und Zopfgruppen Wie die Knoten können die Zöpfe und die Zopfprojektionen ebenfalls intuitiv eingeführt werden, da die Darstellung der Zöpfe als Polygonzüge aus ähnlichen wie den bei Baustein 1 schon genannten Gründen unnötig, die Handhabung verkomplizierend und ästhetisch wenig akzeptabel ist.

Der Begriff der Gruppe kann unter Verwendung von Zöpfen gelernt, sollte jedoch noch an anderen Beispielen vertieft werden. In der Regel sind Gruppen nicht Bestandteil der Schulmathematik, und damit auch nicht Bestandteil des Vorwissens der Schülerinnen und Schüler, auf das zurückgegriffen werden kann. Die Behandlung von Zopfgruppen stellt spezielle Anforderungen an die Projektion von Zöpfen. Das Artin-Theorem setzt die Beschäftigung mit der Mathematik der Anfängervorlesungen des Grundstudiums voraus und ist deshalb für den Schulunterricht gänzlich ungeeignet.

Der Abschluss eines Zopfes ist wiederum für Schülerinnen und Schülern aller Schuljahre nachvollziehbar. An dieser Stelle bietet sich eine Verknüpfung mit den unter den Abschnitten 2.1 und 2.2 behandelten Themen an. Wenn der Abschluss als Abbildung definiert wird, sollte den Schülerinnen und Schülern der Begriff der Zuordnung, der ab dem sechsten Schuljahr gelehrt wird, bereits geläufig sein (vgl. [GPF05], Kapitel 2). Im Rahmen der Behandlung des Alexander-Theorems sind die Kenntnisse des Begriffs der Surjektivität, der in der Regel nicht Bestandteil der Schulmathematik ist, nicht zwingend notwendig. Da ab dem siebten Schuljahr bereits Definitions- und Wertemenge Bestandteil des Schulunterrichts sind, ist eine Einführung der Begriffe zu diesem Zeitpunkt zwar denkbar, aber meiner Meinung nach im Rahmen der Knotentheorie zu kompliziert. In der Sekundarstufe I ist aus meiner Sicht eine einfache Begründung dafür, warum aus den Zöpfen durch Abschluss alle Knoten gewonnen werden können, möglich und ausreichend, zumal die Surjektivität des Zopfabschlusses im Rahmen der für Schülerinnen und Schüler verständlichen Knotentheorie nicht weiter genutzt wird.

Das Markov-Theorem fordert ebenso wie das Artin-Theorem für Schülerinnen und Schüler zu schwierige Voraussetzungen, als das es im Schulunterricht behandelt werden kann.

Baustein 6: Universelle Entwirrungsinvarianten und Konstruktion derselben mittels Hecke-Algebren Eine Beschäftigung mit universellen Entwirrungsinvarianten und Hecke-Algebren setzt ein umfangreiches Wissen voraus. Dazu gehören Begriffe wie Homomorphismus, Ring, Einheiten, Nullteiler, Polynomring, Körper, Algebren, Moduln und Bimoduln, um nur einige zu nennen. Als Voraussetzung ist eine vertiefende Kenntnis der Grundstudiumsvorlesungen in Linearer Algebra unumgänglich und ein abgeschlossenes Studium der Mathematik sehr hilfreich. Deshalb ist von durchschnittlichen Schülerinnen und Schülern nicht zu erwarten, dass sie diesen Teil der Knotentheorie auch nur in Ansätzen verstehen. Die Abschnitte 2.5 und 2.7 sollen den Leserinnen und Lesern dieser Arbeit verdeutlichen, wie schnell ein anschauliches mathematisches Thema wie die Knotentheorie zu einem sehr komplexen algebraischen Thema werden kann. Damit möchte ich einer möglichen Kritik, dass es sich bei Knotentheorie um keine richtige und damit für Schülerinnen und Schüler sinnvolle Mathematik handelt, zuvorkommen.

3.1.3 Ergebnis

Die Analyse der benötigten Voraussetzungen und möglichen Schwierigkeiten hat ergeben, dass die Bausteine 1 bis 3 bereits ab dem fünften Schuljahr geeignet sind, während Baustein 4 erst ab der Oberstufe ausführlicher behandelt werden kann. Bausteine 1 bis 3 können durch Baustein 5 ergänzt werden. Baustein 5 kann zwar eigenständig behandelt werden, ergibt aber nach Abzug des Artin-Theorems nicht viel Inhalt für den Schulunterricht, so dass die Zopfgruppen durch andere Gruppen ergänzt werden muss. Baustein 6 ist für die Schule gänzlich ungeeignet.

Damit ist gezeigt, dass die Knotentheorie ausreichend Material bietet, um in der Schule auf einem für Schülerinnen und Schüler angemessenen Niveau unterrichtet zu werden. In Anhang A findet sich zu den für die Schule geeigneten Bausteinen eine Sammlung von Aufgaben.

Im Folgenden soll geklärt werden, ob die für die Schule geeignete Knotentheorie den von der Kultusministerkonferenz gestellten Anforderungen an den Mathematikunterricht genügen kann. Dabei werde ich die Verordnungen für das Land Niedersachsen mit einbeziehen.

3.2 Einordnung der Knotentheorie in die Bildungsstandards

3.2.1 Bildungsstandards in Deutschland und Niedersachsen

Anforderungen an die Mittelstufe Im Zuge der PISA-Studien wurden in Deutschland die Standards für die Hauptfächer reformiert. Die 1995 von der Kultusministerkonferenz verabschiedeten „Standards für den Mittleren Schulabschluss“ wurden 2003 durch die „Vereinbarung über Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss“ ersetzt. Bildungsstandard ist hier das zentrale Schlagwort in Bezug auf die Verbesserung der allgemeinen Schulbildung.

„Bildungsstandards formulieren fachliche und fachübergreifende Basisqualifikationen, die für die weitere schulische und berufliche Ausbildung von Bedeutung sind und die anschlussfähiges Lernen ermöglichen. Die Standards stehen im Einklang mit dem Auftrag der schulischen Bildung. Sie zielt auf Persönlichkeitsentwicklung und Weltorientierung, die sich aus der Begegnung mit zentralen Gegenständen unserer Kultur ergeben.“ ([Kul03a], S. 3)

„Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss benennen [...] allgemeine und inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler in aktiver Auseinandersetzung mit vielfältigen mathematischen Inhalten im Mathematikunterricht erwerben sollen.“ ([Kul03a], S. 9)

Laut dieser Bildungsstandards sollen „Schülerinnen und Schüler [...] Mathematik als anregendes, nutzbringendes und kreatives Betätigungsfeld erleben [...]. Für einen solchen Mathematikunterricht ist die Beschreibung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen [...] in den Vordergrund gerückt worden“ ([Kul03a], S. 9). Dazu legt die Kultusministerkonferenz die in Abb. 54 ersichtlichen, allgemeinen mathematischen Kompetenzen fest, und benennt Teilkompetenzen (vgl. [Kul03a], S. 13ff).

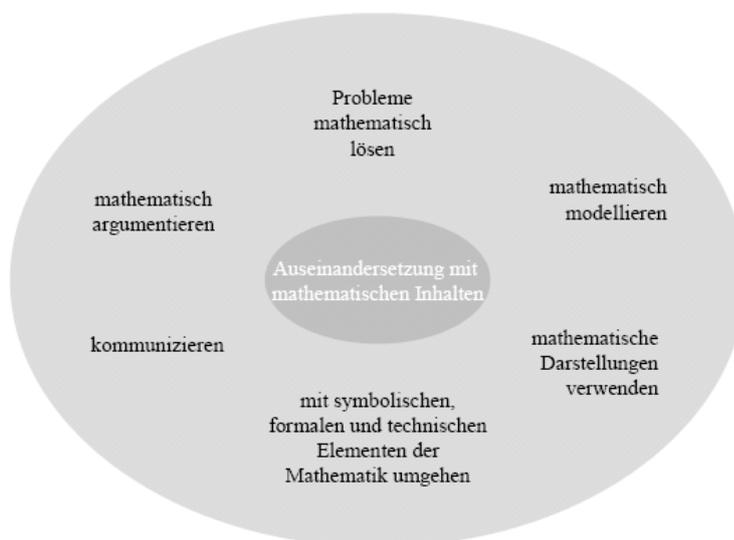


Abb. 54: Allgemeine mathematische Kompetenzen ([Kul03a], S. 13)

Zur Unterstützung dieser allgemeinen mathematischen Kompetenzen, die im Verbund erworben werden sollen, hat die Kultusministerkonferenz die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen unter sogenannten Leitideen zusammengefasst. Dabei handelt es sich um die Leitideen „Zahl“, „Messen“, „Raum und Form“, „Funktionaler Zusammenhang“, sowie „Daten und Zufall“ (vgl. [Kul03a], S. 13ff.).

Abschließend enthalten die Bildungsstandards Aufgabenbeispiele, zu deren Lösung die allgemeinen mathematischen Kenntnisse auf unterschiedlichem Anforderungsniveau verfügbar sein müssen. Um das Anforderungsniveau einordnen zu können, werden die drei, nach dem Anspruch und den erforderlichen kognitiven Fähigkeiten geordneten, Anforderungsbereiche „Reproduzieren“, „Zusammenhänge herstellen“ und „Verallgemeinern und Reflektieren“ unterschieden (vgl. [Kul03a], S. 17ff.).

Aufgrund der Reform der Bildungsstandards für die Mittelstufe wurde im Januar 2006 vom Niedersächsischen Kultusministerium ein neu erarbeitetes Kerncurriculum für die Schuljahrgänge 5 - 10 am Gymnasium vorgelegt, das die erwarteten Bildungsstandards aufgreift und konkretisiert. Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen sind darin in „Prozessorientierten Kompetenzbereichen“, die inhaltlichen Kompetenzen in „Inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen“ zusammengefasst. Zu jedem Kompetenzbereich werden detaillierte Erwartungen an die verschiedenen Schuljahre genannt, in denen sich die Anforderungsniveaus wiederfinden (vgl. [Nie06b], S. 12).

Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Die 1989 von der Kultusministerkonferenz beschlossenen und 2002 neu gefassten „Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung“ (EPA) für das Fach Mathematik dienten bis zum Abitur 2005 als Vorlage für die EPA des Landes Niedersachsen. Diese wurden zum Abitur 2005 durch die EPA der Kultusministerkonferenz unter Anwendung von Übergangsregelungen ersetzt. Grund waren die im Jahre 2006 zum ersten Mal zentral gestellten Abiturprüfungen in Niedersachsen (vgl. [Nie04], S. 1).

Als grundlegende Anforderungen an den Unterricht im mathematisch–naturwissenschaftlich–technischen Aufgabenfeld werden „Verständnis für den Vorgang der Abstraktion, die Fähigkeit zu logischem Schließen, Sicherheit in einfachen Kalkülen, [sowie] Einsicht in die Mathematisierung von Sachverhalten, in die Besonderheiten naturwissenschaftlicher Methoden, in die Entwicklung von Modellvorstellungen und deren Anwendung auf die belebte und unbelebte Natur und in die Funktion naturwissenschaftlicher Theorien“ ([Kul03b], S. 3) genannt.

Die allgemeinbildende Funktion des Mathematikunterrichts wird dadurch betont, dass er die Möglichkeit bieten soll, Mathematik als formale Wissenschaft, als anwendbare Wissenschaft und als Mittel zur Ausbildung heuristischer Fähigkeiten zu erfahren. Weiterhin finden sich in den Prüfungsanforderungen für das Abitur allgemeine mathematische Kompetenzen, hier als methodische Kompetenzen bezeichnet, und Leitideen wieder, die auf den allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen der Mittelstufe aufbauen und diese vertiefen. Methodisch wird von den Schülerinnen und Schülern eine kritische Reflektion von Ergebnissen, Vorgehensweisen und des eigenen Handelns, sowie die sachangemessene Nutzung von Medien wie zum Beispiel Tafelwerke, Taschenrechner, Computersoftware und Internet erwartet. Neben den Methoden sollen auch die Inhalte aus verschiedenen mathematischen Themenbereichen sinnvoll verknüpft werden. Dies wird von den Leitideen „Grenzprozesse/ Approximation“, „Modellieren“, „Algorithmus“ und „Räumliches Strukturieren / Koordinatisieren“, welche die Leitideen aus der Mittelstufe ergänzen und ausbauen, unterstützt (vgl. [Kul03b], S. 3ff).

Die fachlichen Inhalte der Oberstufe sind mit Blick auf das Zentralabitur streng abgesteckt und lassen deshalb kaum Raum für Inhalte außerhalb des Lehrplans. Aus diesem Grund werde ich die Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung in der weiteren Untersuchung vernachlässigen. Dies bedeutet nicht, dass die Knotentheorie für die Oberstufe ungeeignet ist. Eine Möglichkeit, die Knotentheorie in der Oberstufe zu behandeln, wird in Abschnitt 3.3.2 genannt.

Bewertung der Bildungsstandards Die neu eingeführten Bildungsstandards unterscheiden sich von den vorherigen dadurch, dass den bisherigen fachlichen Inhalten allgemeine mathematische Bildungsziele vorangestellt wurden. Schon bei oberflächlicher Betrachtung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen wird die Übereinstimmung mit Bildungszielen deutlich, deren Ausführung im Mathematikunterricht schon seit geraumer Zeit angestrebt wird. Deshalb ist eine verbindliche Aufnahme dieser Kompetenzen in die Lehrpläne zu begrüßen (vgl. [Blu05]).

Es ist jedoch fraglich, ob es sinnvoll ist die allgemeinen mathematischen Kompetenzen in feingliedrige Lernziele einzuteilen. Dadurch wird der Eindruck erweckt, dass allgemeine mathematische Kompetenzen einfach und kurzfristig erlernbar und vor allem differenziert messbar sind. Einem langfristigen und messbaren Erwerb von allgemeinen mathematischen Kompetenzen muss ein qualitativ hochwertiger Unterricht vorausgehen. Wenn die Lehrkräfte für einen solchen Unterricht nicht ausreichend qualifiziert und zu einem autonomen und eigenverantwortlichen Unterricht motiviert werden, bleiben die Bildungsstandards genau wie die „Neue Mathematik“ eine Reform von oben (vgl. [Bai05]).

WITTMANN bemängelt, zusätzlich zu den bereits genannten Aspekten, dass durch die Betonung der, an der Nützlichkeit für den Alltag orientierten, allgemeinen mathematischen Kompetenzen die reine Mathematik zugunsten der angewandten Mathematik vernachlässigt wird. Er stellt den „messbaren Bildungsstandards“ eine „Unterrichtsentwicklung vom lebendigen Fach aus“ entgegen (vgl. [Wit05], S. 5). Der „Ruf nach einer ausgeglichenen Sichtweise, in der Anwendungen und innermathematische Entdeckung gleichermaßen ausbalanciert sind“ ([LM05], S. 2), setzt sich unter den Mathematikdidaktikern zunehmend durch. Ob er bei den Lehrerinnen und Lehrern, die mit dem arbeitsintensiven Alltag des Mathematikunterrichts und dem baldigen Umsetzen der neuen Bildungsstandards beschäftigt sind, ankommt, ist fraglich. Wenn die Knotentheorie von einer breiten Lehrerschaft als ein im Mathematikunterricht mögliches Thema akzeptiert werden soll, genügt es deshalb nicht, dass die Knotentheorie, wie in Abschnitt 3.1 bereits gezeigt, Inhalte aufweist, die dazu geeignet sind, an die Schülerinnen und Schüler herangetragen zu werden. Vielmehr muss sie auch den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz genügen. Nur so lässt sich die Aufnahme der Knotentheorie in die Schulmathematik begründen. Im Folgenden werde ich versuchen, die Knotentheorie sowohl in die inhaltsorientierten als auch in die allgemeinen mathematischen Kompetenzen einzuordnen.

3.2.2 Einordnung der Knotentheorie in die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen

Die Invarianz als fundamentale Idee Ein zentraler Aspekt der Knotentheorie sind die Knoteneigenschaften oder Knoteninvarianten. Die fundamentale Idee der Invarianz hatte im Rahmen der Reform des Mathematikunterrichts im Sinne der „Neuen Mathematik“ ihren Weg in die Schulmathematik gefunden. Seitdem sich die Schulmathematik von der „Neuen Mathematik“ verabschiedet hat, findet die Invarianz im Mathematikunterricht nur noch am Rande Erwähnung und das obwohl mit der Invarianz verwandte Themen einen großen Stellenwert in der Schulmathematik haben.

„Der Inhalt der metrischen, der affinen, der projektiven Geometrie ist die Lehre von den in ihnen invarianten Eigenschaften der geometrischen Gebilde.“ ([Lie55], S. 14)

Damit die Argumente für und gegen die Invarianz als fundamentaler Bestandteil des Curriculums nachvollzogen werden können, gebe ich einen kurzen Überblick über die fachdidaktische Diskussion zu fundamentalen Ideen im Mathematikunterricht.

Aus Sicht der Mathematikdidaktik handelt es sich bei fundamentalen oder universellen Ideen um zentrale Gedanken eines Faches, „deren Universalität nicht nur auf häufiger, sonder[n] auf vielseitiger fruchtbarer Verwendung in unterschiedlichen Teildisziplinen beruht“ ([TKW97], S. 37). Eine weitere Anforderung an die fundamentalen Ideen ist, dass sie im Sinne eines Spiralcurriculums in allen Schuljahren auf unterschiedlichem Anforderungsniveau unterrichtbar sind. Die Aufgabe der Auswahl dieser allgemein-mathematischen Ideen sieht BRUNER, der den Begriff der fundamentalen Idee 1960 in die fachdidaktische Diskussion eingebracht hatte, bei den fachwissenschaftlichen Experten der jeweiligen Teilgebiete. In diesem Sinne findet die Invarianz als „Erhaltung von Eigenschaften an Objekten, die bestimmten Operationen unterworfen werden“ ([Sch92], S. 205) durchaus ihre Legitimation im Schulunterricht. Erwiesenermaßen ist Invarianz ein universelles Schema vieler Teilgebiete der Mathematik, wie der Algebra, der Geometrie und nicht zuletzt der Topologie, und findet auch allgemein ihre Bedeutung „bei der Herausbildung von „Formen“ (z.B. Gestalten der Wahrnehmung, bedingt durch Konstanzleistungen; oder logische Formpartikel, gekennzeichnet durch Invarianzforderungen)“ ([Sch79], S. 168). Damit genügt sie den Gesichtspunkten der logischen Allgemeinheit (Weite), der vielfältigen Anwendbarkeit in mathematischen Einzelgebieten (Fülle) und der Verankerung im Alltagsdenken (Sinn), die eine universelle Idee auszeichnen (vgl. [Sch83], S. 69).

An der Vorgehensweise von BRUNER wurde heftige Kritik geübt. Zum Einen

wurden die in Frage kommenden universellen Ideen als nicht konsensfähig angesehen, zum Anderen wurde angemerkt, dass „die Bestimmung fundamentaler Ideen vor dem Hintergrund allgemeiner pädagogischer Interessen zu erfolgen hat und nicht alleinige Aufgabe der Fachwissenschaft sein kann“ ([TKW97], S. 37). Die Didaktik bewertet die Invarianz zwar als erfolgreiche Idee innerhalb der mathematischen Wissenschaft, hat sie jedoch nahezu vollständig aus dem Mathematikunterricht verbannt. „Die Idee der Invarianz ist u.E. für den MU [Mathematikunterricht/Anm. d. Verfasserin] zu abstrakt und hat zu wenig Anwendungen, um für den Lernprozess hilfreich zu sein“ ([TKW97], S.39).

Letztgenannte Gründe dürften ausschlaggebend dafür gewesen sein, dass die Invarianz in den Bildungsstandards und in der EPA der Kultusministerkonferenz (vgl. [Kul03a] und [Kul03b]) keine Erwähnung findet. In das niedersächsische Kerncurriculum wurde jedoch das „Erkennen von Invarianzen“ (vgl. [Nie06b], S. 16) unter der allgemeinen mathematischen Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ als Lernziel ab dem Ende des sechsten Schuljahres aufgenommen und findet sich somit im Zusammenhang mit Eigenschaften von Spiegelungen, Drehungen, Verschiebungen und Ähnlichkeitsabbildungen auch in den niedersächsischen Schulbüchern wieder (vgl. [Gri99a]). Da die universelle Idee der Invarianz von der Mathematikdidaktik als bereichsspezifische Strategie des Problemlösens und nicht als Leitidee mit zentraler Bedeutung innerhalb des Implikationsgefüges der Mathematik gesehen wird, kann die Knotentheorie aufgrund der Invarianz nur in den allgemeinen mathematischen Kompetenzen, jedoch nicht in den inhaltlichen Kompetenzen verortet werden. Es stellt sich die Frage, ob überhaupt eine Leitidee existiert, der die Knotentheorie zugeordnet werden kann und die gleichzeitig als sinnvoll für den Mathematikunterricht gesehen wird. Dieser Frage soll im Folgenden nachgegangen werden.

Leitidee Raum und Form Wenn man die in den Bildungsstandards genannten inhaltsorientierten Kompetenzen betrachtet, ist der Knoten als räumliches Objekt der Leitidee „Raum und Form“ zuzuordnen. In den unter der Leitidee subsumierten Lernzielen sind hauptsächlich Elemente der metrischen, der affinen und der projektiven Geometrie wieder zuerkennen. Bei genauerem Hinsehen finden sich allerdings auch Lernziele, die mit der Knotentheorie zu vereinbaren sind. Zu diesen Lernzielen zählen das Erkennen und Beschreiben von geometrischen Strukturen in der Umwelt, das Analysieren und Klassifizieren geometrischer Objekte der Ebene und des Raumes, sowie das Beschreiben und Begründen von Eigenschaften und Beziehungen, wie Symmetrie, Kongruenz, Ähnlichkeit und Lagebeziehungen geometrischer Ob-

jekte. Vor allem sollen Schülerinnen und Schüler letztgenannte Eigenschaften und Beziehungen beim Problemlösen zur Analyse von Sachzusammenhängen nutzen (vgl. [Kul03a], S. 14f.).

Ein Blick in die Schulbücher zeigt jedoch, dass topologische Themen, wie die Knotentheorie, in der Regel keine Erwähnung finden. Wenn man den historischen Verlauf der fachwissenschaftlichen Forschung zur Elementargeometrie betrachtet, ist der Mangel an Topologie innerhalb der Schulgeometrie nicht nachzuvollziehen. Schon 1893 erwähnte FELIX KLEIN in seinem Erlanger Programm, in dem er sich zur neueren geometrischen Forschung äußerte, die damals noch als *Analysis situs* bekannte Topologie, wenn auch nur am Rande (vgl. [Lie55], S.13 ff.). LIETZMANN nahm in seinem Lehrwerk zur anschaulichen Topologie (vgl. [Lie55]) Bezug darauf und bezeichnete die anschauliche Topologie als einen weiteren Schritt in der Elementargeometrie. Infolge der Entwicklungen in der mathematischen Fachwissenschaft hielt in den 60er Jahren im Rahmen der „Neuen Mathematik“ aber keine von der Geometrie, sondern eine von der Analysis motivierte Topologie mit streng axiomatisch-deduktivem Aufbau Einzug in die Schulmathematik. Diese Reform scheiterte aus verschiedenen Gründen. Neben der mangelhaften Ausbildung der Lehrerinnen und Lehrer, was topologische Inhalte in der Schule betrifft, führte der abstrakte Unterrichtsstoff dazu, dass die Mathematik von den Schülerinnen und Schülern als ein fertiges Produkt und nicht als ein Prozess wahrgenommen wurde. Der Mathematik wurde der subjektive Charakter vollständig entzogen (vgl. [RR00], S. 70).

Das Scheitern einer axiomatisch-deduktiven Topologie in der Schulmathematik gibt scheinbar Anlass dazu, die Topologie heute weitgehend aus dem Schulunterricht auszuschließen. Diese Tatsache ist für mich nicht nachvollziehbar. Gerade die von LIETZMANN genannte anschauliche oder auch elementare Topologie als Teilgebiet der Elementargeometrie und Vorstufe der Algebraischen Topologie ist gekennzeichnet durch einen prozesshaften Charakter und die Berücksichtigung subjektiver Betrachtungsweisen. Dadurch ermöglicht sie nicht nur den Lehrkräften, sondern auch den Schülerinnen und Schülern ein leichtes Einfinden in das Stoffgebiet. Da sich die anschauliche Topologie mit geometrischen Figuren der realen Erfahrungswelt beschäftigt, genügt sie auch der Forderung nach Alltagsbezug der Schulmathematik, und das noch viel mehr als die herkömmlichen Schulgeometrie, deren abstrakten Gebilde lediglich als Modell für die in der anschaulichen Topologie behandelten Objekte dienen (vgl. [Lie55], S. 18f.). Diese geometrischen Modelle haben die Eigenschaft, dass mit ihrer Hilfe Abbildungen aus der realen Welt abstrahiert und vereinfacht dargestellt werden können. Dies ist für die Bearbeitung von Problemstellungen ein Vorteil, fordert jedoch weitaus geringer das räumliche Anschauungsvermögen von Schülerinnen und Schülern. „To-

pologie ist in der Schule ohne räumliche Anschauung nicht zu betreiben, bei Geometrie ist das vielfach noch möglich“ ([RR00], S. 71).

Ein Kritikpunkt der hier angebracht werden kann ist, dass es sich bei der anschaulichen Topologie als „Kautschukgeometrie“ nur um eine vorwissenschaftliche, in der Schule nicht ausbaufähige Stufe der Topologie handelt. HILTON schreibt dazu:

„I agree that these examples of topological spaces should be included as illuminative examples; but I think it very important to treat the subject, in essence, with the seriousness it deserves.“
([Hil71], S. 437)

Auch die „Neue Mathematik“ hatte Schwierigkeiten, die anschauliche Topologie der Primarstufe in angemessener Weise mit der analysismotivierten Topologie der Sekundarstufe zu verknüpfen (vgl. [Str78] S. 77f.), was als eine weitere Ursache des Scheiterns der Topologie in der Schulmathematik gesehen werden kann.

Um dieses Problem zu lösen, muss im Mathematikunterricht nicht vollständig auf Topologie verzichtet werden. Es genügt, wenn die „ernsthafte“ Topologie von der Schulmathematik an die Universität verschoben wird. Der vorwissenschaftliche Charakter der anschaulichen Topologie ist meiner Meinung nach ausreichend, um den Schülerinnen und Schülern eine Idee von Topologie als wichtiges mathematisches Teilgebiet zu vermitteln, ohne auf einen authentischen Mathematikunterricht zu verzichten. Die Schülerinnen und Schüler erfahren im Gegenteil einiges mehr über die Entstehung der Fachwissenschaft Mathematik und ihres Teilgebietes Topologie, wenn sie sich zunächst mit der anschaulichen Topologie als Grundlage der Topologie im Allgemeinen beschäftigen. Außerdem ist nicht zu vernachlässigen, dass die anschauliche Topologie, auch wenn sie zunächst ohne fachliche Grundlagen behandelt wird, sehr schnell ein hohes Anforderungsniveau erreichen kann (vgl. Baustein 6). Dem Nachteil des Verzichts auf eine analysismotivierte Topologie, wie der mengentheoretischen Topologie, „steht der didaktische Vorteil gegenüber, daß die behandelten Probleme [...] unmittelbar durch die Anschauung motiviert sind“ ([Str78], S.81).

Die genannten Aspekte sollen lediglich zum Nachdenken anregen. Aktuell ist nicht abzusehen, dass sich in absehbarer Zeit etwas daran ändern wird, dass der Topologie in den heutigen Bildungsstandards und dem niedersächsischen Kerncurriculum inhaltlich kaum Platz eingeräumt wird. Deshalb kann eine Legitimation der Knotentheorie für die Schulmathematik nur dadurch erfolgen, dass die Knotentheorie zur Förderung allgemeiner mathematischer Kompetenzen beiträgt.

3.2.3 Einordnung der Knotentheorie in die allgemeinen mathematischen Kompetenzen

Im Folgenden werde ich die Knotentheorie hinsichtlich der Förderung der sechs von der Kultusministerkonferenz verabschiedeten allgemeinen mathematischen Kompetenzen „mathematisch argumentieren“, „Probleme mathematisch lösen“, „mathematisch modellieren“, „mathematische Darstellungen verwenden“, „mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ und „kommunizieren“ einzeln beleuchten. Dabei werde ich innerhalb der einzelnen Kompetenzen zunächst kurz den didaktischen Hintergrund erläutern, sowie die von der Kultusministerkonferenz geforderten Teilziele benennen, um anschließend die Knotentheorie im Hinblick auf den Erwerb und die Förderung der jeweiligen Kompetenz zu beleuchten. Ich werde sowohl die für Schülerinnen und Schüler geeignete Knotentheorie im Allgemeinen betrachten, als auch den Erwerb und die Förderung der Kompetenzen an ausgewählten Beispielen darstellen. Dabei werde ich mich in der Regel auf Beispiele aus den Bausteinen 1 bis 3 beschränken, da diese Bausteine für alle Schuljahre geeignet sind. An gegebener Stelle werde ich die Bausteine 4 und 5 mit einbeziehen. Es wird sich insbesondere zeigen, dass verschiedene Gesichtspunkte innerhalb verschiedener Kompetenzen wiederzufinden sind und die einzelnen Kompetenzen somit nicht getrennt voneinander, sondern nur aufsummiert erworben werden können.

Mathematisch argumentieren Bei der Betrachtung der Beweiskultur im Mathematikunterricht ist festzustellen, dass in ihr Beweisen viel weiter gefasst ist, als es in der Fachwissenschaft die Regel ist. Die Fachwissenschaft hat sich durch Axiomatisierung und Formalisierung von anschaulich-intuitiven Erkenntnissen weitgehend gelöst und beim Beweisen subjektive Aspekte vollständig verdrängt. Im Mathematikunterricht hingegen sind anschauliche, unmittelbar einsichtige Sätze zunächst den Axiomen und formal-deduktiven Beweisen vorzuziehen. Deshalb ist es hier „notwendig, den Begriff des Beweises [...] an die allgemeineren Begriffe des Begründens und des rationalen Argumentierens anzubinden“ ([TKW97], S. 151). IAN STEWART, britischer Mathematiker und Autor von populärwissenschaftlichen Büchern, bringt mit seiner Aussage „Ein Beweis ist keine logische Folge von Aussagen, sondern eine glaubwürdige Geschichte.“ ([HHH03], S. 93) das, was Schülerinnen und Schüler unter Beweisen verstehen, auf den Punkt. Damit sind die Schülerinnen und Schüler nicht weit von der fachwissenschaftlichen Sicht auf Beweise entfernt. Historisch gesehen entwickeln sich mathematische Beweise aus einem Diskurs, innerhalb dessen sie analysiert, abgewandelt,

durch empirische Versuche untermauert oder verworfen werden. Indem man eine theoretische oder praktische Aussage als begründet ansieht, „wenn sie gegenüber allen vernünftig argumentierenden, wirklichen oder gedachten Gesprächspartnern zur Zustimmung gebracht werden kann“ ([TKW97], S. 158) gelingt es, den allgemeinen Begriff des Begründens zu präzisieren ohne auf einen formal-deduktiven Beweis zurückgreifen zu müssen. Die Beweise erhalten ihre Gültigkeit durch die Anerkennung in einer sozialen Gemeinschaft. In der Fachwissenschaft handelt es sich dabei um eine weltweite Gemeinschaft von Wissenschaftlern, die sich mit dem jeweiligen mathematischen Gebiet beschäftigen. Schülerinnen und Schüler suchen hingegen die Anerkennung ihrer Argumente in der sozialen Gemeinschaft des Klassenverbandes. Das schließt die Lehrperson mit ein, die die Aufgabe hat, in den Schülerinnen und Schülern eine Beweisbedürftigkeit, die nur durch eine schlüssige Argumentation zufrieden zustellen ist, zu wecken und zu fördern. Hierbei steht die Frage „Warum?“ im Vordergrund (vgl. [HHH03], S. 98ff.). Auch die Bildungsstandard der Kultusministerkonferenz beinhalten das Stellen von Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, das begründete Äußern von Vermutungen, sowie das Entwickeln von mathematischen Argumentationen. Ein weiterer wichtiger Aspekt ist das Beschreiben und Begründen von Lösungswegen (vgl. [Kul03a], S. 11).

In der Knotentheorie, die sich mit einem, auch für junge Schülerinnen und Schüler alltäglichen Gegenstand beschäftigt, kann das mathematische Argumentieren auf unterschiedlichem Anforderungsniveau unterrichtet werden und folglich von Schülerinnen und Schülern aller Schuljahre erlernt, erprobt und vertieft werden. Dies soll im Folgenden am Beispiel der Frage nach der Äquivalenz zweier Knoten detailliert belegt werden.

Die Frage, ob zwei Knoten äquivalent sind, motiviert die Schülerinnen und Schüler, sich ausführlich mit Knoten oder Knotendiagrammen zu beschäftigen. Je nach Alter und Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler arbeiten diese mit mehr oder weniger komplexen Knoten. Dabei sollten weder nur einfache Knoten behandelt, noch zu komplexe Knoten ausgewählt werden. Die Gründe hierfür werden später noch deutlich.

Schülerinnen und Schüler ab dem fünften und sechsten Schuljahr lernen zunächst an einfachen Knoten Vermutungen über die Äquivalenz oder Nicht-Äquivalenz von Knoten zu äußern. Sie sind dazu aufgefordert, diese Vermutungen mit einfachen eigenen Worten zu erläutern und intuitiv zu begründen. Für die Schülerinnen und Schüler ist leicht ersichtlich, dass es für den Beweis der Äquivalenz zweier Knoten ausreicht, die Knoten oder die Knotendiagramme ineinander zu überführen. Der motivierende Aspekt liegt für Schülerinnen und Schüler darin, dass dieser Beweis auch in der Fachwissenschaft akzeptiert ist. In diesem Zusammenhang bietet sich an, die Reidemeister-Bewegungen

einzuführen oder von den Schülerinnen und Schülern selbst erarbeiten zu lassen, um sie zur Begründung der Äquivalenz heranziehen zu können. Schülerinnen und Schüler ab der siebten und achten Klasse lernen, ihre Begründung auf Bekanntes, in diesem Fall die Reidemeister-Bewegungen, zurückzuführen, wobei ein gewisser Grad an formaler Sprache erwünscht ist. Dazu gehören Formulierungen wie „Wenn ich die Knoten mit Reidemeister-Bewegungen ineinander überführen kann, dann sind die Knoten äquivalent.“.

Lassen sich die zwei Knoten auch durch mehrmaliges Versuchen nicht ineinander überführen, werden die Schülerinnen und Schüler zumindest bei komplexen Knoten weitere Argumente für die Nichtäquivalenz fordern. Die Entwicklung einer Beweisbedürftigkeit bei der Frage nach der Nichtäquivalenz von zwei einfachen Knoten, stellt die Lehrperson vor eine Herausforderung. Werden Schülerinnen und Schüler gefragt, warum der Kleeblattknoten nicht zum Unknoten entknotet werden kann, werden diese sich in der Regel auf ihre Erfahrung, sowie auf die Anschaulichkeit der beiden Knoten berufen und anmerken, dass dies doch „offensichtlich“ sei. Dies ist nicht weiter verwunderlich, denn schließlich wurde die Nichtäquivalenz von Kleeblattknoten und Unknoten auch von Mathematikern des beginnenden 20. Jahrhunderts nicht als beweisbedürftig angesehen (vgl. [Epp99], S. 238). Hier muss die Beweisbedürftigkeit mit komplexeren äquivalenten Knoten, bei denen die Äquivalenz nicht offensichtlich ist und die sich erst durch intensives Ausprobieren ineinander überführen lassen, angeregt werden. Ein schwieriges Beispiel dieser Art ist das Perko-Paar, das bis zum Jahr 1974 als nicht äquivalent angesehen wurde (vgl. [Epp99], S. 156 und Anhang A, Aufgabe 17). Ist die Beweisbedürftigkeit erst einmal geweckt, sind die Schülerinnen und Schüler motiviert, die Nichtäquivalenz von Kleeblattknoten und Unknoten zu beweisen. Dadurch wird auch zukünftig ihre Beweisbedürftigkeit in scheinbar offensichtlichen Fällen gestärkt.

Ist die Frage nach weiteren Argumenten für die Nichtäquivalenz geweckt, kann mit Invarianten weiter gearbeitet werden. Schülerinnen und Schüler ab dem fünften und sechsten Schuljahres lernen dabei, die Nichtäquivalenz durch Berechnungen vorgegebener Invarianten zu begründen. Dabei muss ihnen klar werden, dass sie mit den Berechnungen der Invarianten keine Äquivalenz beweisen können. Sie lernen, die verschiedenen Invarianten zu vergleichen und ihre Aussagekraft zu beurteilen. Ab dem siebten und achten Schuljahr sollen die Schülerinnen und Schüler damit vertraut gemacht werden, sich notwendige Informationen für mathematische Argumentationen eigenständig zu ermitteln. Dazu gehört das Finden einfacher Invarianten und ihre Überprüfung auf Brauchbarkeit. Schülerinnen und Schüler ab der neunten und zehnten Klasse kombinieren ihr gesamtes Wissen, um weitere Invarianten zu konstruieren und begründen ihre Brauchbarkeit in angemess-

sener Fachsprache.

Zusammengefasst verwenden die Schülerinnen und Schüler für den Beweis der Äquivalenz von Knoten Reidemeister-Bewegungen, für den Beweis der Nichtäquivalenz Knoteninvarianten. Die Frage, ob die vorgegebenen oder gefundenen Reidemeister-Bewegungen ausreichend sind, um alle äquivalenten Knoten ineinander zu überführen, ist naheliegend. Schülerinnen und Schülern ab dem fünften bis sechsten Schuljahr begründen mit dem Plausibilitätsargument, dass sich alle Bewegungen, die als Beispiel für weitere Bewegungen vorgegeben werden, in Reidemeister-Bewegungen zerlegen lassen. Ein mögliches Gegenargument kann darin gesehen werden, dass sich für komplexe äquivalente Knoten auch nach mehrmaligem Versuch keine Reidemeister-Bewegungen finden lassen. Die zu untersuchenden Knoten sollten deshalb nicht zu komplex sein. Schülerinnen und Schüler ab der siebten und achten Klasse können an den Knoten Knotendformationen vornehmen und anhand von Seilknoten oder Knotendiagrammen überprüfen, ob sich auch komplex erscheinende Deformationen in Reidemeister-Bewegungen zerlegen lassen. Dabei lernen sie den Kehrsatz „Wenn Knoten äquivalent sind, dann kann ich sie durch Reidemeister-Bewegungen ineinander überführen.“ zu der bereits aufgestellten Behauptung (vgl. oben). Es hängt von den Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler ab, ob die bisher angeführten Beispiele als hinreichende Begründung angesehen werden. Wenn sich ab dem neunten und zehnten Schuljahr ausreichend Schülerinnen und Schüler finden, denen die Begründung durch Beispiele nicht mehr ausreicht, kann die Lehrperson versuchen, den Beweis des Reidemeister-Theorems zu erarbeiten. Dabei ist jedoch ausreichend Zeit einzuplanen, nicht zuletzt weil der mathematische Knoten als polygonaler Knoten modelliert werden muss (vgl. Mathematisch modellieren).

Der Beweis, dass die verwendeten und gefundenen Knoteninvarianten wirklich Knoteninvarianten sind, ist auf deren Invarianz unter Reidemeister-Bewegungen zurückzuführen. Hier muss eine mehrschrittigen Argumentationskette gebaut werden. Dies soll oder kann von Schülerinnen und Schülern ab der siebten und achten Klasse erlernt oder durchgeführt werden. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler die Erfahrung machen, dass es nicht schlecht ist, wenn sich herausstellt, dass eine vermutliche Invariante keine Invariante ist, solange sie eine Begründung liefern, warum es sich in diesen Fällen nicht um eine Invariante handelt. Schülerinnen und Schüler ab dem neunten und zehnten Schuljahr überprüfen und bewerten ebenfalls selbstgefundene Invarianten und sortieren falsche Invarianten aus. Zusätzlich sollen sie die Entknotungszahl von Knoten auf ihre Brauchbarkeit als Invariante untersuchen und begründen, warum ihre Invarianz nicht mit Hilfe der Reidemeister-Bewegungen bewiesen werden kann.

Weitere Sätze der Knotentheorie, wie der Satz über die Existenz von regulären Projektionen oder das Alexander-Theorem, können ebenfalls auf unterschiedlichem Anforderungsniveau begründet werden. Damit sind die Bausteine 1 bis 3 unter dem Aspekt des mathematischen Argumentierens für alle Schulstufen geeignet. Für die Oberstufe bietet der Beweis, dass es sich bei dem Jones-Polynom aus Baustein 5 um eine Knoteninvariante handelt, eine zusätzliche Herausforderung (vgl. [War03], Kapitel 4 und [Mif00]).

Probleme mathematisch lösen Das mathematische Lösen von Problemen darf nicht mit dem Lösen von mathematischen Problemen im engeren Sinne, wie dem Lernen von mathematischen Sachverhalten, dem Bearbeiten von Textaufgaben, in denen Ausgangspunkt, Weg und Ziel bereits festgelegt sind, oder dem Beweisen von mathematischen Sätzen verwechselt werden. Auch das Lösen von unproduktiven „Knobelaufgaben“ trifft den Kern der Problemlöseaufgaben nicht. Das mathematische Lösen von Problemen im weiteren Sinne umfasst vielmehr das Finden, Lösen und Weiterentwickeln von Problemen und damit das, was unter dem Prozess des Mathematik Betreibens zu verstehen ist. Bei diesem Prozess handelt es sich um eine entdeckende und problemorientierte Beschäftigung mit Sachverhalten, deren Zusammenhang mit Mathematik nicht unbedingt auf den ersten Blick ersichtlich sein muss (vgl. [Leu03b], S. 119ff.).

In diesem Sinne stellt die Kultusministerkonferenz an die mathematische Problemlösefähigkeit der Schülerinnen und Schüler die folgenden Anforderungen: Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, aus gegebenen Sachverhalten Probleme selbst zu formulieren und diese oder bereits vorgegebene Probleme zu bearbeiten. Dazu sollen sie in die Lage versetzt werden, geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auszuwählen und anzuwenden. Mit Hilfe der genannten Fähigkeiten finden sie selbstständig Lösungsideen und Lösungswege, beurteilen und bewerten diese und überprüfen die Ergebnisse auf Plausibilität (vgl. [Kul03a], S. 11f.). Hier stellt sich die Frage, ob sich Problemlösefähigkeiten wirklich lehren lassen. Die Erfahrung zeigt, dass erfolgreiche Problemlöser sich leistungsfähige heuristische Strategien nicht durch Lernen, sondern beim Problemlösen selbst angeeignet haben (vgl. [Vol01], S. 264). Das Aneignen von Problemlösefähigkeiten ist ebenso wie das Problemlösen eine selbstständige Tätigkeit. Ein wichtiges Kriterium eines geeigneten Problems ist deshalb eine offene Aufgabenstellung, bei der Ausgangszustand, Weg und Endzustand nicht vollständig vorgegeben sind (vgl. [Leu03b], S. 125). „Offene Aufgabenstellungen bieten Schülerinnen und Schülern Spielräume für eigentätiges Erkunden und Problemlösen“ ([Nie06b], S. 10).

Das in Abschnitt 3.1 abgegrenzte Gebiet der Knotentheorie bietet eine Fülle an offenen Aufgabenstellungen, die von Schülerinnen und Schülern aller Schuljahrgänge auf unterschiedlichstem Anforderungsniveau bearbeitet werden können. Eine kleine Auswahl dieser Aufgabenstellungen findet sich unter A.4. Dabei handelt es sich meist um Probleme, bei denen nur der Ausgangszustand gegeben ist. Mit etwas Kreativität lassen sich jedoch sicherlich noch weitere Aufgaben und Aufgabentypen finden, indem die genannten Aufgaben modifiziert oder abgeschlossene Aufgaben geöffnet werden (vgl. [Leu03b], S. 126ff).

Ein Beispiel für eine offene Aufgabe stellt die in unter „mathematisch Argumentieren“ bereits ausführlich beleuchtete Frage nach der Äquivalenz zweier Knoten dar. Die Aufgabe kann auf unterschiedlichstem Anforderungsniveau und in allen Schuljahren bearbeitet werden. Die Differenzierung erfolgt darüber, welche Knoten für die Aufgabenstellung gewählt werden. Für jüngere Schülerinnen und Schüler und auf niedrigstem Anforderungsniveau können äquivalente Knoten zur Verfügung gestellt werden, die zunächst durch einfaches Ausprobieren an Seilknoten gelöst werden können. Schülerinnen und Schüler ab dem fünften und sechsten Schuljahr werden durch einfache nichtäquivalente Knoten motiviert, heuristische Strategien anzuwenden, indem sie überlegt experimentieren, Diagramme verwenden und einfache Invarianten selbst erkennen. Sie wenden zusätzlich vorgegebene Invarianten an, schließen logisch auf die Lösung des Problems und überprüfen abschließend ihre Lösung auf Plausibilität, wobei sie mögliche Fehler erkennen und korrigieren. Schülerinnen und Schüler ab dem siebten und achten Schuljahr verwenden heuristische Strategien und beschaffen sich die zur Lösung des Problems notwendigen Informationen selbst. Dabei bieten sich ihnen mit dem Einsatz unterschiedlicher Invarianten mehrere Lösungswege an, die die Schülerinnen und Schüler aufgrund der gewonnenen Ergebnisse vergleichen, beurteilen, bewerten und auf Ursachen von möglichen Fehlern hin untersuchen. Schülerinnen und Schüler ab dem neunten und zehnten Schuljahr werden dazu motiviert, eigene Strategien zur Lösung des Problems zu entwickeln. In der Oberstufe setzen die Schülerinnen und Schüler die aus der Mittelstufe gewonnenen Erkenntnisse um, indem sie eine anspruchsvolle offene Aufgabe aus der Knotentheorie selbstständig bearbeiten, eigene Probleme formulieren und die Lösungsideen und Lösungswege, sowie ihre Vorgehensweise beim Finden derselben reflektieren.

Berücksichtigt man die Kriterien, die LEUDERS einem „guten“ Problem für den Mathematikunterricht zuschreibt (vgl. [Leu03b], S. 123), scheinen die in der Aufgabensammlung A.4 vorgestellten Aufgaben durchaus für den Problemlöseunterricht geeignet. Bei der Beschäftigung mit den Aufgaben setzen sich die Schülerinnen und Schüler mit Invarianten, und dadurch mit

einer grundlegenden allgemeinen mathematischen Idee auseinander. Die Problemstellungen fördern individuelles und divergentes Arbeiten, wobei die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit haben, aufgrund der Vielfalt an Invarianten und Repräsentationsmöglichkeiten, unterschiedliche Lösungsansätze auf unterschiedlichem Niveau zu erarbeiten. Die Aufgaben sind leicht verständlich und zugänglich und die Schülerinnen und Schüler haben die Möglichkeit, die Strategien, die für das Lösen der Aufgaben notwendig sind, wie zum Beispiel das Finden von Invarianten oder das systematische Untersuchen von Knoten auf Äquivalenz, eigenständig zu entwickeln. Zusätzlich bewirken die genannten Aufgaben, dass die Schülerinnen und Schüler Motivation oder sogar Faszination für Mathematik entwickeln. Damit genügen die Aufgaben der Knotentheorie allerdings nur einigen wenigen Funktionen, die Problemstellungen im Mathematikunterricht haben können und sollen (vgl. [TKW97], S. 110). Als einführender Problemkontext ist die Knotentheorie nur geeignet, wenn sich weitere topologische Fragestellungen anschließen, was im Mathematikunterricht in der Regel nicht der Fall ist. Es besteht kaum ein Zusammenhang zwischen der Knotentheorie und bisher im Unterricht aufgeworfenen Fragestellungen und mathematischen Inhalten. Lediglich der Umgang mit Invarianten macht einen Gesichtspunkt der mathematischen Methodologie deutlich. Und schließlich fehlt der Knotentheorie ein von den Schülerinnen und Schülern greifbarer Anwendungsbezug. Der Knoten ist zwar ein Alltagsgegenstand, die Frage nach der Äquivalenz zweier Knoten wird sich jedoch in der Regel im Alltagsleben nicht stellen. Die Anwendung von Knoten in der Seefahrt (vgl. [Sos00], S. 14f.) ist sehr weit vom mathematischen Inhalt der Knotentheorie entfernt, die Anwendung in der Biologie, Chemie und Physik (vgl. [Ada95], S. 187ff.) ist für den Mathematikunterricht zu komplex und auch für die Anwendung von Knotentricks sind in der Regel keine topologischen Kenntnisse notwendig.

Unter den genannten Gesichtspunkten erscheinen die Problemstellungen der Knotentheorie zwar für die Schulmathematik geeignet, lassen jedoch vor allem unter dem Aspekt der Funktionalität einige Wünsche offen. Zwar können diese Defizite den Schülerinnen und Schülern durchaus Vorteile bieten (vgl. „Mathematisch modellieren“ und „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“), in der Regel führen sie jedoch dazu, dass für Schülerinnen und Schüler geeignetere Problemkontexte gefunden werden, die dieselben Kriterien wie die Knotentheorie erfüllen, dafür aber wesentlich funktionaler sind. Deshalb möchte ich abschließend noch ein wichtiges Argument für den Einsatz von Problemstellungen der Knotentheorie in der Schule anführen, dem viele Problemstellungen aus anderen Themengebieten nicht genügen.

Die Knotentheorie bietet aufgrund ihrer Anschaulichkeit den Einblick in für

Schülerinnen und Schüler verständliche offene Probleme der aktuellen Forschung (vgl. Offenen Fragen in [Ada95]). Dadurch, dass die Schülerinnen und Schüler erfahren, dass die Mathematik keine Antwort auf scheinbar einfache anschauliche Probleme findet, wird ihnen ein realistisches Bild der Mathematik präsentiert. Bei der Beschäftigung mit Knoten können sie diese offenen Probleme aktiv erleben. Erhalten die Schülerinnen für zwei Knoten dieselbe Invariante und gelingt es ihnen nicht, diese beiden Knoten mit Hilfe von Reidemeister-Bewegungen ineinander überzuführen, werden sie feststellen müssen, dass sie keine Aussage über die Äquivalenz der Knoten treffen können und das, obwohl dieselbe Strategie bei anderen Knotenpaaren erfolgreich war. Sie lernen somit nicht nur, dass nicht jedes Problem eine eindeutige mathematische Lösung hat, sondern auch, dass Lösungswege, die bei einem analogen Problem zu einer Lösung geführt haben, zu einem anderen Zeitpunkt versagen können. Gleichzeitig sehen sie an der historischen Entwicklung der Knotentheorie, dass selbst Hobbymathematiker (vgl. [Epp99], S. 156 und Abb. 55) und damit die Schülerinnen und Schüler selbst Ideen zur Lösung dieser offenen Probleme beitragen können. Da authentische innermathematische Probleme in der gegenwärtigen Schulmathematik zugunsten von anwendungsorientierter, alltagsbezogener Mathematik häufig zurückstehen müssen, kann dieses Argument ein entscheidendes Argument für die Behandlung von Knotentheorie im problemorientierten Unterricht sein.

Mathematisch modellieren Unter mathematischem Modellieren wird die Beschäftigung mit realen Fragestellungen unter Einsatz von Mathematik verstanden. Durch das Modellieren wird ein anwendungsorientierter Mathematikunterricht in die Schulmathematik integriert. Der Begriff des Modellierens hat allerdings nicht erst mit den Bildungsstandards den Einzug in die Schulmathematik gefunden. Auch in älteren Lehrplänen wurde das Anwenden von Mathematik in Sachsituationen gefordert. Anwendungsorientierte Mathematik wird also zunächst als angewandte Mathematik verstanden, wobei es bei der Anwendung um die Beziehung zwischen Welt und Mathematik geht. Für das Unterrichten von angewandter Mathematik gibt es viele Argumente. Anwendungsbezüge sollen Schülerinnen und Schülern beim Bewältigen und Verstehen von Situationen des Alltagslebens helfen. Sie fördern den Erwerb von mathematischem Orientierungswissen, das notwendig ist, um als mündiger Bürger der Gesellschaft dazu fähig zu sein, die Welt mit mathematischen Mitteln zu erfassen (vgl. [TKW97], S. 131).

„Nur wer selbst einmal erlebt hat, auf welche Weise in der Mathematik Modelle zur Beschreibung der Wirklichkeit entstehen, welche Leistungen sie erbringen, aber auch welche Grenzen sie

haben, kann etwas besser die Art und Weise einschätzen, wie Resultate zu bewerten sind, die mit Hilfe von Mathematik gewonnen werden - das reicht von der Wettervorhersage bis zu Risikoangaben zur Kernenergie.“ ([LM05], S. 1f.)

Des Weiteren wird ein möglichst authentisches Bild der Bedeutung der Mathematik für unser kulturelles und gesellschaftliches Leben vermittelt. Indem der von den Schülerinnen und Schülern subjektiv wahrgenommenen Bedeutungslosigkeit der Mathematik die in unserer Gesellschaft objektiv zunehmende Mathematisierung gegenübergestellt wird, wird dem „Relevanz-Paradoxon der Mathematik“ (vgl. [TKW97], S. 132) entgegengewirkt. Zusätzlich fördern die Anwendungsbezüge der Mathematik im Schulunterricht die Motivation der Schülerinnen und Schüler und bieten Raum für den Erwerb von weiteren allgemeinen mathematischen Qualifikationen (vgl. „Probleme mathematisch lösen“, „Mathematisch argumentieren“ und „Kommunizieren“).

Die angewandte Mathematik genügt damit vor allem den emanzipatorischen Forderungen an den Mathematikunterricht. In der aktuellen fachdidaktischen Diskussion wird jedoch angemerkt, dass die Gefahr besteht, dass die wissenschaftsorientierte Mathematik vernachlässigt wird.

„Eine genauere Analyse der „anwendungsorientierten“ Aufgaben, zeigt aber erstens, dass es sich vielfach um Pseudoanwendungen handelt, und zweitens, dass für die Bearbeitung der Aufgaben eine oberflächliche Beschäftigung mit Mathematik ausreicht.“ ([Wit05], S. 11)

WITTMANN schlägt als Alternative vor, an den Schulen eine „anwendungsfähige Mathematik“ ([Wit05], S. 16) zu etablieren, die theoretische Erweiterungen und Vertiefungen mit einschließt. Dieser Vorschlag deckt sich mit den Vorstellungen von LEUDERS und MAASS, die der Schulmathematik die Aufgabe zuweisen, „in einem langfristigen Prozess Modellierungskompetenzen und ein angemessenes Bild der verschiedenen Facetten der Mathematik zu vermitteln“ (vgl. [LM05], S. 6). LEUDERS und MAASS greifen dabei die Ideen von FREUNDETHAL auf, der fordert, „daß der Schüler nicht angewandte Mathematik lernt, sondern lernt, wie man Mathematik anwendet“ ([TKW97], S. 133). In diesem Sinne begründete FREUNDETHAL die „Realistic Mathematics Education (RME)“ ([Wes03], S. 152), nach der die Schülerinnen und Schüler die Gelegenheit bekommen sollen, Mathematik wieder neu nachzuerfinden. Im Folgenden werde ich zeigen, dass die Knotentheorie sowohl den wissenschaftsorientierten als auch den emanzipatorischen Ansprüchen an den Mathematikunterricht genügt und dass diese Ansprüche innerhalb der allgemeinen mathematischen Kompetenz „Mathematisch modellieren“ erfüllt werden

können.

Die Kultusministerkonferenz verlangt als Teilziele des Modellbildens das Übersetzen der zu modellierenden Situation in mathematische Begriffe und Strukturen, das Arbeiten in den jeweiligen mathematischen Modellen und das Interpretieren und Prüfen der Ergebnisse in der jeweiligen Realsituation (vgl. [Kul03a], S. 12). Dies entspricht im wesentlichen dem „Modellierungskreislauf“ ([LM05], S. 3), der auch einer anwendungsfähigen Mathematik, wie Knotentheorie, genug Spielraum lässt. Ich beschränke mich hier auf die allgemeine Darstellung der Modellierung eines Knotens, ohne explizit auf ein Aufgabenbeispiel einzugehen, da Teile des mathematischen Modellierens von Knoten oder das Verwenden von mathematischen Modellen des Knotens in allen Aufgaben der Knotentheorie (vgl. Anhang A) wiederzufinden sind.

Der Modellbildungsprozess vollzieht sich in vier Schritten (vgl. [TKW97], S. 121ff.). Zunächst wird aus einem der Realität entstammenden Problem ein Realmodell geschaffen, indem die Schülerinnen und Schüler die Knoten, die sie aus dem Alltag kennen, für die Problemstellung angemessen abstrahieren, idealisieren, strukturieren und vereinfachen. Ein geeignetes Realmodell ist der intuitiv eingeführte mathematische Knoten (vgl. Kapitel 2.1). Die Schülerinnen und Schüler werden bei dem Experimentieren mit Knoten schnell feststellen, dass die Handhabung von Knoten in offenen Fäden oder Seilen zu Problemen führt, da sich jeder Knoten zu einem Unknoten auflösen lässt, wenn die Enden nicht festgehalten werden. Das Festhalten der Enden führt schließlich zu einem geschlossenen Knoten. Es hängt von den Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler ab, ob die beliebige Dehn- und Zusammenziehbarkeit und die Vernachlässigbarkeit der Dicke des Knotens stillschweigend vereinbart oder ob explizit darauf eingegangen wird. Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, selbst zu erkennen und zu entscheiden, welche Genauigkeit sinnvoll ist (vgl. [Wes03], S. 156).

Im zweiten Schritt erfolgt die eigentliche Modellbildung, indem das Realmodell mathematisiert wird. „Unter Mathematisierung versteht man die Übersetzung eines umgangssprachlich formulierten Realmodells in ein formales mathematisches Modell, beispielsweise mit Hilfe von Mengen, Funktionen, Graphen, Matrizen, Vektoren u.a.m.“ (vgl. [TKW97], S. 122). Die Knotentheorie bietet eine Vielzahl an mathematischen Modellen. Dazu zählen die Knotenprojektionen, Knotendiagramme, polygonale Knoten, Knoten als Zöpfe, die Reidemeister-Bewegungen und die verschiedenen Knoteninvarianten. Die Schülerinnen und Schüler erfahren hier, wie vielfältig und unterschiedlich mathematische Modelle sein können. Dies reicht von der ikonischen Darstellung des Knotens und der Knotendeformationen bis hin zur Algebraisierung der Knoten in leistungsstarke Invarianten. Die Schülerinnen und Schüler lernen nicht nur, dass es für jede Problemstellung ein anderes

mathematisches Modell geben kann, sondern auch, dass für dasselbe Problem konkurrierende mathematische Modelle existieren, zwischen denen eine Auswahl nicht leicht fällt (vgl. [LM05], S. 2), und dass verschiedene Modelle kombiniert werden können. Sie werden auch die Erfahrung machen, dass ein mathematisches Modell durchaus mit dem Realmodell übereinstimmen kann. Je nach Problemstellung können die Schülerinnen und Schüler hier bekannte mathematische Modelle einsetzen oder neue Modelle, wie zum Beispiel neue Invarianten, entwickeln.

Der dritte Schritt dient dem Erarbeiten einer mathematischen Lösung. Es handelt sich dabei um einen rein innermathematischen, deduktiven Schritt, an dessen Ende ein Ergebnis für die Problemstellung stehen soll. Dieser Schritt wird auch als „rechnen“ (vgl. [Wes03], S. 157) bezeichnet, da bei vielen Modellbildungsaufgaben im Mathematikunterricht die Erarbeitung einer mathematischen Lösung in der Regel aus Berechnungen besteht. In der Knotentheorie fällt unter diesen Schritt, neben dem Berechnen von Invarianten, auch das zeichnerische Ermitteln von Invarianten und das Durchführen von Reidemeister-Bewegungen.

Im vierten Schritt werden die gewonnenen Ergebnisse wieder in die Realität zurückübersetzt und dabei interpretiert und validiert. Hier werden die Schülerinnen und Schüler die Erfahrung machen, dass der Grundsatz, dass sich analoge Situationen durch identische Modelle beschreiben lassen, bei der Knotentheorie nicht unbedingt zutrifft. Zum Beispiel kann ein Modell, das bei dem Vergleich zweier Knoten wirksam ist, bei dem Vergleich zweier anderer Knoten kein Ergebnis bringen. Gleichzeitig sehen die Schülerinnen und Schüler, dass ein Modell, das zu keinem Ergebnis führt, nicht vollständig nutzlos ist, sondern vielmehr als Entscheidungshilfe bei der Verbesserung des Modells oder bei der Wahl eines neuen Modells dient. Indem die Schülerinnen und Schüler das Modell kritisch beurteilen, verbessern sie ihre Reflexionsfähigkeit und lernen mit Situationen umzugehen, in denen ihnen keine ausreichenden Mittel zur Verfügung stehen, um eine gegebene Problemstellung zu lösen.

Beginnend mit der Frage nach der Gleichheit zweier einfacher Knoten bietet die Knotentheorie eine Vielzahl an Aufgabenstellungen (vgl. Anhang A), die es den Schülerinnen und Schülern aller Schuljahre ermöglicht, den Modellbildungsprozess je nach Vorkenntnissen zu verfolgen, zu erlernen und zu vertiefen und damit mathematisches Orientierungswissen zu erlangen. Unabhängig vom Schuljahr gibt es je nach Wahl der Knoten sowohl Aufgaben, die leicht zu lösen und damit ideal für den Einstieg in das Modellieren sind, als auch Aufgaben, die ein komplexeres mathematisches Modell der Knoten erfordern. Es stehen sowohl Aufgaben, die einen Einzelschritt des Modellbildens näher beleuchten, als auch komplexe offene Aufgaben, an denen der

gesamte Modellbildungsprozess geübt und durchgeführt werden kann, zur Verfügung. Gleichzeitig können die Schülerinnen und Schülern bei einer offenen Aufgabenstellung (vgl. „Probleme mathematisch lösen“) mit unterschiedlich anspruchsvollen Modellen arbeiten. Dadurch wird sowohl den leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern ermöglicht, eine adäquate Lösung für das Problem zu finden, als auch den leistungsstarken Schülerinnen und Schülern eine Herausforderung geboten. Die Knotentheorie genügt damit der selbstdifferenzierenden Eigenschaft der Modellbildung (vgl. [Maa05]). Nicht zuletzt sind die Aufgaben zu nennen, zu denen es bisher noch keine Lösung gibt. Da der Zugang zur Knotentheorie relativ leicht fällt, müssen die Lehrenden immer damit rechnen, dass die Schülerinnen andere, neue und bessere Lösungen für Probleme erarbeiten, oder auch sinnvolle Lösungsvorschläge für ungelöste Probleme finden.

Ein hier zu äußernder Kritikpunkt ist, dass sich im Alltag selten Gelegenheiten bieten, in denen ein Knoten mathematisiert werden muss. Dagegen ist zu sagen, dass zum Einen durchaus Anwendungsbeispiele existieren (vgl. [Ada95], S. 187ff [BS00], S. 371), die allerdings für jüngere Schülerinnen und Schüler schwer zugänglich sind, und zum Anderen auch herkömmliche Anwendungsaufgaben oft wenig alltagsnah sind, da sie häufig stark idealisiert sind und mathematische Inhalte lediglich in den Mantel der Anwendung einkleiden (vgl. [Wes03], S. 150). Ich sehe den genannten Kritikpunkt vielmehr als Vorteil. Am Beispiel der für sie eher ungewöhnlichen, Mathematik der Knoten sehen die Schülerinnen und Schüler, dass, wenn es notwendig sein sollte, jede Realsituation mathematisiert werden kann. Indem sie erfahren, dass die Mathematik aus der Schule im Laufe ihres Lebens durchaus Anwendung finden kann, erschließt sich ihnen der Sinn der Mathematik neu. Damit genügt die Knotentheorie sowohl den wissenschaftsorientierten als auch den emanzipatorischen Forderungen an die Modellbildung und nicht zuletzt einem der wichtigsten Lernziele, „dass Mathematik nicht nur am unmittelbaren Nutzen orientiert, sondern dass auch reine Mathematik sinnvoll ist und Freude bereiten kann“ ([Wes03], S.156). Gerade der letztgenannte Aspekt wurde, mit Blick auf die Abneigung gegen das Fach Mathematik, die in einem großen Teil unserer Gesellschaft vorherrscht (vgl. [Vol01], S. 2), bisher von vielen Mathematiklehrerinnen und Lehrern vernachlässigt.

Abschließend möchte ich noch eine Möglichkeit nennen, Zöpfe für Schülerinnen und Schüler mit einem gewissen Anwendungsbezug auszustatten. Zur Einführung der Zöpfe können die Schülerinnen und Schüler sich mit Flachbandkabeln aus Computern beschäftigen. Flachbandkabel gibt es sowohl mit parallelen als auch mit teilweise verdrillten Leitungen, so dass ihre graphische Darstellung leicht zur Darstellung von Zöpfen und der Zopfgruppen führt (vgl. [Old04]).

Mathematische Darstellungen verwenden Das Verwenden von mathematischen Darstellungen entspricht dem didaktischen Prinzip der Anschauung (vgl. [Vol01], S. 122) bzw. dem Prinzip der Variation der Darstellungsebenen (vgl. [TKW97], S. 85). Die Schülerinnen und Schüler bzw. die Lehrperson sollen zwischen den Repräsentationsebenen „enaktiv“, „ikonisch“ und „symbolisch“ wechseln, indem sie sich in der jeweiligen Lernsituation für die in dieser Situation oder für die zu diesen Zweck anschaulichste Form der Darstellung eines mathematischen Objektes entscheiden. Neben dem Erlernen der genannten didaktischen Prinzipien, führt die Kultusministerkonferenz noch weitere Gesichtspunkte an, die in diesem Zusammenhang im Rahmen des Mathematikunterrichts Berücksichtigung finden sollen. Dazu gehört sowohl das Anwenden, Interpretieren und Unterscheiden verschiedener Formen der Darstellung, als auch das Herstellen von Beziehungen zwischen den Darstellungsformen (vgl. [Kul03a], S. 12).

Nach dem EIS-Prinzip nach BRUNER verringert sich die Anschaulichkeit im Mathematikunterricht zunehmend von der handlungsorientierten (enaktiven) über die bildhaft-analoge (ikonische) zur sprachlich-symbolischen Darstellungsebene hin. Aufgrund dieses Prinzips ist Mathematikunterricht häufig so aufgebaut, dass die Schülerinnen und Schüler sich zunächst handlungsorientiert mit dem jeweiligen Unterrichtsgegenstand auseinandersetzen, bis sie zu einer formalen, abstrakten Darstellung in der Lage sind, die von da an die enaktive und symbolische Form der Darstellung wenn möglich vollständig ersetzt (vgl. [RR00], S. 81). Dies ist nicht nur nicht konform mit den von der Kultusministerkonferenz genannten Aspekten, sondern entspricht auch nicht der Realität des Mathematik Betreibens.

Bei der Betrachtung der Darstellungsformen der Knotentheorie wird deutlich, dass die drei genannten Darstellungsebenen gleichberechtigt nebeneinanderstehen und, je nach Situation und verfolgtem Ziel, verschiedene Vor- und Nachteile aufweisen. Gleichzeitig stehen sie nicht isoliert, sondern können von den Schülerinnen und Schülern aller Schuljahre beliebig kombiniert werden, um eine vielschichtige Beschäftigung mit den Knoten zu ermöglichen (vgl. „Mathematisch argumentieren“, „Probleme mathematisch lösen“ und „Mathematisch modellieren“). Die enaktive Beschäftigung mit Knoten aus Seilen, Drähten oder Verlängerungskabeln ermöglicht zunächst ein ungehindertes Verformen der Knoten. Gelingt es den Schülerinnen und Schülern einen Knoten in einen anderen zu überführen, lässt sich mit dieser Darstellungsform allerdings schwer nachvollziehen, welche Deformationen der Knoten durchlaufen hat. Schwierig wird es, wenn der Knoten nach nicht erfolgreicher oder auch nach erfolgreicher Umformung in seinen Ausgangszustand zurückversetzt werden muss oder soll. Ein Knotendiagramm hat, was den ungehinderten Umgang mit Knoten betrifft, zwar deutliche Nachteile,

ermöglicht den Schülerinnen und Schülern aber, die von ihnen durchgeführten Schritte nachzuvollziehen. Die Schülerinnen und Schüler werden schnell feststellen, dass eine flexible Kombination der beiden Darstellungsformen den größtmöglichen Nutzen bringt. Die enaktive und ikonische Darstellungsform der Knoten stößt jedoch an ihre Grenzen, zum Beispiel wenn sich zwei Knoten nicht ineinander überführen lassen. Hier ist ein Wechsel in die symbolische Darstellungsebene unumgänglich. Dazu zählt eine der wichtigsten Darstellungsformen der Knotentheorie, das formale Algebraisieren eines geometrischen Sachverhaltes, in diesem Fall das Bestimmen von Knoteninvarianten aus den Knoten. Das Algebraisieren ist nur eine von vielen Möglichkeiten, Sachverhalte in eine mathematische Fachsprache zu übersetzen. Diese Möglichkeiten werden unter dem Oberbegriff des Formalisierens zusammengefasst. Daneben beinhaltet die sprachlich-symbolische Darstellungsebene noch einen weiteren Aspekt, das Verbalisieren (vgl. [TKW97], S. 34f.). „Das umgangssprachliche Reden [...] über formalisierte, mathematische Sachverhalte ist wichtig zur Verständniskontrolle. [...] Verbalisierte Zusammenhänge werden leichter behalten und können leichter reproduziert, transformiert und angewendet werden“ ([TKW97], S. 35). Verbalisierung (vgl. „Kommunizieren“) ist damit neben dem Enaktivieren und dem Ikonisieren eine wichtige Darstellungsebene, auf der sich Schülerinnen und Schüler intensiv mit Mathematik und damit auch der Knotentheorie auseinandersetzen können. Haben die Schülerinnen ausreichend Erfahrung im Umgang mit enaktiven, ikonischen, verbalen und formalen Darstellungsformen gesammelt, sollten sie in der Lage sein, die erlernten Darstellungsformen zueinander in Beziehung zu setzen, zu beurteilen und bei der Beschäftigung mit der Knotentheorie sinnvoll anzuwenden. Die Schülerinnen und Schüler erfahren dabei nicht nur, dass ein bedachter Wechsel zwischen den Darstellungsebenen notwendig ist, sondern lernen auch die Darstellungsformen geschickt zu kombinieren. Zusätzlich steht den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit offen, sich weitere Darstellungsformen zu erarbeiten bzw. selbstständig zu entwickeln. Insgesamt lernen die Schülerinnen und Schüler, verschiedene mathematische Darstellungsformen und Darstellungsebenen auf unterschiedlichstem Anforderungsniveau zu verwenden.

Ein Beispiel für die Verwendung verschiedener Darstellungen auf mittlerem Anforderungsniveau ist der Modellbildungsprozess (vgl. „Mathematisch modellieren“) innerhalb der Aufgabe, zwei komplexe Seilknoten auf ihre Äquivalenz hin zu überprüfen. Zunächst zeichnen die Schülerinnen und Schüler die Knotendiagramme (Ikonisierung) der Seilknoten und verschaffen sich einen Überblick über die darin enthaltenen Informationen. Dabei treffen sie eine Entscheidung darüber, welche Knoteninvarianten berechnet werden sollen, um eine mögliche Nichtäquivalenz der Knoten zu überprüfen, und be-

gründen diese Entscheidung (Verbalisieren). Anschließend werden die Knoteninvarianten berechnet (Formalisierung). Aufgrund ihrer Berechnungen, entscheiden die Schülerinnen und Schüler, ob eine Nichtäquivalenz vorliegt oder ob eine Äquivalenz nicht ausgeschlossen werden kann. Auch diese Entscheidung wird begründet (Verbalisierung). Kann aufgrund der Berechnungen eine Äquivalenz der Knoten nicht ausgeschlossen werden, bedienen sie sich der Seilknoten (Enaktivierung) und versuchen, die gegebenen Knoten ineinander zu überführen. Dabei nutzen sie Knotendiagramme (Ikonisierung), um die durchgeführten Versuche zu dokumentieren.

Das Beispiel zeigt, dass die Knotentheorie eine überlegte Variation und eine kreative Kombination der Darstellungsebenen und Darstellungsformen erfordert und fördert. Gleichzeitig dient sie als angemessenes Beispiel dafür, dass die Darstellungsebenen nicht zwingend in hierarchischer Beziehung zueinander stehen. Damit unterscheidet sie sich von vielen Unterrichtsthemen, die die Variation der Darstellungsebenen als den Wechsel zwischen starr hierarchisch gegliederten und voneinander isolierten enaktiven, ikonischen und symbolisch-formalen Darstellungsebenen erscheinen lassen. Die Knotentheorie leistet einen Beitrag dazu, dass sich das in vielen Situationen zwar sinnvolle, aber nicht immer optimale EIS-Prinzip nach BRUNER in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler festsetzt. Die Schülerinnen und Schüler werden dadurch in die Lage versetzt, eine kreative und authentische Mathematik zu betreiben und unvoreingenommen mit mathematischen Sachverhalten auf verschiedenen Darstellungsebenen zu experimentieren.

Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen Die allgemeine verhaltensbezogene Kompetenz des Umgehens mit symbolischen, formalen und technischen Elementen bedarf zunächst einer Begriffsklärung. Im vorangegangenen Abschnitt wurde der symbolischen Darstellungsebene sowohl das Verbalisieren als auch das Formalisieren zugeordnet. Deshalb erscheint es zunächst unklar, warum hier symbolische und formale Elemente der Mathematik offensichtlich als unterschiedliche Sachverhalte betrachtet werden. Eine Auflösung dieses Widerspruchs ist in den von der Kultusministerkonferenz formulierten Teilaspekten dieser Kompetenz zu suchen.

Sich auf die strittigen Punkte beziehende Teilkompetenzen sind das Arbeiten mit Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Diagrammen und Tabellen und das Wechseln zwischen symbolischer und natürlicher, sowie formaler Sprache und Umgangssprache (vgl. [Kul03a], S. 12). Aufgrund der genannten Beispiele besteht die Versuchung, Diagramme und Tabellen als symbolische Elemente zu verstehen, und Variablen, Terme, Gleichungen und Funktionen

als formale Elemente gelten zu lassen. Dies widerspricht jedoch der Begriffsverwendung in der fachdidaktischen Literatur, die Diagramme und Tabellen als bildhaft-analogue und nicht als symbolische Darstellungsformen benennt (vgl. [TKW97], S. 36). Weniger eindeutig ist die fachdidaktische Literatur hingegen, wenn es um den Begriff der Formalisierung und der formalen Darstellung geht. Bei TIETZE, KLIKA und WOLPERS wird unter der sprachlich-symbolischen Ebene die umgangssprachliche, die fachsprachliche und die streng formale Darstellung unterschieden (vgl. [TKW97], S. 56 und „Mathematische Darstellungen verwenden“). Gleichzeitig wird unter dem Lernziel des Formalisierens die Darstellung in einer mathematischen Fachsprache verstanden, die zwar bewusst exakt, aber nicht zwingend streng formal sein sollte. „Die möglichst formale und elegante Darstellung mathematischer Sachverhalte des Lehrers in Anlehnung an die Universitätsmathematik hat nichts mit dem Lernziel Formalisieren zu tun“ ([TKW97], S. 35). Aber genau diese formale und elegante Darstellung mathematischer Sachverhalte scheint mit dem Begriff der „formalen“ Elemente gemeint zu sein. Zusammengefasst soll im Folgenden unter dem Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik der Umgang mit ikonischen, und damit bildhaft-analogen, mit sprachlich-formalen, sowie mit technischen Elementen der Mathematik verstanden werden. Dazu gehört neben den schon genannten Teilaspekten die Anwendung von Lösungs- und Kontrollverfahren, sowie der Einsatz von mathematischen Werkzeugen (vgl. [Kul03a], S. 12).

Versteht man unter dem Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik das Anwenden und Interpretieren der genannten mathematischen Elementen, bietet die Knotentheorie auf den ersten Blick den Schülerinnen und Schülern nicht viel Raum für diese Kompetenz. Variablen, Gleichungen und Funktionen sind Bestandteil eines für Schülerinnen und Schüler weniger zugänglichen Teils der Knotentheorie. Lediglich den Umgang mit den Invarianten kann man als Umgang mit Termen bezeichnen, deren Werte berechnet und interpretiert werden müssen. Diagramme im herkömmlichen Sinn sind ebenfalls kein Bestandteil der vorgestellten Knotentheorie und Knotentabellen erscheinen zunächst wenig interpretationswürdig. Die vorgestellte Knotentheorie kann mit der, von den Schülerinnen und Schülern gewohnten, formalen Sprache schwer erfasst werden, vielmehr müssen neue Fachbegriffe und neue formale Schreibweisen erarbeitet werden. Die herkömmlichen, im Laufe des Mathematikunterrichts gelehrt, Kontroll- und Lösungsverfahren greifen in der Knotentheorie nicht. Auch hier müssen neue Verfahren gelernt oder erarbeitet werden. Das Nutzen der im Unterricht üblichen mathematischen Werkzeuge wie Zirkel, Lineal, Geodreieck, grafikfähiger Taschenrechner, Computeralgebrasysteme und anderer Computersoftware, sowie Formelsammlungen führen bei der Beschäftigung

mit der Knotentheorie zu keinem Ergebnis. Es existiert zwar ein englischsprachiges Computerprogramm, das in der Lage ist, Knoten zu visualisieren (vgl. [Sch]). Aufgrund einer mangelhaften Bedienungsanleitung benötigt die Beschäftigung mit diesem Programm jedoch eine lange Einarbeitungszeit. Die genannten Schwächen der Knotentheorie sind jedoch auch gleichzeitig ihre Stärken. Die Schülerinnen und Schüler erfahren und reflektieren die Grenzen der Nutzung bisher verwendeter mathematischer Werkzeuge und haben damit die Möglichkeit, sich von dem herkömmlichen, alltäglichen Umgang mit bildhaft-analogen, sprachlich-formalen und technischen Elementen der Mathematik zu befreien und einen neue, andere Sicht auf den Umgang mit Mathematik zu entwickeln. Dabei tun sie das, was Mathematiker zu Beginn der Entwicklung der Knotentheorie auch getan haben. Sie experimentieren mit Knoten, Knotendiagrammen und Invarianten und gewinnen neue Informationen aus den Knotentabellen oder stellen selbst Knotentabellen zusammen. Sie erlernen die sprachlich-symbolische Darstellung von Knoten und Zöpfen oder entwickeln eigenständig Notationen. Im Umgang mit der Knotentheorie erlernen die Schülerinnen und Schüler eine neue Fachsprache und bilden selbstständig und kreativ Begriffe, zum Beispiel durch die Benennung einer selbst entwickelten Invariante (vgl. „Kommunizieren“). Für die gestellten Aufgaben entwickeln sie zweckmäßige Kontroll- und Lösungsverfahren, indem sie verschiedene Darstellungsformen verwenden (vgl. „Mathematische Darstellungen verwenden“). Das notwendige Wissen erarbeiten sie sich selbstständig oder recherchieren in zur Verfügung gestellte Skripten, in einem der zahlreichen, zum großen Teil auch für junge Schülerinnen und Schüler verständlichen, populärwissenschaftlichen Büchern und Artikeln über Knotentheorie oder im Internet. Und es ist letztlich nicht auszuschließen, dass die Schülerinnen und Schüler bisher verwendete symbolische, formale und technische Elemente kreativ in die Knotentheorie transferieren. Damit bietet die Knotentheorie den Schülerinnen und Schülern aller Schuljahre eine Möglichkeit, auf unterschiedlichstem Anforderungsniveau einen authentischen Umgang mit der Mathematik und ihren symbolischen, formalen und technischen Elementen zu erleben und zu betreiben.

Kommunizieren Bezüglich Mathematik lassen sich zwei Arten von Kommunikation unterscheiden. Zum Einen kann mit Mathematik, zum Anderen über die Mathematik kommuniziert werden. Unter Kommunizieren mit der Mathematik wird das Kommunizieren mit Zahlen und Formen verstanden, das im Alltag der Menschen über Jahrhunderte hinweg eine große Rolle spielte und auch noch heute spielt. Mit dem Kommunizieren über Mathematik wird das Verstehen und Verwenden der mathematischen Fachsprache

gemeint. Beide Formen der mathematischen Kommunikation waren und sind für das Teilhaben am Leben in der Gesellschaft von grundlegender Bedeutung. Mathematische Sprachkompetenz ist wie jegliche Sprachkompetenz eine Schlüsselkompetenz und damit eine elementare Fähigkeit zur Erschließung der Umwelt. Ein Mangel an mathematischen Kenntnissen und Fähigkeiten, wie das Nichtverstehen der mathematischen Formelsprache, bedeutet den Ausschluss von wichtigen, nicht nur rein mathematischen Erkenntnissen (vgl. [Vol01], S. 15f.).

Um die Beschränkung des mathematischen Wissens auf einen geringen Teil der Bevölkerung und damit die Herausbildung einer Herrschaftsschicht zu vermeiden, sollen die Schülerinnen und Schüler die Grundlagen der mathematischen Sprache erlernen. Dazu gehört das Dokumentieren und verständliche Darstellen und Präsentieren von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen unter Nutzung geeigneter Medien, das adressatengerechte Verwenden der Fachsprache, sowie das Verstehen und Überprüfen von Äußerungen Anderer und von Texten zu mathematischen Inhalten (vgl. [Kul03a], S. 12).

Der Erwerb dieser Kompetenzen ist eng verknüpft mit den bisher angeführten Kompetenzen und wird im Rahmen derselben in allen mathematischen Bereichen erworben. Dabei ist zu beachten, dass die Bedeutung von Sprache, auch von mathematischer Sprache, nicht gelehrt werden kann, sondern auf individueller Erfahrung basiert. Die Bedeutung wird erst im Verlauf einer Kommunikation von den Kommunizierenden konstruiert, indem sie eine gemeinsame Denkebene anlegen. Deshalb ist es wichtig, dass sowohl zwischen den Schülerinnen und Schülern und der Lehrkraft, als auch unter den Schülerinnen und Schülern selbst, eine beständige mündliche und schriftliche Kommunikation installiert und aufrecht erhalten wird, in deren Rahmen die genannten Ziele verfolgt werden (vgl. [Huß03]).

Der Teilbereich der Knotentheorie, der für den Schulunterricht geeignet ist, ist dadurch gekennzeichnet, dass sich die verwendeten Begriffe nur geringfügig mit den herkömmlichen, im Schulunterricht verwendeten Begriffen decken. Für die Bearbeitung der Knotentheorie sind zunächst kaum Fachbegriffe notwendig. Dies hat den Nachteil, dass nur wenige Begriffe aus bisherigen Inhalten auf die Knotentheorie übertragen werden und werden können. Der Vorteil besteht darin, dass die Knotentheorie Schülerinnen und Schülern aller Schuljahre auf unterschiedlichstem Anforderungsniveau die Möglichkeit bietet, die Sprache der Knotentheorie aktiv nachzuerfinden (vgl. [Huß03], S. 64ff.). Knoten, Knotendeformationen, Reidemeister-Bewegungen oder Knoteninvarianten bieten sich dazu an, von den Schülerinnen und Schülern neu benannt und beschrieben zu werden. Dabei einigen sich die Schülerinnen und Schüler auf gemeinsame Vokabeln, Symbole und Notationen, die eine mathematische Kommunikation zwischen ihnen ermöglichen. Durch die eigenständige

Begriffsbildung werden die Schülerinnen und Schüler motiviert, eine exakte und verständliche Definition dieser Begriffe zu entwickeln. Dadurch erfahren sie unmittelbar, ob sie ein ausreichendes Verständnis für die Sachverhalte, die von den Begriffen umschrieben werden, entwickelt haben. Die Aufgabe der Lehrperson ist es, diesen Prozess reflektierend zu unterstützen. „Metakognition und Metakommunikation sind wichtige Bausteine für ein sprachlich kommunizierbares fundiertes Verständnis“ ([Huß03], S. 75). Ist die Bedeutung der selbstgewählten Begriffe allen Schülerinnen und Schülern hinreichend bekannt, stellt es kein Problem dar, die in der Fachliteratur verwendeten Begriffe mit den neu gebildeten Begriffen zu verknüpfen.

Die mathematische Sprache besteht aber nicht nur aus Fachbegriffen für spezielle Inhalte, sondern schließt auch eine allgemeine mathematische Grammatik mit ein, die sich unter anderem auf den Aufbau von Argumentationen oder auf das Dokumentieren, Darstellen und Präsentieren von Ergebnissen bezieht. Die Schülerinnen und Schüler haben die Möglichkeit, am Beispiel der Knotentheorie Teile dieser Grammatik neu zu erlernen und anzuwenden, oder die im bisherigen Unterricht erlernte mathematische Sprache in einen neuen Kontext zu transferieren, um sie dort zu vertiefen. Vor allem die zuletzt genannte Transferleistung trägt dazu bei, das Verständnis für mathematische Sprache zu überprüfen und zu festigen.

3.3 Knotentheorie in der Institution Schule

Im Abschnitt 3.2 wurde gezeigt, dass die Knotentheorie den Ansprüchen der allgemeinen mathematischen Kompetenzen genügt. Weiterhin wurden Gründe genannt, warum sie auch im inhaltlichen Kompetenzbereich Platz finden kann. Leider ist die Knotentheorie kein Bestandteil der Curricula des Unterrichtsfaches Mathematik. Es haben sich einige Aspekte herausgestellt, nach denen es sinnvoll wäre, die Knotentheorie zusätzlich zu den herkömmlichen Unterrichtsinhalten in die Schulmathematik zu integrieren. Nun stellt sich die Frage, wie dies geschehen kann. Da der eigentliche Mathematikunterricht mit den herkömmlichen Inhalten meist vollständig ausgelastet ist, muss auf Strukturen zurückgegriffen werden, die in erster Linie die allgemeinen mathematischen Kompetenzen fördern, deren fachliche Inhalte jedoch mehr oder weniger frei gewählt werden können. Dazu zählen Mathe-AG, Facharbeit und Projekt. Im Folgenden werde ich überprüfen, ob die Knotentheorie in diese Bereiche sinnvoll integriert werden kann und welche Schülerinnen und Schüler damit erreicht werden.

3.3.1 Mathe-AG

Eine Mathe-AG ist ein Angebot, im Rahmen dessen interessierte Schülerinnen und Schüler sich über den eigentlichen Mathematikunterricht hinaus mit Mathematik beschäftigen können. Die Schülerinnen und Schüler können in der Mathe-AG unter anderem den Unterrichtsstoff vertiefen oder sich mit mathematischen Disziplinen beschäftigen, die nicht Bestandteil des Mathematikunterrichts sind. Das Erlangen von neuem inhaltlichem Wissen dient in einer Mathe-AG in erster Linie dem Erwerb von allgemeinen mathematischen Fähigkeiten. Dazu gehören das Erlernen von heuristischen Vorgehensweisen und mengentheoretisch-logischen Grundlagen zur Beweisführung, sowie das Entwickeln der Fähigkeit zu selbstständigem Wissenserwerb. Um dies bestmöglichst zu fördern, beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler alleine oder in Gruppen mit Aufgaben, die einem ihren Fähigkeiten angemessenen Anforderungsniveau entsprechen. Die Lehrkraft hat die Funktion, den Lernprozess zu unterstützen, indem sie die Aufgaben mit den Schülerinnen und Schülern bespricht und diese zur Reflektion ihrer Vorgehensweisen motiviert (vgl. [Kön97], S. 50).

Neben der Mathe-AG existieren weitere außerunterrichtliche Formen der Förderung mathematikbegabter Schülerinnen und Schüler, wie mathematische Korrespondenzkreise und Mathe-Camps. Die Knotentheorie wurde in Göttingen bereits in einer Mathe-AG und einem Mathe-Camp erprobt, wobei sie als Teilgebiet der Invariantentheorie behandelt wurde.

Der Vorteil der Förderung mathematikbegabter Schülerinnen und Schüler ist gleichzeitig ein Nachteil dieser außerunterrichtlichen Arbeit. Es nehmen in der Regel nur besonders interessierte Schülerinnen und Schüler an Mathe-AGs teil. Die Knotentheorie ist dazu geeignet, den Erwerb von allgemeinen mathematischen Kompetenzen auf unterschiedlichstem Anforderungsniveau zu fördern und gleichzeitig den Schülerinnen und Schülern eine mathematische Disziplin, die nicht Bestandteil der Schulmathematik ist, handlungsorientiert auch auf niedrigem Anforderungsniveau näher zu bringen. Auch durchschnittlich und weniger begabte Schülerinnen und Schülern sollten die Möglichkeit bekommen, sich mit Knotentheorie zu beschäftigen, damit auch weniger begabte Schülerinnen und Schüler mit dieser „anderen Art der Mathematik“ die Gelegenheit bekommen, gute mathematische Leistungen zu erbringen (vgl. [RR00], S. 72).

3.3.2 Facharbeit

Die Kultusministerkonferenz hat vereinbart, dass der Unterricht in der Sekundarstufe II sowohl fachbezogen als auch fächerübergreifend zu gestalten ist. Ziel der gymnasialen Oberstufe ist es, den Schülerinnen und Schülern eine vertiefende Allgemeinbildung, eine allgemeine Studierfähigkeit, sowie Wissenschaftspropädeutik zu vermitteln.

„Der Aufbau des hierfür erforderlichen strukturierten Wissens und der hierfür erforderlichen Kompetenzen durch fachbezogenes Lernen wird unterstützt durch Lernformen, die das Erkennen von Zusammenhängen fördern und geeignet sind, auch fachübergreifende Arbeitsformen und Methoden zu vermitteln.“ ([Nie06a], S.1)

Die Facharbeit stellt eine solche Lernform dar. Im Rahmen eines Leistungskurses oder eines Seminarfaches wählen die Schülerinnen und Schüler ein Thema, das in einem festgelegten Zeitraum selbstständig bearbeitet wird. Die Bearbeitung des Themas und die Ergebnisse werden von den Schülerinnen und Schülern dokumentiert. Es hängt vom Bundesland ab, ob die Facharbeit zwingend fächerübergreifend sein muss, oder sich auch innerhalb eines Schulfaches bewegen kann. Die Facharbeit ist allerdings nicht in allen Bundesländern verpflichtend.

In Niedersachsen wird die Facharbeit im Rahmen des Seminarfaches im Schuljahr 2006/2007 verpflichtend ab der elften Klassen eingeführt (vgl. [Nie05]). Die Schülerinnen und Schüler wählen in jedem Schulhalbjahr ein Thema, das einzeln oder in Gruppen selbstständig bearbeitet werden soll. Dabei können die Themen mit einem oder mit mehreren Fächern in Verbindung gebracht werden. In einem der vier Schulhalbjahre der Oberstufe ist eine Facharbeit zu

erstellen und zu präsentieren. In den übrigen Schuljahren sind gleichwertige, meist schriftliche Leistungen im jeweilig gewählten Thema zu erbringen (vgl. [Nie06a], S. 6f.).

Die Knotentheorie kann im Rahmen des Seminarfaches oder einer Facharbeit sowohl innermathematisch, als auch aufgrund ihrer aktuellen Verknüpfung mit Biologie, Chemie und Physik (vgl. [Ada95]) sowie ihrer historischen Verknüpfung mit den genannten Fächern (vgl. [Epp99]) fachübergreifend bearbeitet werden. Es bieten sich folgende fachübergreifende Themen an:

- Herstellung von verknoteten Molekülen (Chemie, Mathematik)
- Verknotung der DNS (Biologie, Chemie, Mathematik)
- Die Geschichte des Äthers (Physik, Mathematik, Geschichte)

Diese Themenbeispiele bewegen sich meiner Meinung nach auf einem angemessenen Anforderungsniveau für mathematikbegeisterte Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe. Weitere fachübergreifende, aber auch zahlreiche innermathematische Themen ergeben sich aus den Aufgaben der angehängten Aufgabensammlung und den im Literaturverzeichnis angeführten Büchern zur Knotentheorie. Eine Fachbereichsarbeit aus Österreich mit dem Titel „Knoten aus der Sicht der Mathematik“ findet sich unter [Mif00]. Im Rahmen der Facharbeit oder des Seminarfaches können und werden sich wahrscheinlich nur einige wenige mathematikbegeisterte Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II mit der Knotentheorie beschäftigen, die hier ihre bereits in der Mittelstufe erworbenen allgemeinen mathematischen Kompetenzen anwenden und vertiefen. In Kapitel 3.2 hat sich jedoch gezeigt, dass die Knotentheorie auch zum Erwerb der allgemeinen mathematischen Kompetenzen ihren Beitrag leisten kann. Deshalb ist es sinnvoll, die Knotentheorie ebenfalls in der Sekundarstufe I unterzubringen.

3.3.3 Projekt

Projekte im Mathematikunterricht haben sich bis zum Ende des 21. Jahrhunderts nicht etabliert (vgl. [Lud80], S. 61). Inzwischen findet sich der Projektunterricht in einer Vielzahl an mathematikdidaktischer Literatur wieder und ist zum Bestandteil von Bildungsstandards und Kerncurricula geworden. In den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz wird das Projekt als Möglichkeit, inhaltliche und allgemeine mathematische Kompetenzen zu erwerben, explizit benannt (vgl. [Kul03a], S. 9). Im Kerncurriculum für das Gymnasium des Landes Niedersachsen ist zum Thema Projekte folgendes zu lesen:

„Gruppen und Projektarbeiten mit offenen Aufgabenstellungen sind unverzichtbare Arbeitsformen, da diese in besonderem Maße sachbezogene Dialoge, konstruktive Kritik und die Bereitschaft zum gemeinsamen Arbeiten fördern.“ ([Nie06b], S. 10)

Diese Empfehlung spiegelt sich auch in den neuaufgelegten Schulbüchern wieder, in denen mehrere Projektvorschläge enthalten sind (vgl. [GPF04] und [GPF05]). Zunächst stellt sich jedoch die Frage, wann es sich bei einer Unterrichtsform um Projektunterricht handelt. Es gibt eine große Anzahl an Projektansätzen, so dass eine einheitliche Definition von Projektunterricht zunächst nicht möglich ist (vgl. [Lud80], [Leu03a] und [Rei91]). Im Zusammenhang mit Projektunterricht fallen Schlagworte wie Ganzheitliches Lernen, Selbstbestimmung und Gesellschaftsbezug, um nur einige wenige zu nennen (vgl. [Hes03], S. 195). Nach LUDWIG weist ein Projektunterricht fünf Merkmale auf. Neben Schüleraktivität, Gruppenarbeit, Rückkopplung und einem gewissen organisatorischen Rahmen ist der Projektunterricht gekennzeichnet durch ein abgeschlossenes Thema, das eine gewisse Struktur aufweist, die Möglichkeit zur Differenzierung bietet und einen Umwelt- und Lebensbezug aufweist (vgl. [Lud80]). Die in Abschnitt 3.1 ausgewählten Bausteine der für Schülerinnen und Schüler geeigneten Knotentheorie besitzen eine in sich abgeschlossene Struktur, die den Schülerinnen und Schüler gleichzeitig die Möglichkeit gibt, sich eigenständig mit dem Thema zu beschäftigen. Der selbstdifferenzierende Charakter der mathematischen Modellbildung, die ein fester Bestandteil der für Schülerinnen und Schüler geeigneten Knotentheorie ist, wurde bereits in Kapitel 3.2 herausgearbeitet. Dort wurde auch der mangelnde Anwendungsbezug der Knotentheorie diskutiert. Da die Schülerinnen und Schüler in ihrem Alltag ständig mit Knoten in Berührung kommen, besitzt die Knotentheorie jedoch einen ausreichenden Umwelt- und Lebensbezug. Da die Knotentheorie die genannten Kriterien weitgehend erfüllt und aufgrund der in den Abschnitten 3.1 und 3.2 genannten Aspekte denke ich, dass sich Knotentheorie hervorragend für Projekte mit den unterschiedlichsten Lernzielen eignet. Im Folgenden möchte ich kurz einige Projektideen vorstellen.

Eine Möglichkeit, die Knotentheorie in einem Projekt zu behandeln, ist, sie als Teilthema in ein Projekt des Mathematikunterrichts einfließen zu lassen, das ein übergeordnetes innermathematisches Thema erarbeitet oder einübt und vertieft. Das übergeordnete Thema kann zum Einen der Erwerb einer allgemeinen mathematischen Kompetenz sein. Mögliche Themen sind „Mathematische Modelle“ „Problemlösen“ oder „Beweise“. Zum Anderen können sich die Schülerinnen und Schüler mit einem übergeordneten in-

haltlichen Thema beschäftigen, wie zum Beispiel dem Thema „Symmetrie und Invarianz“ als bekannter Bestandteil der Schulmathematik oder dem Thema „Topologie“ als Ausblick auf noch unbekannte innermathematische Themen außerhalb des Lehrplans. Auch eine Kombination von allgemeinen mathematischen und inhaltsorientierten Kompetenzen ist denkbar. In beiden Fällen beschäftigt sich jeweils nur eine Schülergruppe mit Aspekten der Knotentheorie, während die anderen Projektgruppen sich mit anderen Inhalten beschäftigen. Zu den von mir genannten Beispielen, mit Ausnahme des Themas „Topologie“, lassen sich vielseitige Themen für andere Projektgruppen in Schulbüchern und Aufgabensammlungen finden. Im Fall des Themas „Topologie“ möchte ich auf die zahlreichen Bücher über anschauliche oder elementare Topologie, wie zum Beispiel [Lie55], [Jäg80] oder [MW76] hinweisen, die eine Fülle von für den Unterricht geeigneten Themen bieten und zum Teil auch mit didaktischen Kommentaren versehen sind.

Eine weitere Möglichkeit mit ähnlichen Lernzielen ist, die Knotentheorie selbst zum innermathematischen Thema des Projektes zu machen. Auch hier gibt es mehrere Herangehensweisen. Zum Beispiel kann den Projektgruppen der Vergleich zweier Knoten als einheitliche Aufgabe gestellt werden, wobei sich jede Projektgruppe mit einer anderen vorgegebenen Invariante beschäftigt. Diese Projektidee entspricht einem niedrigen Anforderungsniveau und ist für die unteren Schuljahrgänge geeignet. Ein weiteres mögliches Projekt auf hohem Anforderungsniveau kann so aufgebaut sein, dass sich die Schülerinnen und Schüler mit komplexen offenen Themen beschäftigen, zu deren Bearbeitung sie sich die nötigen Hilfsmittel eigenständig beschaffen müssen. Mögliche Themen für eine Projektgruppe sind:

- Knoteninvarianten
- Knoten und Zöpfe
- Perko - Paar (vgl. Anhang A, Aufgabe 17)
- Knotenspiel (vgl. Anhang A, Aufgabe 39)
- Knotentricks und Fadenspiele (vgl. Anhang A, Aufgabe 38 und [Pic04])
- Brunnsche Verschlingungen (vgl. Anhang A, Aufgabe 40)

Es bietet sich hier an, die Schülerinnen und Schüler in die Themenfindung mit einzubeziehen, da sich so oft weitere interessante Themen finden lassen, die die Lehrkraft nicht mit einbezogen hätte. Unter Anhang A.5 und in den

zahlreichen Büchern zur Knotentheorie finden sich noch weitere für die Schule geeignete Gebiete der Knotentheorie.

Schließlich besteht noch die Möglichkeit, die Knotentheorie außermathematisch und damit fächerübergreifend zu betrachten. Dabei können auch mehrere Fächer mit einbezogen werden. Der fächerübergreifende Unterricht kann bezüglich der Knotentheorie zum einem vom „diktatorischen“, zum anderen vom „demokratischen“ Standpunkt aus betrachtet werden (vgl. [Lud03], S. 165). Vom diktatorischen Standpunkt aus ist die Knotentheorie das zentrale Thema, das in anderen Fächern seine Anwendung findet oder auf andere Art und Weise mit diesen Fächern verbunden ist. Mögliche, allerdings für die Sekundarstufe I wahrscheinlich zu anspruchsvolle Themen aus den Bereichen Chemie, Biologie, Physik und Geschichte wurden bereits in Abschnitt 3.3.2 genannt. Aus Sicht des demokratischen Standpunktes steht die Mathematik der Knoten gleichberechtigt neben anderen Fächern unter einem vorher vereinbartem Oberthema. Die Knotentheorie kann hier zum Beispiel in das allgemeine Oberthema „Knoten“ eingeordnet werden, das eine Vielzahl von mathematischen und nichtmathematischen Themen auf unterschiedlichstem Anforderungsniveau bietet.

Zusätzlich zu allen bisher genannten Themen sind folgende Inhalte möglich:

- Gordischer Knoten (Mythologie, Geschichte) (vgl. [BS00], S.373)
- Quipu - Knotenschrift der Inkas (Erdkunde, Geschichte, Sprachen, vgl. z.B. [Wik] und [Hir])
- Wortspiele mit knot - not (Englisch) (vgl. [Ada95], S. 281f.)
- Keltische Knoten (Geschichte, Kunst)
- Knoten in der Seefahrt (Mathematik, Sport)
- Flachbandkabel (Mathematik, Informatik) (vgl. [Old04])

Auch hier lassen sich unter Einbeziehung der Schülerinnen und Schüler noch weitere Themen finden.

Die genannten Projektideen sind lediglich Beispiele und Vorschläge für mögliche Projekte mit und um Knotentheorie. Innerhalb Deutschlands ist mir kein Schulprojekt bekannt, in dem die Knotentheorie behandelt wurde. Unter [Los] und [Pay] finden sich jedoch einige Vorschläge für die projektorientierte Beschäftigung von Schülerinnen und Schülern mit Knotentheorie.

4 Ausblick

In dieser Arbeit habe ich mich aus fachwissenschaftlicher Sicht mit der Knotentheorie auseinandergesetzt. Weiterhin habe ich die Möglichkeit, sie in die Schulmathematik zu integrieren, theoretisch beleuchtet. Es hat sich herausgestellt, dass die Knotentheorie durchaus Inhalte zu bieten hat, die für Schülerinnen und Schüler verständlich aufbereitet werden können. Diese Inhalte sind jedoch kein Bestandteil der inhaltsorientierten Kompetenzen, die durch die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz für die Schulen verbindlich vorgeschrieben sind, obwohl es zahlreiche Argumente dafür gibt, warum die Invariantentheorie oder die anschauliche Topologie, als deren Teilgebiet die Knotentheorie gesehen werden kann, in die Schulmathematik integriert werden sollte. Trotz dieses Defizits kann die Knotentheorie ihren Platz in der Schulmathematik finden, da sie auf unterschiedlichstem Anforderungsniveau dazu geeignet ist, den Erwerb allgemeiner mathematischer Kompetenzen zu fördern. Die Kultusministerkonferenz hat damit den Weg der Knotentheorie in die Schule durch die Aufnahme der allgemeinen mathematischen Kompetenzen in die Bildungsstandards geebnet. Gleichzeitig stehen den Lehrerinnen und Lehrern mit der Mathe-AG, der Facharbeit und dem Projektunterricht Strukturen zur Verfügung, die es ermöglichen, auch Inhalte außerhalb der inhaltlichen Kompetenzen zu behandeln und in die die Knotentheorie hervorragend integriert werden kann. Ein wichtiges Argument dafür, diese Strukturen für die Behandlung von Knotentheorie zu nutzen, ist die Tatsache, dass es sich bei der Knotentheorie um ein anwendungsfähiges innermathematisches Thema handelt. Die Behandlung der Knotentheorie kann dazu beitragen, dass die durch die Bildungsstandards geförderte Ausrichtung der Schulmathematik auf angewandte Mathematik entgegengewirkt wird. Ob die Knotentheorie, oder auch andere interessante, nicht lehrplankonforme, innermathematische Themen als Projekt oder Facharbeit ihren Weg in die Schule finden werden, liegt allerdings in der Hand von aufgeschlossenen und engagierten Mathematiklehrerinnen und -lehrern.

Ich selbst, als angehende Mathematiklehrerin, freue mich darauf, meine Ideen in der Schule umzusetzen. Die Leserinnen und Leser werden bemerkt haben, dass in die vorliegende Arbeit meine Begeisterung für dieses Thema mit eingeflossen ist. Ich hoffe, dass ich diese Begeisterung an meine zukünftigen Schülerinnen und Schüler weitergeben kann. Mir ist jedoch auch bewusst, dass mein Idealismus den Schulalltag möglicherweise nicht überstehen wird. Da ich weder als Schülerin noch als Lehrerin Erfahrungen mit der Knotentheorie gesammelt habe, kann ich weder eine Aussage darüber treffen, ob sich meine Ideen wirklich praktisch umsetzen lassen, noch langjährige Lehrerinnen und -lehrer dafür kritisieren, dass sie nicht versuchen, Schülerinnen und

Schüler lebendige innermathematische, aber nicht lehrplankonforme Themen nahe zu bringen.

Was ich kann, ist Kritik an der universitären Ausbildung von angehenden Mathematiklehrerinnen und -lehrern üben, die ich selbst durchlaufen habe. Mein sichtbarer Enthusiasmus für die Knotentheorie entspringt nicht einem generellen Enthusiasmus für mein Mathematikstudium. Vielmehr habe ich mich für eine Staatsexamensarbeit im Fach Mathematik entschieden, damit ich die Begeisterung für Mathematik, mit der ich mein Studium begonnen habe und die ich zu verlieren drohte, zurückgewinne. Als Betreuerin einer Veranstaltung der Mathematikdidaktik des dritten und vierten Semesters erlebe ich wöchentlich, dass es vielen Studierenden ähnlich ergeht. Grund für den Mangel an Begeisterung für Mathematik sind axiomatisch-deduktiv aufgebaute Vorlesungen und ein Leistungsdruck, der durch die Einführung von Bachelor/Master-Studiengängen noch verschärft wird. Streng bewertete Übungszettel und benotete Klausuren lassen den Studierenden wenig Raum, um in die Mathematik einzutauchen und sie selbstständig zu erforschen.

Aber wie sollen Mathematiklehrerinnen und -lehrer etwas unterrichten, was sie selbst nicht erlebt haben? Wie sollen sie Schülerinnen und Schüler die Freude an authentischer Mathematik nahebringen, wenn sie diese Freude in ihrem Studium nicht selbst erfahren haben? Zumal in der Schule ähnliche Bedingungen vorherrschen wie die, die den Lehramtsstudierenden an der Universität die Begeisterung für Mathematik nehmen. Aufgrund des allgemeinen Leistungs- und Notendruckes in unserer Gesellschaft bleiben den Schülerinnen und Schüler wenig Möglichkeiten für eigenständiges entdeckendes Lernen an einem selbstgewählten Thema. Der Druck wird sich durch die aktuell von der Kultusministerkonferenz beschlossene Einführung nationaler Schulvergleichstests ab dem Jahre 2009 (vgl. [Kul05]) von Seiten der Schule noch verstärken. Gleichzeitig wird die Handlungsfreiheit der Lehrerinnen und Lehrer weiter eingeschränkt, da sie dazu gezwungen sind die in den Vergleichstests abzuprüfenden Teilziele der Bildungsstandards akkurat umzusetzen.

In der vorliegenden Arbeit bereitete es mir Probleme, die Teilziele der allgemeinen mathematischen Kompetenzen einzeln zu erfassen und zu berücksichtigen. Es hat sich vielmehr gezeigt, dass diese Kompetenzen und damit auch ihre Teilziele nur im Verbund erworben werden können. Aber vor allem können sie nicht gelehrt oder gelernt werden, sondern entwickeln sich mit der Zeit, durch eine eigenständige Erforschung der Mathematik, die durch die Existenz von Notendruck und Schulvergleichstests eher verhindert als gefördert wird. Das Abtesten der allgemeinen mathematischen Kompetenzen steht damit im Widerspruch zum Erreichen der Bildungsstandards. Vielmehr ist es notwendig, den Lehrerinnen und Lehrern und damit auch den

Schülerinnen und Schülern ausreichend Freiräume zu bieten, damit der Entwicklung dieser Kompetenzen nichts im Wege steht. Um diese Freiräume zu schaffen, müssen zum Einen die Leistungsvergleichstests und der Notendruck vermindert und die Inhalte aufgelockert werden. Zum Anderen muss den Lehrerinnen und Lehrern nahegebracht werden, was es bedeutet, lebendige Mathematik zu betreiben, sei es in Studium, Referendariat oder Fortbildung. Nur so sind die Mathematiklehrerinnen und -lehrer dazu in der Lage, einen motivierten, authentischen Mathematikunterricht zu entwickeln und zu gestalten und diese Motivation für und Freude an Mathematik auch auf Schülerinnen und Schüler zu übertragen. Dann wird sich hoffentlich auch in der Schule auch Raum für die Knotentheorie oder andere handlungsorientierte innermathematische Themen finden, die die Schülerinnen und Schüler mit Begeisterung erforschen werden.

A Aufgabensammlung

Die folgenden Aufgaben sind eine gemischte Sammlung aus konkreten Fragen und offenen Aufgabenstellungen. Sie sind nach ihrer Behandlung in den Kapiteln geordnet. Die Aufgaben sind hauptsächlich den Büchern [Ada95], [BS00] und [Liv95] entnommen, in denen sich noch weitere Aufgabenbeispiele befinden. Einige Aufgaben entstammen meinen eigenen Ideen. Es dürfte den Leserinnen und Lesern ebenfalls nicht schwer fallen, eigene Aufgaben zu entwickeln.

A.1 Aufgaben zu den Bausteinen 1, 2 und 3

1. Zeige, dass ein gegebener Knoten ein Unknoten ist.
2. Zeige, dass zwei gegebene Knoten äquivalent sind.
3. Verknote einen Unknoten. Begründe, warum er immer noch ein Unknoten ist.
4. Wie viele Schülerinnen und Schüler sind notwendig, um einen Kleeblattknoten, einen Achterknoten, etc. zu bilden? Wie viele Schülerinnen und Schüler sind mindestens notwendig, um einen nichttrivialen Knoten zu bilden?
5. Wie viele starre Stäbe sind notwendig, um einen Kleeblattknoten, einen Achterknoten, etc. zu bilden? Wie viele starre Stäbe sind mindestens notwendig, um einen nichttrivialen Knoten zu bilden?
6. Finde eine Deformation der Whitehead-Verschlingung, die die beiden Komponenten ineinander überführt
7. Zeige, dass ein Knoten mit einer oder zwei Kreuzungen immer trivial ist.
8. Zeige, dass es für jeden Knoten eine Projektion mit zehn Kreuzungen gibt.
9. Kann ich eine Verschlingung mit zwei Komponenten finden, deren Projektion genau drei Kreuzungen hat?
10. Genügen die Reidemeister-Bewegungen, um zwei äquivalente Knoten ineinander überzuführen? Begründe deine Vermutung.

11. Wie kann ich einen Knoten von einer Verschlingung mit zwei oder mehr Komponenten unterscheiden?
12. Berechne für eine Verschlingung die Verschlingungszahlen aller möglichen Orientierungen. Bewerte dein Ergebnis.
13. Ist die Anzahl der Kreuzungen eines Knotendiagramms eine Knoteninvariante?
14. Überprüfe, ob ein Knoten dreifarbig ist oder nicht.
15. Zeige, dass die Dreifarbigkeit eine Knoteninvariante ist.
16. Zeige, dass Unknoten und Kleeblattknoten nicht äquivalent sind.
17. Zeige, dass das Perko-Paar (Abb. 55) äquivalent ist.

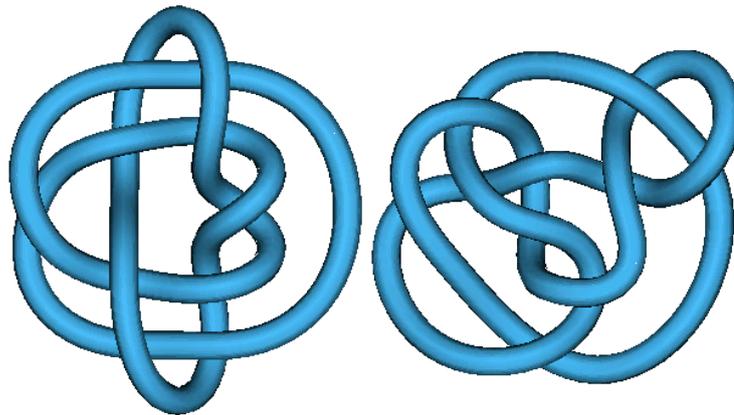


Abb. 55: Perko-Paar

18. Bestimme die Entknotungszahl des Achterknotens.
19. Bestimme die Entknotungszahl eines Knotendiagramms.
20. Ist es möglich, einen Knoten (eine Verschlingung) durch Abänderung von endlich vielen Unterkreuzungen in Überkreuzungen in den trivialen Knoten (die triviale Verschlingung) zu verwandeln? Begründe deine Behauptung indem du ein Verfahren angibst.
21. Kannst du die Projektion der Boromäischen Ringe durch Abänderung von Unterkreuzungen in Überkreuzungen in einen Kleeblattknoten verwandeln? Begründe deine Vermutung.

A.2 Aufgaben zu Baustein 4

22. Bestimme das Jones-Polynom der trivialen Verschlingung mit n Komponenten.
23. Bestimme das Jones-Polynom der Hopf-Verschlingung, des Kleeblattknotens, des Achterknotens, etc.
24. Berechne die Verdrillungszahl für verschiedene Knoten.
25. Überprüfe, unter welchen Reidemeister-Bewegungen die Verdrillungszahl invariant ist.
26. Wie wirkt sich die Orientierungsumkehr auf das Jones-Polynom aus. Beweise deine Vermutung.
27. Zeige, dass das Jones-Polynom durch folgende Entwirrungs-Relation bestimmt ist:

$$t^{-1}\gamma(V_+) - t\gamma(V_-) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\gamma(V_0) = 0$$

28. Bestimme mit Hilfe der Entwirrungs-Relation das Jonespolynom (das HOMFLY-Polynom) eines Knotens (einer Verschlingung).

A.3 Aufgaben zu Baustein 5

29. Kannst du die Darstellung jedes Knotens (jeder Verschlingung) in einen geschlossenen Zopf verwandeln? Begründe deine Behauptung, indem du ein Verfahren angibst.
30. Ein Zopf ist durch seine Erzeuger gegeben. Zeichne den Zopf.
31. Beweise, dass ein Zopf eine Gruppe ist.
32. Sind zwei gegebene Zöpfe äquivalent? Begründe deine Behauptung.

A.4 Offene Aufgaben

33. Finde heraus, ob zwei gegebene Knoten (Verschlingungen) äquivalent sind oder nicht. Begründe deine Behauptung.
34. Finde heraus, ob sich ein gegebener Knoten zum Unknoten entwirren lässt. Begründe deine Behauptung.

35. Wann lässt sich ein Knoten durch Zusammenziehen auflösen?
36. Finde Darstellungen vom Unknoten, die möglichst schwer für deine Mitschüler aufzulösen sind.
37. Schaue dir Seemannsknoten und andere Knoten aus dem Alltagsgebrauch an und vergleiche diese. Setze sie in Beziehung zur Knotentheorie. Stelle Vermutungen an und begründe diese. (vgl. [Sos00], S. 14f. und [Epp99], S. 1f.)
38. Schaue dir einen Entknotungs-Zaubertrick an. Begründe, warum der Trick funktioniert. Erfinde selbst Knotentricks. (vgl. [Pra97], Chapter I, § 2 und [Ste02b])
39. Spiele das Knotenspiel: Stelle dich mit deinen Mitschülerinnen und Mitschülern in einen Kreis. Geht gemeinsam in die Mitte des Kreises und fasst euch so an den Händen, dass jede Hand die Hand einer beliebigen anderen Person erfasst. Versucht euch nun zu entknoten. Gelingt es euch immer, den entstehenden Knoten zu entknoten? Stelle Vermutungen an und begründe diese.
40. Eine Brunnsche Verschlingung ist eine nichttriviale Verschlingung, die nach Wegfall einer Komponente trivial wird. Die bekanntesten Vertreter sind die boromäischen Ringe mit drei Komponenten. Gibt es aus vier, fünf ... beliebig vielen Komponenten bestehenden Brunnsche Verschlingungen? Stelle selbst Vermutungen über Brunnsche Verschlingungen auf, und versuche, diese zu beweisen.
41. Was haben Knoten mit Zöpfen zu tun?
42. Kann man mit Flachbandkabeln rechnen? [Old04]

A.5 Weitere, für die Schule geeignete Themen der Knotentheorie

43. Knotenarithmetik
44. Primknoten
45. alternierende Knoten
46. Knotennotationen
47. Knoten und Graphen

B Literatur

- [Ada95] ADAMS, C. C.: *Das Knotenbuch: Einführung in die mathematische Theorie der Knoten*. Spektrum, Akademischer Verlag, 1995.
- [Bai05] BAIREUTHER, P.: *Standards - die neue Mengenlehre?* 2005.
In: Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 3 (Juni 2005) 47. Jg., S. 40-41.
- [Bir75] BIRMAN, J.: *Braids, links, and mapping class groups*. Princeton University Press, 1975.
- [Blu05] BLUM, W.: *Bildungsstandards - Fluch oder Segen?* 2005.
In: Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 6 (Dezember 2005) 47. Jg., S. 39-40.
- [Bos04] BOSCH, S.: *Algebra. 5., überarbeitete Auflage*, Band 1. Springer-Verlag, 2004.
- [Bou02] BOURBAKI, N.: *Lie Groups and Lie Algebras. Chapter 4-6*. Elements of Mathematics. Springer Verlag, 2002.
- [BS00] BURGER, E. B. und M. STARBIRD: *The Heart of Mathematics. An invitation to effective thinking*. Key College Publishing, 2000.
- [Epp99] EPPLE, M.: *Die Entstehung der Knotentheorie. Kontexte und Konstruktion einer modernen mathematischen Theorie*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1999.
- [GPF04] GRIESEL, H., H. POSTEL und F.SUHR (Herausgeber): *Elemente der Mathematik 5. Niedersachsen*. Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, 2004.
- [GPF05] GRIESEL, H., H. POSTEL und F.SUHR (Herausgeber): *Elemente der Mathematik 6. Niedersachsen*. Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, 2005.
- [Gri96] GRIESEL, H. (Herausgeber): *Elemente der Mathematik 10. Niedersachsen*. Schöningh Verlag GmbH, 1996.
- [Gri99a] GRIESEL, H. (Herausgeber): *Elemente der Mathematik 7. Niedersachsen*. Schöningh Verlag GmbH, 1999.

- [Gri99b] GRIESEL, H. (Herausgeber): *Elemente der Mathematik 8. Niedersachsen*. Schöningh Verlag GmbH, 1999.
- [Gri00] GRIESEL, H. (Herausgeber): *Elemente der Mathematik 9. Niedersachsen*. Schöningh Verlag GmbH, 2000.
- [Hes03] HESKE, H.: *Ganzheitliches Lernen*. 2003.
In: [Leu03b], S. 185-197.
- [HHH03] HEFENDEHL-HEBEKER, L. und S. HUSSMANN: *Beweisen - Argumentieren*. 2003.
In: [Leu03b], S. 93-106.
- [Hil71] HILTON, P.: *Topology in the High School*. 1971.
In: Educational Studies in Mathematics 3 (1971), S. 436-453.
- [Hir] HIRST, K.K.: *New Insights into the Administration of the Inca Empire*.
Verfügbar über: <http://archaeology.about.com/od/americanancientwriting/a/kipucode.htm> [Stand: 16.06.2006].
- [HKW86] HARPE, P. DE LA, M. KERVAIRE und C. WEBER: *On the Jones Polynomial*. 1986.
In: L'Enseignement Mathématique, t.32 (1986), S. 271-335.
- [Hu03] HUSSMANN, S.: *Umgangssprache - Fachsprache*. 2003.
In: [Leu03b], S. 60-75.
- [Jac80] JACOBS, K.: *Entwicklungslinien in der Mathematik im 20. Jahrhundert*. 1980.
In: Mathematischer Semesterbericht (33), S. 26-54.
- [Jäg80] JÄGER, J.: *Elementare Topologie*. Ferdinand Schöningh, 1980.
- [Kaw96] KAWAUCHI, A.: *A survey of knot theory*. Birkhäuser Verlag, 1996.
- [Kön97] KÖNIG, H.: *Arbeitsgemeinschaften und Korrespondenzzirkel. Vergleich zweier Formen außerunterrichtlicher Arbeit*. 1997.
In: Der Mathematikunterricht 43(6), S. 45-56.
- [Kul03a] KULTUSMINISTERKONFERENZ (Herausgeber): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. 2003.
Verfügbar über: http://nibis.ni.schule.de/nli1/gohrgs/bildungsstandards/mittlerer_schulabschluss_10/bs_ms_kmk_mathematik.pdf [Stand: 16.07.2006].

-
- [Kul03b] KULTUSMINISTERKONFERENZ (Herausgeber): *Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung. Mathematik.* 2003.
Verfügbar über: http://www.kmk.org/doc/beschl/epa_mathematik.pdf [Stand: 16.07.2006].
- [Kul05] KULTUSMINISTERKONFERENZ (Herausgeber): *Ergebnisse der 314. Plenarsitzung der Kultusministerkonferenz. Pressemitteilung vom 02.06.2006.* 2005.
Verfügbar über: <http://www.kmk.org/aktuell/pm060602a.htm> [Stand: 16.06.2006].
- [Lüc97] LÜCK, W.: *Das Jones-Polynom und Entwirrungs-Invarianten in der Knotentheorie.* 1997.
Verfügbar über: <http://wwwmath.uni-muenster.de/u/lueck/org/staff/publications.html> [Stand: 16.6.2006].
- [Leu03a] LEUDERS, T. (Herausgeber): *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II.* Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co. KG, 2003.
- [Leu03b] LEUDERS, T.: *Problemlösen.* 2003.
In: [Leu03a], S. 119-135.
- [Lie55] LIETZMANN, W.: *Anschauliche Topologie.* Verlag von R. Oldenbourg, 1955.
- [Liv95] LIVINGSTON, C.: *Knotentheorie für Einsteiger.* Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1995.
- [LM05] LEUDERS, T. und K. MAASS: *Modellieren - Brücken zwischen Welt und Mathematik.* 2005.
In: Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 3 (Juni 2005) 47. Jg., S. 1-7.
- [Los] LOS ALAMOS NATIONAL LABORATORY (Herausgeber): *This Is Mega-Mathematics!* <http://www.c3.lanl.gov/mega-math> [Stand: 16.06.2006].
- [Lud80] LUDWIG, M.: *Projekte im Mathematikunterricht des Gymnasiums. Dissertation.* Nummer 5 in *Texte zur mathematischen Forschung und Lehre.* Franzbecker, 1980.

- [Lud03] LUDWIG, M.: *Fächerübergreifendes Lernen*. 2003.
In: [Leu03b], S. 164-178.
- [Maa05] MAASS, K.: *Modellieren - Aufgaben für alle?!* 2005.
In: *Mathematik lehren*, Heft 131, S. 19-23.
- [Mif00] MIFEK, M.: *Knoten aus der Sicht der Mathematik*. 2000.
Verfügbar über: www.nls.at/knot/fba.doc [Stand: 16.06.2006].
- [MW76] MÜLLER, K.P. und H. WÖLPERT: *Anschauliche Topologie: eine Einführung in die elementare Topologie und Graphentheorie*. Mathematik für die Lehrerbildung. B. G. Teubner, 1976.
- [Nie04] NIEDERSÄCHSISCHES KULTUSMINISTERIUM (Herausgeber): *Rahmenrichtlinien und Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung für das Fach Mathematik, hier: Verbindliche Inhalte und Themen*. 2004.
Verfügbar über: http://nibis.ni.schule.de/nli1/gohrgs/rrl/za_mathe_inhalte.pdf [Stand: 16.06.2006].
- [Nie05] NIEDERSÄCHSISCHES KULTUSMINISTERIUM (Herausgeber): *Verordnung über die Gymnasiale Oberstufe (VO-GO)*. 2005.
Verfügbar über: http://cdl.niedersachsen.de/blob/images/C7722480_L20.pdf [Stand: 16.06.2006].
- [Nie06a] NIEDERSÄCHSISCHES KULTUSMINISTERIUM (Herausgeber): *Das Seminarfach - Hinweise und Empfehlungen für die Schulen. Abdruck aus Schulverwaltungsblatt 3/2006*. 2006.
Verfügbar über: http://cdl.niedersachsen.de/blob/images/C16671023_L20.pdf [Stand: 16.06.2006].
- [Nie06b] NIEDERSÄCHSISCHES KULTUSMINISTERIUM (Herausgeber): *Kerncurriculum für das Gymnasium Schuljahrgänge 5-10 Mathematik*. 2006. Anhörfassung.
- [Old04] OLDENBURG, R.: *Unfertige Mathematik ... mit Flachbandkabeln*. 2004.
In: *Praxis der Mathematik in der Schule*, Heft 6 (Dezember 2004) 46. Jg., S. 279.
- [Orl05] ORLANDO-UCF SHAKESPEARE FESTIVAL (Herausgeber): *William Shakespeare's Twelfth Night. Study Guide*. 2005.
Verfügbar über: <http://www.shakespearefest.org/PDFs/Twelfth%20Night%20Guide.pdf> [Stand: 16.06.2006].

-
- [Pay] PAYNE, B.R. (Herausgeber): *Knot Theory Online*. <http://www.freelearning.com/knots/> [Stand: 16.06.2006].
- [Pic04] PICON, D.: *Fadenspiele*. Fleurus Verlag GmbH, 2004.
- [Pra97] PRASOLOV, V.V.: *Knots, links, braids and 3-manifolds: an introduction to the new invariants in low-dimensional topology*. American Mathematical Society, 1997.
- [Rei48] REIDEMEISTER, K.: *Knotentheorie*, Band 1 der Reihe *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Chelsea Publishing Company, 1948.
- [Rei91] REICHEL, H.-C. (Herausgeber): *Fachbereichsarbeiten und Projekte im Mathematikunterricht: mit Anregungen für das Wahlpflichtfach*, Band 2 der Reihe *Mathematik für Schule und Praxis*. Verlag Holder-Pichler-Tempsky, 1991.
- [RR00] ROGGE, A. und S. ROSEBROCK: *Topologie in der Schule*. 2000. In: *mathematica didactica* 23(2000), Bd. 2, S. 68-85.
- [Sch] SCHAREIN, R. (Herausgeber): *The KnotPlotSide*. www.knotplot.com [Stand: 16.06.2006].
- [Sch79] SCHREIBER, A.: *Universelle Ideen im mathematischen Denken - ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik*. 1979. In: *mathematica didactica* 2, (1979), S. 165-171.
- [Sch83] SCHREIBER, A.: *Bemerkung zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken*. 1983. In: *mathematica didactica* 6 (1983), S. 65-76.
- [Sch92] SCHWEIGER, F.: *Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik*. 1992. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 13(92) 2/3, S. 199-214.
- [Sos00] SOSSINSKY, A.: *Mathematik der Knoten*. Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, 2000.
- [Ste02a] STEWART, I.: *Das Jones-Polynom*. 2002. In: *Spektrum der Wissenschaft. Digest: Mathematische Unterhaltung* 2/2002.

- [Ste02b] STEWART, I.: *Parität, Vierigkeit und die Topologie der Verkettung*. 2002.
In: Spektrum der Wissenschaft. Digest:Mathematische Unterhaltung 2/2002.
- [Str78] STRUSS, D.: *Zur Stellung und Behandlung der Topologie in der Schulmathematik und im Grundstudium der Mathematik. Dissertation*. Hildesheim, 1978.
- [TKW97] TIETZE, U.-P., M. KLIKA und H. WOLPERS: *Mathematik in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen, Didaktik der Analysis*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1997.
- [Vit98] VITO, O.: *Tied into knot theory. Unraveling the basics of mathematical knots*. 1998. In: Quantum/Feature, May/June 1998.
- [Vol01] VOLLRATH, H.-J.: *Grundlagen des Mathematikunterrichts*. Mathematik Primar- und Sekundarstufe. Spektrum Akademischer Verlag, 2001.
- [VY10] VELBEN, O. und J.W. YOUNG: *Projectiv Geometry*, Band 1. Gin and Company, 1910.
- [War03] WARNECKE, J.: *Reidemeister-Bewegungen und Knotentheorie. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt der Sekundarstufe II/I*. 2003.
Verfügbar über: <http://www.math.uni-muenster.de/u/lueck/group/warnecke.pdf> [Stand: 16.6.2006].
- [Wes03] WESTERMANN, S.: *Anwendungen und Modellbildung*. 2003.
In: [Leu03b], S. 148-162.
- [Wik] WIKIPEDIA (Herausgeber): *Quipu*.
Verfügbar über: <http://de.wikipedia.org/wiki/Quipu> [Stand: 16.06.2006].
- [Win75] WINTER, H.: *Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht*. 1975.
In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 3 (1975), S. 106-116.
- [Wit05] WITTMANN, E. CH.: *Eine Leitlinie für die Unterrichtsentwicklung vom Fach aus: (Elementa-)Mathematik als Wissenschaft von Mustern*. 2005.
In: Der Mathematikunterricht, 51(2/3), S. 5-22.

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen der Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, habe ich in jedem Fall unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht. Das gleiche gilt auch für die beigefügten Zeichnungen und Darstellungen.

Ort und Datum

Unterschrift