Mathematisches Billard

Benjamin Aslan

Thomas Schick*
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen
Germany

19. Oktober 2015

Zusammenfassung

Kurze Ausarbeitung für das Mathe-Camp 2015; Thema: mathematisches Billard

1 Grundlagen

Eine der wesentlichen Ideen beim realen Billard ist es, mit Hilfe von Reflexion an den Banden die Billardkugel dorthin zu bekommen, wo sie sein soll (und dabei in der Regel andere Bereiche, wo Kugeln liegen, zu vermeiden).

Beim *Mathematischen Billard* wollen wir uns *nur* auf diesen Reflexionsaspekt konzentrieren.

Daher vereinfachen ("idealisieren") wir wie folgt:

Grundannahmen

- wir betrachten ein punktförmiges Objekt in einem Bereich der Ebene.
- der *Bereich* wird später genau festgelegt (und variiert); uns interessiert z.B. ein Quadrat, andere Rechtecke, (gleichseitige) Dreiecke, Kreisscheibe, Ellipse
- das Objekt führt im Inneren des Bereichs gradlinige Bewegungen durch. Die Bahn besteht also aus Strecken, welche vom einem Punkt des Rand des Bereichs zu einem anderen laufen
- Am Rand wird die Bahn gemäß der Reflektionsregel "Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel" reflektiert (wobei wir in Einzelfällen noch überlegen müssen, was dies genau bedeutet).
- die Bewegung wird unendlich lange fortgesetzt (Reibung wird ignoriert).

1.1 Bemerkung. Im Vergleich zum realen Billard ignorieren wir insbesondere:

- Ausdehnung der Kugel
- Reibung

*e-mail: thomas.schick@math.uni-goettingen.de
www: http://www.uni-math.gwdg.de/schick

- *Spin und Effet.* Dies sind beim echten Billard-Spielen ganz wichtige Effekte; damit kann man erreichen, dass die Kugel gekrümmte Bahnen einnimmt und insbesondere die Einfalls- und Ausfallswinkel-Regel modifiziert wird.

1.2 Beispiel. Einige Beispiele von Bahnen im Quadrat, insbesondere periodische/nicht-periodische.

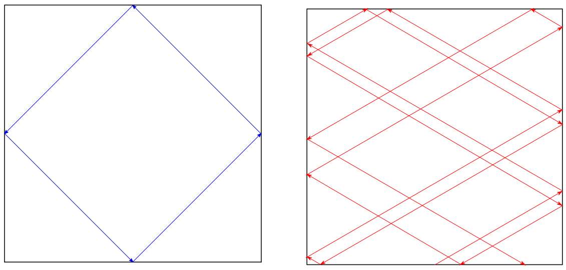

Abbildung 1: Bahn der Periode vier(blau) und Iterationen einer nicht periodischen Bahn(rot).

2 Billard im Quadrat und anderen Polygonen

Zunächst wollen wir uns mit Billard in Polygonen beschäftigen.

2.1 Definition. Ein Polygon ist ein Bereich der Ebene, welcher von endlich vielen Streckenabschnitten begrenzt ist, z.B. ein Dreieck, Viereck,. . .

Eine Teilmenge M der Ebene (z.B. so ein Polygon) heißt *konvex*, wenn für jedes Punktepaar $x, y \in M$ auch die komplette Verbindungsstrecke von x nach y in M enthalten ist.

2.2 Beispiel. Jedes Dreieck ist konvex. Ein Quadrat und eine Kreisscheibe sind konvex.

Es gibt aber auch nicht-konvexe Vierecke:

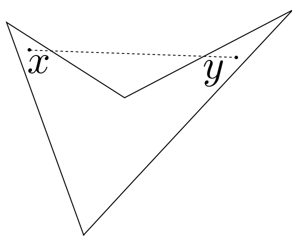

Abbildung 2: Die Verbindungsstrecke der Punkte x und y liegt nicht komplett in Viereck.

2.3 Problem. *Polygone haben Ecken. Wie soll die Reflexion aussehen, wenn unsere Bahn genau in eine Ecke hineinläuft (was ist der Einfalls- oder Ausfallswinkel).*

Es gibt zwei Lösungen:

(1) *wir betrachten solche Bahnen gar nicht —weil sie sehr rar sein sollten und in der "Realität" eigentlich gar nicht auftreten: schon mit einer winzigen Modifikation des Anfangspunkts oder der Anfangsrichtung wird der Eckentreffer vermieden.*

(2) *wir überlegen eine sinnvolle Regel, und wenden diese an. Der (einzig sinnvolle) Trick wäre, dass wir den Reflexionspunkt zunächst etwas von der Ecke weg versetzen; den sich ergebenden Weg betrachten und dann den Reflexionspunkt immer näher an die Ecke heranführen.*

2.4 Aufgabe. Leider ist in den meisten Fällen der zweite Weg nicht sinnvoll möglich. Klar ist: damit es funktioniert, muss das Resultat unabhängig davon sein, von welcher Seite man die Billardbahn zur Ecke hin verschiebt.

Mache Dir (an einem stumpfen Winkel) klar, dass es hierbei keine eindeutige Ausgangsrichtung gibt.

Für sehr spezielle Winkel, insbesondere den rechten Winkel und den $60°$*-Winkel, gibt es aber eine eindeutige Antwort:*

im ersten Fall wird die Bahn genau in entgegengesetze Richtung zurückgespiegelt; im zweiten wird die Richtung an der Winkelhalbierenden gespiegelt.

2.5 Aufgabe. Mache Dir dies klar; zeige, dass es allgemein für Winkel der Form $180°/n$ für ganzzahliges n funktioniert. Hierbei: wenn n gerade wird die Richtung umgekehrt, wenn n ungerade wird die Richtung an der Winkelhalbierenden gespiegelt.

Dies soll geometrisch (durch auffalten) und rechnerisch durchgeführt werden.

2.6 Aufgabe. Es gibt keine "Eckenkatastrophe": Wenn sich unser Billardpunkt flach einer spitzwinkligen Ecke nähert, könnte man sorgen haben, dass er dort "gefangen" wird: unendlich viele Reflexionen in immer kleineren Abständen an den beiden sich fast gegenüberliegenden Kanten, bis man schließlich in der Ecke landet.

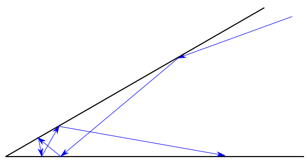

Abbildung 3: Nähert sich die Kugel der Ecke immer weiter an?

In der Tat passiert dies nie. Aber warum?

Tipp: anstelle die Billardstrecke immer wieder zu reflektieren, reflektiere die Fläche (bzw. das relevante Stück der Fläche in der Nähe der Ecke) immer wieder und betrachte die sich so ergebende Gerade in der gepflasterten Ebene. Was würde es in diesem Auffaltungsbild bedeuten, in die Ecke zu geraten?

Wie viele Reflektionen ergeben sich (vielleicht in Beispielen mit konkreten Zahlen für die Winkel) bis man sich wieder von der Ecke entfernt?

2.7 Definition. Eine Billardbahn heißt *periodisch*, wenn man nach endlicher Zeit wieder am *selben Punkt* und mit *derselben Richtung* ankommt; so dass man die schon durchlaufene Bahn auf identische Weise nochmal (und dann natürlich unendlich oft) durchläuft.

Ansonsten heißt eine Billardbahn *nicht periodisch.*

Die *Periode* einer periodischen Bahn sei die Anzahl der Reflektionen bis sich die Bahn zum ersten Mal wiederholt (selber Punkt und selbe Richtung).

2.8 Beispiel. Verschiedene Beispiele (für periodische Bahnen), insbesondere im Quadrat.

2.9 Aufgabe. Zeige, dass in einem spitzwinkligen Dreieck das Dreieck, welches die Höhenfußpunke verbindet, eine periodische Billardbahn liefert.

Was geht schief, wenn das Dreieck spitzwinklig ist?

2.10 Aufgabe. Zeige, dass in einem rechtwinkligen Dreieck eine periodische Billardbahn dadurch entsteht, dass man in der Nähe des rechten Winkels senkrecht auf die gegenüberliegende Seite läuft.

2.11 Bemerkung. Es ist bis heute nicht bekannt, ob in jedem Dreieck eine periodische Billardbahn existiert!

2.12 Frage. Gegeben ein Gebiet (Dreieck, Quadrat,...):

(1) Gibt es periodische Bahnen

(2) gibt es nicht-periodische Bahnen

(3) welche Perioden haben die periodischen Bahnen?

(4) wie viele "verschiedene" periodische Bahnen gibt es

(5) wo liegen die nicht-periodischen Bahnen?

Um über "verschiedene" (periodische oder nicht-periodische) Bahnen zu sprechen, sollten wir den Effekt von einfachen Operationen verstehen.

2.13 Theorem. *Wir betrachten Billard im Rechteck.*

Sei B_a die Bahn mit Ausgangspunkt x und Ausgangsrichtung v. Sei B_n die Bahn mit einem parallel zu einer Seite verschobenen Ausgangspunkt $x+p$ und unveränderter Ausgangsrichtung v.

B_a ist eine Vereinigung von Teilstrecken, welche in je eine von 4 verschiedenen Richtungen $v, -v, w, -w$ durchlaufen werden (außer v is parallel zu einer Achse). Wähle dabei w so, dass v und w dieselbe Länge haben und $v+w$ parallel zu p liegt.

B_n erhält man, indem man die einzelnen Teilstrecken um entweder p (für die Teilstrecken mit Richtung v, w) oder $-p$ verschiebt (für die Teilstrecken mit Richtung $-v, -w$).

Teilstücke einer Strecke, welche beim Verschieben aus dem Gebiet herausgeschoben werden, müssen zurückreflektiert werden.

2.14 Aufgabe. Beweise dies mit Hilfe des Gesetzes Einfallswinkel=Ausfallswinkel.

2.1 Zum Spielen

Ein applet mit dem man sich Billard-Bahnen anschauen kann, findet man unter https://serendip.brynmawr.edu/chaos/doc.html.

Alternativ die Billardbahnen selbst programmieren; z.B. in den Java applets SNAT http://snap.berkeley.edu/ oder mit Geogebra.

2.2 Reflexionstrick

Die Bahn, welche sich beim parallelen Verschieben ergibt, ist schon reichlich kompliziert aufzuschreiben. Tatsächlich kann man das Gesetz deutlich einfacher durch einen “Aufklapptrick” erhalten.

Bilde dazu die Pflasterung der Ebene, welche man durch immer wieder hintereinander ausgeführtes Reflektieren des Rechtecks an seinen Kanten erhält.

Beachte: es ist eine sehr spezielle Eigenschaft des Rechtecks, dass die sich so ergebenden Rechtecke zusammenpassen und man die Ebene genau ausfüllt.

Für jedes der Rechtecke der Pflasterung hat man nun eine festgelegte Translation und Reflexion, mit welcher es aus dem Ursprungsrechteck hervorgegangen ist.

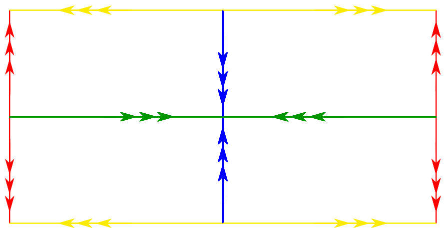

Abbildung 4: Diese Super-Rechtecke wurden durch Aufklappen aus den ursprünglichen Rechtecken gewonnen und pflastern die Ebene.

Betrachtet man nun eine Billardbahn, die an einer Kante reflektiert wird —und ihr Bild im reflektierten Rechteck, so ist die sich ergebende Kurve einfach eine Gerade. Die Bahn im Ursprungsrechteck erhält man dann, indem man die durchquerten Rechtecke (entsprechend den jeweiligen Regeln) auf das Ursprungsrechteck zurückspiegelt.

Struktur der Pflasterung:

Es gibt vier “Typen” von gespiegelten Rechtecken:

(1) an horizontaler Seite gespiegelt

(2) an vertikaler Seite gespiegelt

(3) nacheinander an beiden Seiten gespiegelt, d.h. um 180° gedreht

(4) in ursprünglicher Orientierung.

4 benachbarte (jeweils eines von jeder Sorte) können zu einem Super-Rechteck zusammengefasst werden; die Ebene wird dann von lauter Verschobenen Super-Rechtecken gepflastert.

Nur die Punkte in den (kleinen) Rechtecken in der richtigen ursprünglichen Orientierung entsprechen inklusive Richtung dem Ausgangsrechteck.

2.15 Theorem. *Klassifikation periodischer Billard-Orbits im Quadrat mit Seitenlänge* $1/2$*:*

wegen der Parallelverschiebungs-Äquivalenz sind nur die Ausgangsrichtungen relevant: ist eine Billardkurve mit vorgegebener Ausgangsrichtung periodisch, so auch jede andere.

Periodisch sind, indem man die Auffaltungen anschaut, alle Ausgangsrichtungen von $(0,0)$ *nach* (m,n) *mit* $m,n \in \mathbb{Z}$*: dies sind genau die Punkte die* *dem Punkt* $(0,0)$ *nach Rückreflektion mit der richtigen Orientierung entsprechen. Zur Bestimmung der Periode muss man alle parallelen zur* x*-und* y*-Achse zählen, die durch halbzahlige Achsenpunkte verlaufen, bis man zum ersten Mal einen Punkte mit ganzzahligen Koordinaten erreicht.*

Dies ist (m,n)*, wenn es keinen gemeinsamen Teiler von* m *und* n *gibt. Man erhält (wenn man den Durchgang durch einen Eckpunkt, der eventuell vorkommt, doppelt zählt) Periode* $2(m+n)$*.*

Damit sind die periodischen Bahnen im Quadrat verstanden (und dieselbe Methode liefert alle periodischen Bahnen in anderen Rechtecken).

Bleibt die Frage: wie sieht die Bahn aus, wenn sie nicht periodisch ist. Man erhält dann *nicht* eine Vereinigung von endlich vielen Strecken.

Tatsächlich gilt

2.16 Theorem. *Jede nicht-periodische Bahn im Quadrat nähert sich jedem beliebigen Punkt* P *im Quadrat beliebig nahe an, und zwar sogar beliebig oft:*

für jedes $c>0$ *kommt die Billardbahn dem Punkt* P *unendlich oft näher als Abstand* c*.*

Trotzdem gilt auch:

2.17 Theorem. *Es gibt immer unendlich viele Punkte, welche nicht von der Billardbahn getroffen werden, sogar unendlich viele Punkte auf dem Rand des Quadrats.*

2.3 Billard-Arithmetik im Intervall

Um die beiden gerade gemachten Aussagen zu verstehen, müssen wir die Abfolge der Schnittpunkte der Billardbahn mit einer der Kanten genauer analysieren und vestehen. Betrachte das Einheitsquadrat und seine Auffaltung zur Ebene.

Betrachte eine am Ursprung startende Billardbahn, die schräg nach rechts oben läuft. Es gibt zwei verschiedene Typen von Konfigurationen, mit welchen die Billardbahn die untere Kante trifft: von links kommend am Punkt $(x,0)$ und (wie am Anfang) nach rechts weglaufend, oder umgekehrt. Zur Unterscheidung notieren wir die zweite Variante durch die Zahl $-x$; die Reflexionen an Punkten der unteren Kante werden also durch $x \in (-1,1]$ beschrieben.

In der Auffaltung zur Ebene entsprechen die Punkte der unteren Kante genau den um Vielfache von 2 verschobenen Parallelen zur x-Achse.

Wir interessieren uns also dafür, an welchen Punkten die Billard-Gerade diese schneidet. Dabei müssen wir (mit unserer Konvention für die beiden Typen von Reflexionspunkten) nur noch die x-Koordinate des Schnittpunkts um das geeignete Vielfache von 2 verschieben, so dass es in $(-1,1]$ landet.

Wir erhalten nun im Prinzip eine ganz einfache Regel:

Unsere Billard-Gerade schneide $\{(x,2)\}$ in $(T,2)$. Dies entspricht dem ersten Reflexionspunkt mit der unteren Kante; T muss mit Vielfachen von 2 in das Interval $(-1,1]$ verschoben werden

Dann schneidet die Billard-Gerade nach Strahlensatz die nächste Parallele $\{(x,4)\}$ in $(2T,4)$, die übernächste in $(3T,6)$, $\dots$.

Wir erhalten also die Reflexionspunkte $\overline{T}, \overline{2T}, \overline{3T}, \overline{4T}, \dots$

wobei $\overline{x}$ bedeute, dass man x mit dem geeigneten Vielfachen von 2 nach $(-1,1]$ verschieben muss.

Die Bahn ist periodisch genau dann, wenn man endlich viele Reflexionspunkte erhält (die sich immer wieder wiederholen).

Wir müssen also zeigen, um zu zeigen dass man jedem Punkt auf der unteren Kante beliebig nahe kommt:

wenn die Bahn nicht periodisch ist (man also in der Liste $\overline{T}, \overline{2T}, \overline{3T}, \dots$ unendlich viele verschiedene Punkte hat), dann kommt man einem gegebenen Punkt $y \in (-1,1]$ beliebig oft beliebig nahe.

Dazu benutzen wir das Taubenloch-Prinzip: wenn es unendlich viele verschiedene Punkte in der Liste gibt, müssen sich für vorgegebenes $c > 0$ mindestens 2 verschiedene um weniger als c annähern (das endliche Intervall $(-1,1]$ hat sonst nicht genug Platz), etwa $\overline{aT}$ und $\overline{(a+n)T}$ mit $a, n \in \mathbb{N}$.

Betrachte nun die Punkte $\overline{aT}, \overline{(a+n)T}, \overline{(a+2n)T}, \overline{(a+3n)T}, \dots$. Wir wissen: der Abstand zwischen dem ersten Paar ist kleienr als c. Das bedeutet, dass der Abstand nT zwischen aT und $(a+n)T$ ein Vielfaches von 2 plus eine Zahl kleiner als c ist. Dies gilt natürlich dann auch für $(a+n)T$ und $(a+2n)T$, genauso für $(a+2n)T$ und $(a+3n)T$,...

Dies bedeutet, dass unsere Reflexionspunkte $\overline{(a+kn)T}, \overline{(a+(k+1)n)T}$ in $(-1,1]$ ebenfalls jeweils Abstand kleiner c haben (mit einer Ausnahme: das vielfache von 2 könnte sich verschieben und man springt von einem Ende des Intervalls $(-1,1]$ zum anderen).

Jedenfalls erkennt man, dass man das ganze Interval $(-1,1]$ mit äquividistanten Punkten mit jeweils Abstand $< c$ durchläuft, und so auch jedem Punkt bis auf mindestens Abstand c nahe kommt. In der Tat läuft man zyklisch immer weiter und wird so jedem Punkt sogar unendlich so nahe kommen.

2.18 Theorem. *Trotzdem werden unendlich viele Punkte des Randes nicht getroffen.*

Tatsächlich ist die Menge der Punkte, welche nicht getroffen wird, unendlich viel größer als die Menge, welche getroffen wird.

Dies wird das Cantor-Diagonalphänomen genannt.

Beweis. Wir machen eine Liste aller durchlaufenen Zahlen aus $(-1,1]$, wobei wir diese als Dezimalbrüche aufschreiben. Dabei wollen wir nie einen Dezimalbruch benutzen, der periodisch mit 9 endet.

Wir zeigen nun dass (ganz egal, wie so eine Liste aussieht) Zahlen aus $(-1,1]$ fehlen.

Eine fehlende Zahl erhält man z.B. auf folgende Weise als Dezimalzahl mit Dezimalbruchentwicklung $0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$:

die k-ten Nachkommaziffer a_k setzen wir gleich 7, wenn die k-te Nachkommaziffer der k-ten Zahl in unserer Liste nicht 7 ist, sonst auf 3.

Die so erzeugte Zahl ist nicht in der Liste, weil sie sich von jeder Zahl in der Liste an mindestens einer Stelle unterscheidet (so haben wir sie ja gerade gemacht).

Beachte, dass man sich ganz viele andere Konstruktionsregeln ausdenken kann, die andere fehlende Zahlen produzieren. □

2.19 Aufgabe. Wir haben insgeheim auf den Zahlen $(-1,1]$ eine Addition benutzt; zur Vereinfachung betrachten wir statt dessen $[0,1)$: die Summe zweier Zahlen $x, y \in [0,1)$ ist definiert als $\overline{x+y}$, wobei wie vorher $\overline{a} \in [0,1)$ aus a durch Addition einer geeigenten ganzen Zahl entstehlt (der Nachkommaanteil von a).

Zeige: mit dieser Addition wird $[0, 1)$ eine abelsche Gruppe (auch $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ genannt); bestimme alle Torsionselemente.

2.4 Billard im gleichseitigen Dreieck

Leider funktioniert der Reflexionstrick, der die Billardbahnen im Quadrat so transparent liefert, nur in sehr wenigen Dreiecken. Eine Ausnahme sind rechtwinklige Dreiecke (Hälften von Rechtecken, so dass die Billard-Bahnen denen von Rechtecken nahe verwandt sind).

Eine interessantere andere Ausnahme ist das gleichseitige Dreieck.

2.20 Aufgabe. Reflexionen am gleichseitigen Dreieck liefern die Pflasterung der Ebene durch Honigwaben-gleichmäsige Sechsecke.

2.21 Aufgabe. Bestimme Winkel, Inkreis- und Umkreisradius, Fläche im regelmäsigen n-Eck (mit Kantenlänge 1).

Zeige: eine Pflasterung der Ebene kann man nur mit regelmäsigen $3, 4, 6$-Ecken erhalten.

Zeige: das Verhältnis von Fläche zu Umfang wird beim regelmäsigen n-Eck mit wachsendem n immer größer. Das ist einer der Gründe, warum Honigwaben aus Sechsecken gebildet werden.

2.22 Aufgabe. Konstruiere mit Hilfe der Honigwaben-Auffaltung verschiedene periodische Billardbahnen (mit verschiedenen Perioden) im gleichseitigen Dreieck.

3 Billard im Kreis

Wir wollen jetzt noch Billard in einem Gebiet mit gekrümmtem Rand analysieren. Das einfachste solche Gebiet ist sicher der Kreis. Insbesondere ist hier klar, was die Tangenten sind: sie stehen orthogonal auf den Radien (den Verbindungslinien der Randpunkte mit dem Mittelpunkt).

Es gibt ein neues Phänomen:

3.1 Theorem. *Jede Billardbahn im Kreis hat einen Bereich, der nicht erreicht wird.*

Wenn S ein Streckenabschnitt der Billardbahn (eine Sehne im Kreis ist), so wird der Kreis mit selbem Mittelpunkt, und mit Radius der Abstand des Mittelpunkts von S zum Mittelpunkt des Kreises, nicht von der Billardbahn durchquert.

Beweis. Symmetrieargument: die nächste Sehne der Billardbahn erhält man durch Reflektion der vorigen an einem Durchmesser; sie wird tangential zum selben "Innkreis" sein (der durch die Reflexion ja in sich selbst abgebildet wird). □

3.2 Definition. Den Rand des nicht erreichten Kreises der Billardbahn nennt man *Kaustik* der Billardbahn.

3.3 Aufgabe. Berechne die Fläche des nicht-erreichten Bereichs.

3.4 Aufgabe. Bestimme die verschiedenen involvierten Winkel nach Reflexionsgesetz bei der Reflexion an der Kreislinie (Winkel des Sehnendreiecks, Winkel zur Tangente, Winkel zum Radius,...) und die Relationen zwischen diesen.

3.5 Aufgabe. Gegeben sein der Winkel am Mittelpunkt des Dreiecks, welches aus Mittelpunkt und zwei aufeinanderfolgenden Reflexionspunkten am Kreis besteht. Einer dieser beiden liege auf dem untersten Punkt des Kreises.

Berechne die Steigung der hiervon ausgehenden Billardbahn.

Wir wollen auch hier (wie bei der Diskussion der Reflexionspunkte an der unteren Kante des Quadrats) die (Reflexions)punkte der Kreislinie durch $\phi \in [0, 360)$, den Winkel des entsprechenden Punkts zur positiven x-Halbachse, kodieren.

Das Reflexionsgesezt liefert: wenn die erste Sehne von ϕ bis $\phi + \alpha$ läuft, so die nächste von $\phi + \alpha$ bis $\phi + 2\alpha$, danach von $\phi + 2\alpha$ bis $\phi + 3\alpha$.

Dies deshalb, weil die Sehnen der Billardbahn durch Reflexion an den Duchmessern auseinander hervorgehen. Dabei bleibt der Sehnendreieck-Innenwinkel erhalten; welches gerade die Differenz der Winkelparameter der Punkte des Kreises ist. Also bleibt deren Differenz erhalten.

Natürlich muss man, um Winkel in $[0, 360)$ zu erhalten, ggf ein Vielfachen von 360 addieren/subtrahieren.

Wir erkennen genau das gleiche Phänomen wie bei den Reflexionspunkten an der unteren Kante des Quadrats: es wird immer wieder dieselbe Zahl addiert, man muss aber dann den "Rest modulo Addition von 360" nehmen.

Als Folgerung erhält man:

3.6 Theorem. *Die n-periodischen Bahnen im Kreis durchlaufen als Reflexionspunkte die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks, aber nicht unbedingt in aufeinanderfolgender Reihenfolge.*

Der entsprechende "Innenwinkel" ist $\alpha = 360\frac{k}{n}$.

Für alle nicht-rationalen Vielfachen von α ist die Billardbahn nicht periodisch. Dann kommt sie jedem Punkt auf dem Rand des Kreises beliebig nahe, und das unendlich oft. Trotzdem werden uendlich viele Punkte des Randes nicht erreicht.

3.7 Aufgabe. Diskutiere die Details dieser Behauptungen, entsprechend der Argumentation für das Quadrat.

3.8 Bemerkung. Tatsächlich kommt man auch allen Punkten ausserhalb des Kaustik-Kreises beliebig nahe (und das unendlich oft):

Sei ein solcher Punkt P gegeben. Es gibt eine Sehne S mit der richtigen Länge (Innenwinkel des Sehnendreiecks α), die durch den Punkt geht.

Ihre Randpunkte werden vielleicht nicht von der Billardbahn getroffen, aber Punkte beliebig nahe daran; die davon ausgehenden Segmente der Billardbahn sind dann beliebig nahe an der Sehne S, so dass man auch dem Punkt P beliebig nahe kommt.

Durch geeignete Rotation können wir erreichen, dass $\phi = 0$. Wenn diese Situation verstanden ist, kann man die Informationen durch "Rückrotation" auch auf jeden anderen Anfangspunkt übertragen.

4 Ellipsen

4.1 Definition. Seien $a \geq b > 0$. Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$ wird *Ellipse* mit *großer Halbachse* a und *kleiner Halbachse* b genannt.

Die Punkte $(e,0)$ und $(-e,0)$ mit $e^2 = a^2 - b^2$ werden *Brennpunkte* der Ellipse genannt.

Beachte: wenn $a = b$ erhalten wir einen Kreis mit Radius $a = b$, die beiden Brennpunkte sind gleich, gleich dem Mittelpunkt des Kreises.

4.2 Aufgabe. Zeige, dass für jeden Punkt der Ellipse gilt: die Summe der Abstände zu den Brennpunkten ist gleich (nämlich $2a$).

4.3 Aufgabe. Zeige, dass die Menge aller Ellipsen mit festen Brennpunkten $(e,0)$ und $(0,e)$ genau die Menge der Ellipsen

$$E_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1\}$$

wobei $a > b$ so, dass $a^2 - b^2 = e^2$. Welche Werte durchläuft λ dabei?

Zeige, dass jeder Punkt der Ebene ausserhalb des Intervalls $[-e,e] \times \{0\}$ durch genau eine dieser Ellipsen geht.

4.4 Definition. Die Kurven $H_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1\}$ mit $-a^2 < \lambda < -b^2$ heißen Hyperbeln mit Brennpunkten $(-e,0)$ und $(e,0)$.

Sie erfüllen:

Die Punkte der Hyperbel sind genau die Punkte der Ebene, so dass der Betrag der Differenz der Abstände zu den Brennpunkten konstant ist.

4.5 Aufgabe. Zeige diese "Gärtnerdefinition" der Hyperbel; welchen Wert hat diese Differenz für die H_λ die wir betrachten.

4.6 Aufgabe. Zeige, dass die Hyperbel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ kongruent ist zu einer Hyperbel der in der Schule üblichen Form, also zu $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ und } y = c/x\}$. Welches c ist richtig. Wo liegen die Brennpunkte von $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1/x\}$.

Zeige, dass jeder Punkt der Ebene außerhalb der x-Achse auf genau einer der Hyperbeln H_λ aus Definition 4.4 liegt.

4.1 Tangenten und Reflexion an Ellipse

Die Ellipse erhält man aus dem Kreis durch Stauchung/Streckung: die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x,y) \mapsto (ax, by)$ ist eine solche Stauchung/Streckung und bildet den Einheitskreis auf die Ellipse ab.

Da diese Abbildung Geraden auf Geraden abbildet, wird sie auch die Tangenten an den Kreis auf die Tangenten an die Ellipse abbilden (wir nehmen dies als Definition der Ellipsentangenten).

Achtung: die Stauchung bildet im allgemeinen nicht orthogonale Geraden auf orthogonale Graden ab; also kann man *nicht* die Billardbahn in der Ellipse durch Stauchung aus der Billardbahn im Kreis gewinnen.

4.7 Beispiel. Beispiele für Tangenten; einfache Fälle der Schnittpunkte mit den Achsen.

4.8 Aufgabe. Berechne für konkrete Fälle Tangenten an die Ellipse.

4.9 Theorem. *Ein Strahl durch einen Brennpunkt wird nach Reflexion durch den anderen Brennpunkt geschickt.*

Beweis. Dies kann man mit einiger Mühe geometrisch beweisen. (**Eine komplizierte Aufgabe für zu Hause.**)

Es gibt aber auch eine interessante analytische Begründung.

Hierzu zunächst: Sei L eine Gerade, z.B. die x-Achse, und P, Q zwei Punkte in der Ebene (auf derselben Seite von L, z.B. für die x-Achse in der unteren Halbebene).

Die Gerade, welche von P ausgehend an L reflektiert wird (am Punkt R) und dann Q erreicht erfüllt, dass die Abstandssumme $d(P,R) + d(Q,R)$ minimal ist (unter allen möglichen Punkten auf L). Dies sieht man sofort, wenn man statt dessen den Punkt Q an L zu Q' reflektiert und die kürzeste Verbindung von P nach Q' betrachtet (eine Strecke).

Wenn man (für L die x-Achse) also die Funktion $x \mapsto d(P,(x,0)) + d(Q,(x,0))$ anschaut, so hat deren Ableitung eine Nullstelle (Rechnung zeigt: die einzige Nullstelle) für das x mit $(x,0) = R$. **Aufgabe: überprüfe das analytisch**.

Da die Tangente an eine glatte Kurve K am Punkt $P \in K$ die Gerade ist, welche sich nahe P am besten an die Kurve annähert (die beste Lineare Approximation), gilt diese Beschreibung auch, wenn man die Tangente durch die Kurve ersetzt:

Sind P, Q Punkte und ist $t \mapsto R(t)$ eine Funktion, welche die Kurve mit positiver Geschwindigkeit durchläuft, so gilt: falls $d(P, R(t)) + d(Q, R(t))$ an t_0 die Ableitung 0 hat, so ist die Reflexion (an der Kurve) der Strecke von P nach $R(t_0)$ genau die Strecke von $R(t_0)$ nach Q, und umgekehrt.

Da für jede solche Strecke vom Brennpunkt B_1 zum Brennpunkt B_2 die Funktion $d(B_2, R(t)) + d(R(t), B_2)$ konstant ist, ist deren Ableitung Null; also ist die Reflexionseigenschaft bewiesen. □

4.10 Theorem. *Eine Billardbahn durch einen Brennpunkt der Ellipse nähert sich immer mehr der großen Halbachse an.*

Beweis. Betrachte einen Startpunkt P_0 auf der unteren Hälfte der Ellipse, und eine Bahn welche zunächst durch den linken Brennpunkt läuft (dies kann man durch Reflexionen erreichen).

Nach Reflexion an der oberen Hälfte der Ellipse läuft die Bahn durch den anderen Brennpunkt und trifft am Punkt P_1 wieder die untere Hälfte der Ellipse.

Aus der Lage der Brennpunkte ergibt sich sofort, dass P_1 rechts von P_0 liegt.

Induktiv erhalten eine Folge von Punkte $P_0, P_1, P_2, \dots$ auf der unteren Hälfte der Ellipse, welche imme weiter nach rechts laufen. Wie jede solche beschränkte Folge hat auch diese einen Grenzwert P_∞. Für diesen muss dann (als Grenzwert) gelten, dass die von ihm durch einen Brennpunkt laufende Strecke auch durch den anderen Brennpunkt läuft (da man nach der Reflektion wieder am selben Punkt ankommt); also handelt es sich bei P_∞ um den rechten Punkt auf der großen Achse der Ellipse und bei der "Grenzstrecke" um genau diese große Halbachse.

□

4.11 Theorem. *Für jede Billardbahn (die nicht durch die Brennpunkte läuft) in der Ellipse gibt es eine Kaustik und einen davon abgegrenzten "unmöglichen" Bereich; dieser ist entweder (wenn die Sehnen der Billardbahn nicht durch die Verbindungsstrecke zwischen den Brennpunkten läuft) eine Ellipse mit denselben Brennpunkten (tangential an die Sehne) oder (wenn die Billardbahn die Verbindungsstrecke zwischen den Brennpunkten durchläuft) besteht aus den zwei*

Komponenten einer Hyperbel (deren Brennpunkte ebenfalls die Brennpunkte der Ausgangsellipse sind). Im zweiten Fall ist der verbotene Bereich in der Nähe der Enden der großen Halbachsen.

Beweis.
Der folgende Beweis folgt [4].

Betrache nur den ersten Fall (die Sehnen der Billardbahn schneiden nicht die Verbindungsstrecke der beiden Brennpunkte F_1, F_2).

Wir zeigen geometrisch, dass alle Segmente der Bahn tangential zur gleiche Ellipse mit Brennpunkte F_1, F_2 sind; diese Ellipse ist dann die gesuchte.

Starte dazu mit P_0 auf der Reflexionsellipse und einer Bahn, welche die Ellipse zum ersten Mal wieder in P_1 trifft. Nach Reflexion sei P_2 der zweite Punkt auf der Ellipse. Nach Reflexionsgesetz ist der Winkel zwischen Tangente an P_1 und P_0P_1 gleich dem Winkel zwischen Tangente und P_1P_2.

Ausserdem wissen wir, dass die Strecke F_1P_1 zu P_1F_2 reflektiert wird; dafür gilt also die entsprechende Winkel-Gleichheit.

Damit gilt auch: $\alpha = W(P_0P_1F_1) = W(F_2P_1P_2)$ (wobei $W(P_0P_1F_1)$ für den Winkel an P_1 zwischen den beiden Strecken P_0P_1 und F_1P_1).

Sei nun F_1' die Reflexion von F_1 an der Gerade P_0P_1 und F_2' die Reflexion von F_2 an P_1P_2.

Sei T der Schnittpunkt der Geraden P_0P_1 und F_2F_1'; und sei S der Schnittpunkt von P_1P_2 und F_1F_2'.

Es gibt jeweils eine eindeutige Ellipse durch T und durch S mit Brennpunkten F_1 und F_2.

Wir zeigen jetzt, dass diese beiden Ellipsen identisch sind und dass P_0P_1 (und genauso auch P_1P_2 tangential an diese Ellipse liegen. Induktiv erhält man dann, dass auch nach jeder weiteren Reflexion die Sehne tangential an diese Ellipse liegt und sie somit die gesuchte Ellipse ist.

Um zu zeigen, dass die Ellipsen zusammenfallen, müssen wir nur zeigen, dass für die Streckenlängen gilt: $F_1T + TF_2 = F_1S + SF_2$. Beachte, dass aus Symmetriegründen gilt $F_1T = F_1'T$ und $F_2S = F_2'S$; wir müssen also nur zeigen, dass $F_1'F_2$ und F_1F_2' dieselbe Länge haben.

Dazu zeigen wir, dass die Dreiecke $F_1F_2'P_1$ und $F_1'F_2P_1$ kongruent sind:

die Seitenlängen F_1P_1 und $F_1'P_1$ sowie $F_2'P_1$ und F_2P_1 sind jeweils gleich (selbe Symmetrie wie eben) und der Winkel $W(F_1P_1F_2') = W(F_1P_1F_2) + 2W(F_2P_1P_2) = W(F_1P_1F_2) + 2W(P_0P_1F_1) = W(F_1'P_1F_2)$.

Zuletzt zeigen wir, dass P_0P_1 tatsächlich tangential zur neuen kleineren Ellipse ist. Dies ist äquivalent dazu, dass der Strahl von F_0T tatsächlich an P_0P_1 zu TF_1 reflektiert wird. Oder äquivalent, dass die Reflektion von F_0 an P_0P_1 genau auf der Geraden TF_1 liegt. So haben wir T aber ja gerade gewählt. □

4.12 Aufgabe. Zeige, dass es in jeder Ellipse periodische Billardbahnen mit jeder beliebigen vorgegebenen Periode gibt und konstruiere solche. (Hierfür werden Symmetrie, aber auch Stetigkeitsargumente gebraucht).

Zeige, dass es in einer Ellipse, welche kein Kreis ist, Punkte gibt, durch welche keine periodische Billardbahn mit Periode 2 geht; entsprechend mit 3,. . . .

Literatur

[1] Marcel Berger. *Geometry revealed.* Springer, Heidelberg, 2010. A Jacob's ladder to modern higher geometry, Translated from the French by Lester Senechal.

[2] Stefan Halverscheid. Mathematische billardspiele am tag der mathematik an der carl von ossietzky universität oldenburg am 5.11.2003. http://www.tdm.uni- oldenburg.de/2003/abstracts/Halverscheid_Billard.pdf, 2003.

[3] Lena Schick. Mathematisches billard im einheitskreis. Facharbeit im Seminarfach Mathematik, Felix-Klein-Gymnasium Gottingen, 2013.

[4] Serge Tabachnikov. *Geometry and billiards*, volume 30 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2005. 4.1

Die Bücher von Berger und Tabachnikov gibt es auch in deutscher Übersetzung.