

Der Spektralindex perturbierter
semi-Riemannscher Geodäten als
Windungszahl

Diplomarbeit

vorgelegt von

Nils Waterstraat

aus

Wolfsburg

angefertigt

im Institut für Mathematik

der Georg-August-Universität zu Göttingen

2007

Vorwort

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) besagt das klassische Morse Index Theorem, dass die Anzahl der mit Vielfachheiten gezählten konjugierten Punkte entlang einer Geodäte $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ mit dem Morse Index der zweiten Variation des Riemannschen Wirkungsfunktionals $\mathcal{A}(\eta) = \int_a^b g(\eta', \eta') dt$ an dem kritischen Punkt γ übereinstimmt. Unter vergleichsweise geringfügigen Modifikationen der hier betrachteten zweiten Variation des Wirkungsfunktionals stellt sich zudem, im Rahmen der physikalisch motivierten kausalen Geodäten einer Lorentz Mannigfaltigkeit, die Gültigkeit vollkommen analoger Aussagen heraus. Diese Theoreme haben weitreichende Erkenntnisse hervorgebracht. Neben der aus der Morse Theorie kommenden Untersuchungen der Topologie von Wegeräumen ist im Fall Riemannscher Mannigfaltigkeiten insbesondere die Bott-Periodizität zu nennen, wohingegen im Fall kausaler Lorentz Geodäten Aussagen physikalischer Relevanz gewonnen werden konnten (vgl. hierzu [Mi69] bzw. [BEE96]). Obwohl hiermit die aus mathematisch und physikalischer Sicht bedeutendsten Fälle erfasst sind, besteht dennoch ein zu rechtfertigendes Interesse an der Behandlung der bisher missachteten raumartigen Geodäten mit dem Ziel ein besseres Verständnis für die globale Beschaffenheit von Lorentz Mannigfaltigkeiten zu erhalten. Bedauerlicherweise zeigt sich, dass eine weitere Verallgemeinerung des klassischen Morse Index Theorems auf beliebige Geodäten einer Lorentz Mannigfaltigkeit a priori zum Scheitern verurteilt ist. Hierfür sind hauptsächlich folgende Gründe erwähnenswert

- Durch eine einfache Überlegung kann eingesehen werden, dass der Morse Index einer Geodäte stets unendlich ist. Die diesen Missstand im kausalen Fall behebbenden Manipulationen der zweiten Variation des Wirkungsfunktionals bleiben im Fall raumartiger Geodäten erfolglos.
- Die Menge der konjugierten Punkte entlang einer raumartigen Geodäte ist nicht notwendig diskret.

Diesen durchaus delikaten Schwierigkeiten konnte bisher durch zwei grundlegend verschiedene Ansätze entgegengetreten werden:

- Betrachtung gewisser Klassen von Lorentz-Mannigfaltigkeiten, für die obige Schwierigkeiten umgangen werden können beziehungsweise nicht auftreten.
- Aufsuchen geeigneter Verallgemeinerungen der verwendeten Größen im klassischen Morse Index Theorem.

In [Ma94] wird die erste Möglichkeit für sogenannte stationäre Lorentz Mannigfaltigkeiten bearbeitet, wobei ein zum klassischen Morse Index Theorem analoges Resultat erzielt wird. Mit Methoden der unendlichdimensionalen Morse Theorie lässt sich hiermit zudem die Topologie von Wegeräumen mit den konjugierten Punkten von Geodäten als kritische Punkte des Wirkungsfunktionals über die gewöhnlichen Morse-Relationen in Verbindung bringen. Da die bisher explizit bekannten Lösungen der Einsteingleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie von vergleichsweise einfacher Form sind, können trotz der hierbei durchaus stringenten Forderung an die zugrundeliegende Metrik Resultate für Mannigfaltigkeiten physikalischer Bedeutung gewonnen werden.

Die Beschäftigung mit der Aufsuche gewisser Verallgemeinerungen der im Morse Theorem verwendeten Größen ist schon methodisch von hierzu vollkommen verschiedener Natur, da nun statt einer gezielten Meidung der oben genannten Schwierigkeiten die direkte Konfrontation mit diesen notwendig ist. Man denke hierbei etwa an die Zählung konjugierter Punkte im klassischen Morse Index Theorem, die nun nicht mehr sinnvoll durchzuführen ist. Der Kern der so entstandenen Theorie besteht damit zunächst in der Aufsuche geeigneter Begriffsbildungen der Mathematik, die eine weiterhin sinnvolle Zuweisung eines Index zur zweiten Variation des Wirkungsfunktionals und zu der Menge der konjugierten Punkte erlauben und durch deren Gleichheit eine dem klassischen Morse Index Theorem formal analoge Aussage beweisbar ist. Es ist zunächst zu beachten, dass die gewöhnliche Anwendung der Methoden der Morse Theorie zum Erhalt von Aussagen zur Topologie von Wegeräumen hierbei in weite Ferne rückt. Stattdessen ist das direkte Ziel zunächst eher die Aufsuche eventuell weiterhin bestehender Zusammenhänge zwischen den konjugierten Punkten einer Geodäte und der zugehörigen zweiten Variation des Wirkungsfunktionals. Es stellt sich zudem heraus, dass die Einschränkung auf eine Lorentz Mannigfaltigkeit unbedeutend ist und man stattdessen beliebige semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten betrachten kann, so dass nun abschließend nach einem Index Theorem allgemeiner Gültigkeit für Geodäten in beliebigen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten gesucht wird. Die Aufsuche eines Index Theorems dieser Allgemeinheit bietet außerdem die Möglichkeit gefundene Resultate mit dem stets enthaltenen Spezialfall einer Riemannschen Mannigfaltigkeit zu vergleichen.

Der erste Durchbruch bezüglich dieser Ideen gelang 1994 A. Helder (vgl. [Hel94]), der eine äquivalente Formulierung des klassischen Morse Index Theorems als Aussage über Randwertprobleme von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen betrachtete und versuchte diese auf den semi-Riemannschen Geodäten entsprechenden Fall zu verallgemeinern. Zwar konnten spä-

ter gravierende Fehler in den Argumentationen Helfers entdeckt werden, dennoch führten seine grundsätzlichen Ideen nach weiterer hauptsächlichlicher Bearbeitung von Piccione und Tausk zum ersten Morse Index Theorem für beliebige Geodäten einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit (vgl hierzu die Arbeiten [MPT02] und [CEPPT02]). Die hierbei verwendete Verallgemeinerung des Morse Index der zweiten Variation des Wirkungsfunktionalis ist durchaus kompliziert und geometrisch recht bedeutungslos. Von besonderer Bedeutung in diesem Zusammenhang ist aber die Erkenntnis mit dem Maslov Index der symplektischen Geometrie ein geeignetes Werkzeug zur Untersuchung konjugierter Punkte entlang semi-Riemannscher Geodäten gefunden zu haben, der zudem als Verallgemeinerung des Zählens konjugierter Punkte verwendet werden kann. Mit den Arbeiten [GMPT01] und [PT00] konnte zudem eine weitere Möglichkeit eines verallgemeinerten Morse Index präsentiert und die Gleichheit zu den eben erwähnten Indizes nachgewiesen werden. Diese Verallgemeinerung wird mittels des klassischen Morse Index gewisser geometrisch motivierter Einschränkungen der zweiten Variation des Wirkungsfunktionalis gebildet und befindet sich folglich in erstaunlicher Nähe zur Definition des klassischen Falls.

In der recht aktuellen Arbeit [MPP05] von M. Musso, J. Pejsachowicz und A. Portaluri wurde neben der Verwendung des Maslov Index zwei weitere Möglichkeiten der Verallgemeinerung der Größen des klassischen Morse Index Theorems präsentiert und mit diesen eine Verallgemeinerung des klassischen Morse Index Theorems auf den allgemeineren Fall sogenannter perturbierter Geodäten in semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten bewiesen. Hierbei finden sowohl der Brouwersche Abbildungsgrad aus der Nichtlinearen Funktionalanalysis als auch der Spektralfluss selbstadjungierter Fredholmoperatoren Verwendung.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit diesen zum Erhalt allgemeiner Morse Index Theoreme definierten Größen, wobei das hauptsächlichliche Interesse dem mittels des Spektralflusses als Verallgemeinerung des klassischen Morse Index in [MPP05] definierten Spektralindex gilt. Bedauerlicherweise existiert bisher kaum Literatur zu diesen Themen, so dass bereits zu den Grundlagen der Theorie häufig nur auf Fachartikel zurückgegriffen werden kann. Ein weiteres grundsätzliches Anliegen dieser Arbeit besteht daher in der Aufarbeitung der zum Verständnis der Morse Theorie semi-Riemannscher Geodäten notwendigen mathematischen Grundlagen, so dass zum Einen eine genauere Betrachtung der oben genannten Schwierigkeiten der Morse Theorie auf semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten ermöglicht wird und zum Anderen die Aussage des Morse Theorems von Musso, Pejsachowicz und Portaluri aus [MPP05] verstanden werden kann.

Die Arbeit gliedert sich in vier Teile. Im ersten Teil werden zunächst einige funktionalanalytische Grundlagen, sowie Grundbegriffe zu Hilbertmannigfaltigkeiten und zur unendlichdimensionalen Morse Theorie bereitgestellt. Beginnend mit der rein algebraischen Komplexifizierung reeller Vektorräume wird diese funktorielle Konstruktion zunächst auf reelle Hilberträume und deren Operatoren übertragen. Neben Bereitstellung dieser Konstruktion werden anschließend der meßbare Funktionalkalkül sowie wichtige Anwendungen hiervon dargelegt. Nach einer Zusammenstellung wichtiger Grundbegriffe zu Hilbertmannigfaltigkeiten und Hilbertbündel im zweiten Kapitel wer-

den schließlich einige Grundlagen der unendlichdimensionalen Morse Theorie vorgestellt, die zum Verständnis der Morse Index Theoreme notwendig oder wenigstens hilfreich sind.

Im zweiten Teil der Arbeit werden die von der Theorie der Geodäten semi-Riemannscher Mannigfaltigkeiten vollkommen unabhängigen Hilfsmittel bereitgestellt, die zur Verallgemeinerung der Größen im klassischen Morse Index Theorem verwendet und hier als Homotopieinvarianten der Analysis bezeichnet werden. Im ersten Kapitel dieses Abschnittes wird der aus der nicht-linearen Funktionalanalysis bekannte Brouwersche Abbildungsgad konstruiert, der später zur Verallgemeinerung des Zählens konjugierter Punkte verwendet wird. Sämtliche hier präsentierte Resultate finden sich in gängiger Literatur und könnten mit einem entsprechendem Verweis auch weggelassen werden. Die hier gewählte Darstellung der Konstruktion ist allerdings überschaubar und gibt zugleich sowohl eine Erläuterung des Titels der Homotopieinvariante der Analysis, als auch ein Modell für ein generelles technisches Vorgehen zur Behandlung oben genannter Schwierigkeiten bei der Zuweisung von Indizes zu semi-Riemannschen Geodäten.

Im darauf folgenden Kapitel des zweiten Teils wird eine recht ausführliche Darlegung der Theorie des Spektralflusses selbstadjungierter Fredholmoperatoren auf reellen Hilberträumen gegeben. Hierbei werden zunächst, insbesondere in Hinblick auf den vierten Teil der Arbeit, Betrachtungen zur Topologie des Raumes selbstadjungierter Fredholmoperatoren gemacht, wobei hauptsächlich Resultate der Arbeit [AS69] nachvollzogen werden, in der bedauerlicherweise viele Details der Konstruktionen der Leserschaft überlassen wurden. Auf diese recht abstrakten topologischen Konstruktionen folgt eine moderne Definition des Spektralflusses für selbstadjungierte Fredholmoperatoren nach [FPR99]. Diese wird hier zur Präsentation des Spektralflusses zunächst anderen möglichen Definitionen vorgezogen, da sie im Morse Theorem [MPP05] zur Definition des bereits erwähnten Spektralindex verwendet wird. Nach Abschluss der Konstruktion und Präsentation dieser recht analytischen Definition des Spektralflusses wird, unter Verwendung seiner grundlegenden Eigenschaften, dieser als Isomorphismus zwischen der Fundamentalgruppe der total indefiniten selbstadjungierten Fredholmoperatoren und der unendlich zyklischen Gruppe nachgewiesen. Mit diesem Resultat wird die bereits unter sehr geringen Bedingungen geltende Eindeutigkeit des Spektralflusses durch Übertragung von Ideen aus [Les05] auf den reellen Fall gezeigt. Abschließend wird die wohl populärste Variante der Definition des Spektralflusses aus [Phi96] präsentiert und unter Verwendung des zuvor nachgewiesenen Eindeutigkeitsresultates als identisch mit der Definition aus [FPR99] erkannt werden.

Das letzte Kapitel des zweiten Teils präsentiert den Maslov Index in der speziell zur Anwendung auf semi-Riemannsche Geodäten gegebenen Konstruktion aus dem Artikel [MPT02]. Für die hier gewählte Definition des Maslov Index und späterer Anwendungen auf Geodäten semi-Riemannscher Mannigfaltigkeiten ist eine möglichst konkrete Beschreibung der Lagrange- Grassmannschen unverzichtbar, die im ersten Teil dieses Kapitels behandelt wird. Nach der anschließenden Konstruktion des Maslov Index werden seine Anwendung auf Differentialgleichungen diskutiert.

Erst im nun folgenden dritten Teil der Arbeit werden Geodäten semi-Riemannscher Mannigfal-

tigkeiten betrachtet. Im ersten Kapitel dieses Teils werden der Begriff der perturbierten Geodäten sowie Jacobifelder entlang dieser und konjugierte Punkte definiert. Nach Klärung grundlegender Begrifflichkeiten wird das im vorigen Teil der Arbeit bereitgestellte Konzept des Maslov Index auf diese Geodäten angewendet und prinzipiell bereits gezeigt, dass hiermit eine sinnvolle Verallgemeinerung des Zählens konjugierter Punkte entlang Geodäten zur Verfügung steht.

In den folgenden zwei Kapiteln werden die Grundlagen für jegliche Verallgemeinerungen des im klassischen Morse Index Theorem auftretenden Morse Index der zweiten Variation des Wirkungsfunktional gegeben. Die im Fall des Beweises des klassischen Theorems weniger bedeutende Struktur des Definitionsbereiches des Wirkungsfunktional ist nun durch eine geeignete Hilbertmannigfaltigkeit zu ersetzen um insbesondere die Begriffe der unendlichdimensionalen Morse Theorie und somit der Funktionalanalysis anwendbar zu machen. Zunächst wird hierzu die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit $H^1(I, M)$ konstruiert, die als Menge aus allen Wegen $\gamma : I \rightarrow M$ in der betrachteten endlichdimensionalen Mannigfaltigkeit M , die der Sobolev Regularität H^1 genügen, besteht. Bedauerlicherweise vermeiden sämtliche Artikel zur Morse Theorie im semi-Riemannschen Fall jegliche Details dieser Konstruktion und geben keinerlei Referenz oder verweisen auf eine im hier betrachteten Fall nicht gültige Konstruktion. Eine geeignete Beschreibung dieser glatten Struktur von $H^1(I, M)$ im Kontext semi-Riemannscher Mannigfaltigkeiten scheint daher eine Lücke in den veröffentlichten Artikeln zu dem Thema zu sein. Glücklicherweise haben Mercuri, Piccione und Tausk in dem nicht veröffentlichtem Skriptum zur Morse Theorie [MPT01] einen Zugang zu dieser glatten Struktur angegeben, der scheinbar in Zusammenhang zu eigenen Forschungsergebnissen steht (vgl. [PT01]) und hier präsentiert werden soll. Ebenfalls angelehnt an dieses Werk wird im darauffolgenden Kapitel die zur Morse Theorie notwendige glatte Funktion in Form des Wirkungsfunktional vorgestellt und ihre kritischen Punkte sowie ihre Hessesche im Sinne unendlichdimensionaler Morse Theorie berechnet. Die so erhaltene Hessesche ist gerade die im klassischen Theorem als zweite Variation bezeichnete Größe, die nun aber gänzlich aus der Diskussion des Wirkungsfunktional auf der Hilbertmannigfaltigkeit $H^1(I, M)$ erhalten ist. Im nächsten Kapitel werden kurz die Aussagen des oben erwähnten Morse Index Theorems von Piccione und Tausk skizziert, wonach eine recht unproblematische Darstellung der verallgemeinerten Größen des Index Theorems aus [MPP05] gegeben wird. Insbesondere wird die mittels einer weiteren Verallgemeinerung des Spektralflusses gemachte Konstruktion des Spektralindex einer perturbierten Geodäte präsentiert.

Der vierte Teil hat die im Titel der Arbeit enthaltene Darstellung des Spektralindex als Windungszahl zum Ziel. Hierzu werden in einem ersten Kapitel Resultate zu einer topologischen Definition des Spektralflusses für geschlossene Wege total indefiniter selbstadjungierter Fredholmoperatoren komplexer Hilberträume aus der Arbeit [BW85] auf entsprechende Wege reeller Hilberträume mit invertierbaren Endpunkten übertragen. Die erzielten Ergebnisse benötigen insbesondere die Ausführungen zur Topologie des Raumes der selbstadjungierten Fredholmoperatoren aus dem zweiten Teil der Arbeit. Damit kann dann der Spektralfluss als eine Sequenz von Isomorphismen der Fundamentalgruppen verschiedener Räume dargestellt werden.

Im letzten Kapitel wird schließlich der aus der Definition des Spektralindex stammende Weg selbstadjungierter Fredholmoperatoren betrachtet und die Spektren seiner Operatoren untersucht. Unter Verwendung dieser Erkenntnisse wird das obige Verfahren zur Berechnung des Spektralflusses unter einer weiteren Modifikation auf diese spezielle Situation angewendet, womit sich der Spektralindex letztlich als Windungszahl einer auf der S^1 gegebenen stetigen Funktion präsentiert.

Bezeichnungen und Symbole

Es sollen einige Notationen und Konventionen festgelegt werden, die für die gesamte Arbeit gelten mögen und daher im Folgenden zumeist ohne weitere Erläuterungen verwendet werden.

Zunächst sei bemerkt, dass die Natürlichen Zahlen grundsätzlich nicht das Element 0 beinhalten. Mit dem Symbol I wird das Einheitsintervall $[0, 1]$ bezeichnet.

Für einen topologischen Raum X und eine Teilmenge $A \subset X$ bedeute, sofern keine diese Konvention aufhebende Bemerkung gemacht wird, stets das A mit der von X induzierten Unterraumtopologie versehen sei. Bei Betrachtung von metrischen Räumen werde die Metrik grundsätzlich mit d bezeichnet. Für eine Teilmenge $\emptyset \neq A \subset X$ eines metrischen Raumes X wird gelegentlich die durch $f(x) = d(A, x)$ auf X definierte Funktion Verwendung finden. Die gleichmäßige Stetigkeit dieser Funktion ist unmittelbar einzusehen und wird von nun an nicht mehr gesondert begründet. Gelegentlich, aber nicht zwanghaft, wird auf Sprechweisen der Kategorientheorie zurückgegriffen, die ohne weitere Erläuterungen ihrer Bedeutung verwendet werden und sämtlich dem Standardwerk [MLa72] entnommen sind.

Vektorräume seien stets über dem Körper \mathbb{C} oder \mathbb{R} verstanden und diese seien im Fall endlicher Dimension mit ihren gewöhnlichen Topologien versehen. Ein **topologischer Vektorraum** ist ein mit einer Topologie versehener Vektorraum, so dass die Addition und die skalare Multiplikation stetige Abbildungen sind. Mit den stetigen linearen Abbildungen als Morphismen bilden die topologischen Vektorräume eine Kategorie, die je nach verwendetem Grundkörper mit $\mathbf{TVS}_{\mathbb{K}}$ bezeichnet wird. Desweiteren sei für $E, F \in \mathfrak{Ob}(\mathbf{TVS}_{\mathbb{K}})$ mit $\mathcal{L}(E, F)$ die Menge aller Morphismen und $\mathcal{L}(E)$ die Menge aller Endomorphismen benannt.

Definiert man nun $\mathfrak{Ob}(\mathbf{BAN}_{\mathbb{K}})$ als die topologischen Vektorräume, deren Topologie durch eine Norm induziert werden kann, mit dem diese Räume Banachräume sind, so erhält man eine volle Unterkategorie von $\mathbf{TVS}_{\mathbb{K}}$. Durch ein analoges Vorgehen mit Hilberträumen ergibt sich zudem die volle Unterkategorie $\mathbf{HILB}_{\mathbb{K}}$ von $\mathbf{BAN}_{\mathbb{K}}$. Für $E, F \in \mathfrak{Ob}(\mathbf{BAN}_{\mathbb{K}})$ werden zusätzlich die Isomorphismen mit $GL(E, F)$ und die Automorphismen mit $GL(E)$ benannt. Alternativ werden solche Abbildungen auch als topologische Isomorphismen bezeichnet. Bekanntlich gehört für $E, F \in \mathfrak{Ob}(\mathbf{BAN}_{\mathbb{K}})$ jedes bijektive Element aus $\mathcal{L}(E, F)$ bereits zur Menge $GL(E, F)$. Diese Tatsache wird im Folgenden als das **Prinzip der offenen Abbildung** benannt.

Für Banachräume X, Y, Z bezeichne $B(X, Y; Z)$ den Banachraum aller beschränkten bilinearen Abbildungen $X \times Y \rightarrow Z$ versehen mit der gewöhnlichen Norm. Speziell sei $B(X, X; Z) = B(X; Z)$ und $B(X, Y; \mathbb{K}) = B(X, Y)$. Desweiteren bezeichne $B_{sym}(X; Z)$ den Banachraum aller beschränkten symmetrischen Bilinearformen. Es besteht bekanntlich ein isometrischer topologischer Isomorphismus $B(X, Y; Z) \cong \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y, Z))$. Unter Verwendung dieses isometrischen Isomorphismus wird teilweise $B_{sym}(V)$ für einen endlichdimensionalen Vektorraum V als Unterraum von $\mathcal{L}(V, V^*)$ aufgefasst, sowie für Banachräume X, Y, Z statt des Nachweises der Stetigkeit einer bilinearen Abbildung aus $B(X, Y; Z)$ die Stetigkeit des entsprechenden Elementes in $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y, Z))$ nachgewiesen. Hierbei bezeichne für einen endlichdimensionalen Vektorraum V stets V^* den zugehörigen Dualraum. Findet dieses Symbol Verwendung bei Abbildungen, so

bezeichnet es die bekannten Operationen des Pullbacks beziehungsweise Pushforwards einer Bilinearform.

Hilberträume seien grundsätzlich als separabel vorausgesetzt. Desweiteren bezeichne $\mathcal{S}(H) \subset \mathcal{L}(H)$ für einen Hilbertraum H die Menge aller selbstadjungierten Operatoren.

Danksagung

Mein Dank gilt zunächst Prof. Dr. Thomas Schick für die Vergabe dieser so interessanten Themenstellung, die stets bestehende Möglichkeit ihn für Fragen aufzusuchen und insbesondere für die mir gegebenen Freiheiten während des Erstellens dieser Arbeit, die es mir erlaubten eigene Ideen zu entwickeln. Desweiteren bin ich Prof. Dr. Andreas Thom zu großem Dank verpflichtet, der ebenso bei auftretenden Fragen immer bereit war seine Zeit für mich zu opfern. Zudem gilt mein Dank Prof. Dr. Jacobo Pejsachowicz von der Politecnico di Torino der mir auf mehrere als E-Mail gesendete Fragen zu den Artikeln [MPP05] und [FPR99] äußerst freundliche und detaillierte Antworten sandte.

In Hinblick auf meine Zeit des Grundstudiums an der TU Clausthal bin ich sowohl Herrn Dr. Eckhard Giere als auch Herrn Dr. Thomas Maxsein für die freundliche Unterstützung während meiner Clausthaler Zeit dankbar, auch wenn letzteren Adressat dieser Dank leider nicht mehr erreichen kann.

Bezüglich meiner Schulzeit möchte ich meinem ehemaligen Mathematiklehrer Herrn Jörg Brüinig danken, der mich stets förderte und letztlich einen entscheidenden Anteil an der Wahl meines Studienfaches hatte.

Desweiteren bin ich meinen Eltern zu großem Dank verpflichtet, die mein Studium finanziert haben und mich jederzeit unterstützten.

Besonders dankbar bin ich Nancy, für das Ertragen all mit dieser Arbeit und meines Studiums verbundenen Unannehmlichkeiten, für das Erstellen der Graphiken, das mühevollen Korrekturlesen und die liebevolle, ununterbrochene Unterstützung. Insbesondere aber für die in diesen Tagen letzten fünf Jahre.

Inhaltsverzeichnis

I	Grundlagen	1
1	Funktionalkalkül für selbstadjungierte Operatoren reeller Hilberträume	3
1.1	Komplexifizierung reeller Hilberträume	4
1.1.1	Komplexifizierung reeller Vektorräume	4
1.1.2	Komplexifizierung reeller Hilberträume	6
1.2	Spektrum und Funktionalkalkül	9
2	Hilbertmannigfaltigkeiten, Hilbertbündel und Morse Theorie	19
2.1	Die Kategorie der Hilbertmannigfaltigkeiten	20
2.1.1	Objekte und Morphismen	20
2.2	Die Kategorie der Hilbertbündel	23
2.2.1	Definition der Objekte und Morphismen	23
2.2.2	Das Tangentialbündel	24
2.2.3	Das Pullbackbündel	24
2.2.4	Exakte Sequenzen von Hilbertbündeln	25
2.3	Grundbegriffe der Morse Theorie	27
2.3.1	Selbstadjungierte Operatoren mit abgeschlossenem Bild	27
2.3.2	Anwendung des Funktionalkalküls auf Bilinearformen	29
2.3.3	Kritische Punkte, die Hessesche und das Morse-Palais Lemma	32
II	Homotopieinvarianten der Analysis	37
3	Der Brouwersche Abbildungsgrad	39
3.1	Axiomatische Definition und wichtige Eigenschaften	40
3.2	Konstruktion des Abbildungsgrades	42
3.2.1	Der reguläre Fall	43
3.2.2	Erweiterung auf Funktionen mit kritischen Werten	45
3.2.3	Erweiterung auf stetige Funktionen	47
3.2.4	Beweis des Hauptsatzes	49

4	Der Spektralfluss	51
4.1	Die Theoreme von Kuiper, Milnor und Palais	53
4.2	Topologie von $\hat{\mathcal{F}}$	56
4.2.1	Die Unterräume $\hat{\mathcal{F}}_+, \hat{\mathcal{F}}_-, \hat{\mathcal{F}}_* \subset \hat{\mathcal{F}}$	56
4.2.2	Zur Topologie von $\hat{\mathcal{F}}_*$	57
4.3	Konstruktion des Spektralflusses	77
4.3.1	Der relative Morse Index	77
4.3.2	Kogrediente Parametrix	82
4.3.3	Definition des Spektralflusses und Eigenschaften	87
4.4	Eindeutigkeit des Spektralflusses	94
4.5	Alternative Konstruktion des Spektralflusses	97
4.6	Bemerkungen	101
5	Der Maslov Index	103
5.1	Grundlagen zu symplektischen Räumen	104
5.2	Die Lagrange-Grassmannsche	107
5.2.1	Die Grassmannsche	107
5.2.2	Definition der Lagrange-Grassmannschen	109
5.2.3	Die Untermannigfaltigkeiten $\Lambda_k(L_0) \subset \Lambda$	113
5.3	Definition des Maslov Index	120
5.3.1	Vorbereitungen	120
5.3.2	Maslov Index	125
5.4	Symplektische Differentialgleichungssysteme	135
5.4.1	Definitionen	135
5.4.2	Konjugierte Punkte symplektischer Differentialgleichungssysteme	136
III Morse Index Theoreme für Geodäten in semi-Riemannscher Geometrie		143
6	Grundlagen zur Morse Theorie semi-Riemannscher Geodäten	145
6.1	Perturbierte Geodäten, konjugierte Punkte und der Maslov Index	146
6.2	Die Hilbertmannigfaltigkeit $H^1([a, b], M)$	152
6.2.1	Der Hilbertraum $H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$	153
6.2.2	Konstruktion von $H^1([a, b], M)$	157
6.2.3	Das Tangentialbündel $TH^1([a, b], M)$	165
6.2.4	Glatte Abbildungen auf $H^1([a, b], M)$	167
6.2.5	Die Untermannigfaltigkeit $H_{pq}^1([a, b], M)$	169
6.2.6	Rechnen in Koordinaten	169
6.3	Das Wirkungsfunktional auf $H^1(I, M)$	173

7	Morse Index Theoreme in semi-Riemannscher Geometrie	181
7.1	Klassische Morse Index Theoreme	182
7.1.1	Das Morse Index-Theorem der Riemannschen Geometrie	182
7.1.2	Die Morse Index Theoreme für kausale Geodäten der Lorentzgeometrie	182
7.2	Schwierigkeiten bei Verallgemeinerung auf semi- Riemannsche Mannigfaltigkeiten	184
7.3	Das Theorem von Piccione und Tausk	185
7.4	Das Theorem von Musso, Pejsachowicz und Portaluri	189
7.4.1	Der Spektralfluss für Wege Fredholm-quadratischer Formen	189
7.4.2	Der Spektralindex	191
7.4.3	Der konjugierte Index	194
7.4.4	Das Morse Index Theorem	196
IV	Der Spektralindex als Windungszahl	199
8	Alternative Definition des Spektralflusses	201
8.1	Ein kurzer Überblick über Resultate von Booss und Wojciechowski	202
8.2	Verallgemeinerte Windungszahl	203
8.3	Übertragung auf allgemeine Wege reeller Fredholmoperatoren auf reellen Hilber- träumen	206
9	Die Spektralklasse perturbierter semi-Riemannscher Geodäten	211
9.1	Der darstellende Operator	212
9.1.1	Berechnung des darstellenden Operators	212
9.1.2	Eigenschaften und Spektrum	213
9.2	Zur Berechnung der Spektralklasse semi- Riemannscher Geodäten	218
	Literaturverzeichnis	225

Teil I

Grundlagen

Kapitel 1

Funktionalkalkül für selbstadjungierte Operatoren reeller Hilberträume

In der unendlichdimensionalen Morse Theorie lassen sich viele Überlegungen auf Aussagen zu selbstadjungierten Operatoren reeller Hilberträume reduzieren, womit eine möglichst große Vertrautheit mit ihren funktionalanalytischen Eigenschaften unverzichtbar ist. Bedauerlicherweise thematisiert die gängige funktionalanalytische Literatur viele dieser Eigenschaften lediglich im Fall eines zugrundeliegenden komplexen Hilbertraumes, so dass prinzipiell stets die Gültigkeit verwendeter Aussagen zu prüfen ist. Dieses Kapitel wird nun aufzeigen, dass analog dem endlichdimensionalen Fall symmetrischer Matrizen der zugrundeliegende Skalarenkörper für das Studium selbstadjungierter Operatoren auf Hilberträumen belanglos ist, und folglich alle im komplexen Fall bekannten Aussagen ebenso auch für reelle selbstadjungierte Operatoren verwendet werden können. Statt sämtliche Ergebnisse aus der komplexen Theorie für den reellen Fall direkt nachzuprüfen wird mittels der Operation der Komplexifizierung in gewisser Weise die reelle Theorie in die Komplexe eingebettet, womit die Möglichkeit der Bedienung bei bereits bekannten Aussagen besteht.

1.1 Komplexifizierung reeller Hilberträume

In diesem Abschnitt soll aufbauend auf der algebraischen Komplexifizierung eines reellen Vektorraumes die Komplexifizierung reeller Hilberträume erläutert werden. Ein entsprechendes Vorgehen für reelle Banachräume ist, wenn auch geringfügig aufwändiger und weniger kanonisch, ebenfalls möglich, wird aber hier nicht benötigt und demnach übergangen. Die Überlegungen zur Komplexifizierung von Vektorräumen sind wesentlich durch [PT00a, Chapter 1.3] inspiriert, die durchaus naheliegende Definition der Komplexifizierung eines Hilbertraumes sowie grundlegende Eigenschaften komplexifizierter Operatoren sind in [Li03, Chapter 1.1] und [Wei80, Exercise 5.32] zu finden. Die weiteren, hier gemachten Betrachtungen können leider durch keine Quellenangabe untermauert werden, sind aber naheliegend und werden in späteren Abschnitten benötigt.

1.1.1 Komplexifizierung reeller Vektorräume

Es bezeichne im Folgenden stets V einen reellen Vektorraum. Für einen komplexen Vektorraum W erhält man durch Missachtung der vorhandenen komplexen Struktur kanonisch einen reellen Vektorraum $W_{\mathbb{R}}$, der die **Reellifizierung** von W genannt wird. Offenbar gilt hierbei für einen endlichdimensionalen Vektorraum die Beziehung $\dim W_{\mathbb{R}} = 2 \dim W$.

1.1.1 Definition. Eine **Komplexifizierung** von V ist ein Paar $(V^{\mathbb{C}}, \iota)$, bestehend aus einem komplexen Vektorraum $V^{\mathbb{C}}$ und einer injektiven \mathbb{R} -linearen Abbildung $\iota : V \rightarrow (V^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$, so dass $(V^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = \iota(V) \oplus i\iota(V)$.

Es ist hierbei zu beachten, dass Komplexifizierung und Reellifizierung keine zueinander inversen Operationen sind.

Die Komplexifizierung erfüllt folgende universelle Eigenschaft

1.1.2 Lemma. *Es sei $(V^{\mathbb{C}}, \iota)$ eine Komplexifizierung von V und W ein komplexer Vektorraum. Dann existiert zu jedem $f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W_{\mathbb{R}})$ ein eindeutiges $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}, W)$, so dass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \iota & \nearrow \exists! \bar{f} & \\ V^{\mathbb{C}} & & \end{array}$$

kommutiert.

Der elementare Beweis dieser Aussage soll an dieser Stelle übergangen werden. Wie gewöhnlich erhält man aus einer solchen universellen Eigenschaft unmittelbar die bis auf Isomorphie bestehende Eindeutigkeit der Konstruktion.

1.1.3 Folgerung. *Für je zwei Komplexifizierungen $(V_1^{\mathbb{C}}, \iota_1), (V_2^{\mathbb{C}}, \iota_2)$ von V existiert ein eindeu-*

tiger Isomorphismus $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1^{\mathbb{C}}, V_2^{\mathbb{C}})$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V_1^{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\phi} & V_2^{\mathbb{C}} \\ & \swarrow \iota_1 & \nearrow \iota_2 \\ & V & \end{array}$$

kommutiert.

Als kanonisches Modell der Komplexifizierung wird häufig das mit der offensichtlichen komplexen Multiplikation versehene Tensorprodukt $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ verwendet. Dennoch soll hier ein anderes, ebenso kanonisches Modell Verwendung finden, welches sich gelegentlich als komfortabler in konkreten Rechnung erweist und durch geringe Abstraktheit auszeichnet. Wegen des vorhergehenden Resultates ist es natürlich letztlich unbedeutend welchem Modell der Vorzug gegeben wird und alle folgenden Resultate könnten ebenso auch mit der Definition $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ erhalten werden.

1.1.4 Definition. Die **Komplexifizierung** von V ist $V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ versehen mit der offensichtlichen \mathbb{C} -Vektorraum Struktur und der kanonischen Einbettung $\iota : V \hookrightarrow V^{\mathbb{C}}$.

Insbesondere ergibt sich unmittelbar der Begriff der **Konjugation**

$$\overline{x + iy} = x - iy, \quad x + iy \in V^{\mathbb{C}}$$

sowie die Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{Re} : V^{\mathbb{C}} &\rightarrow V, & \text{Re}(z) &= \iota^{-1}\left(\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right) = x, \quad z = x + iy \in V^{\mathbb{C}} \\ \text{Im} : V^{\mathbb{C}} &\rightarrow V, & \text{Im}(z) &= \iota^{-1}\left(\frac{1}{2i}(z - \bar{z})\right) = y, \quad z = x + iy \in V^{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

Ist \tilde{V} ein weiterer \mathbb{R} -Vektorraum, so erhält man für jede Abbildung $T \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \tilde{V})$ durch $T^{\mathbb{C}}(x + iy) = Tx + iTy$ ein Element $T^{\mathbb{C}} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}, \tilde{V}^{\mathbb{C}})$ und eine einfache Überlegung zeigt

$$\ker(T^{\mathbb{C}}) = \ker(T)^{\mathbb{C}}, \quad \text{im}(T^{\mathbb{C}}) = \text{im}(T)^{\mathbb{C}} \quad (1.1.1)$$

Man wird hiermit unmittelbar dem folgenden Resultat zustimmen

1.1.5 Lemma. *Durch*

$$\begin{aligned} \mathbf{VECT}_{\mathbb{R}} &\rightarrow \mathbf{VECT}_{\mathbb{C}} \\ V &\mapsto V^{\mathbb{C}} \\ T &\mapsto T^{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

ist ein treuer, exakter und additiver Funktor gegeben.

Jedem Paar $T, S \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \tilde{V})$ kann ein Element $T^{\mathbb{C}} + iS^{\mathbb{C}} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}, \tilde{V}^{\mathbb{C}})$ zugeordnet werden, wobei nach Definition

$$(T^{\mathbb{C}} + iS^{\mathbb{C}})(x + iy) = (Tx - Sy) + i(Sx + Ty), \quad x + iy \in V^{\mathbb{C}}$$

Dies liefert folgende wichtige Beschreibung der Komplexifizierung von $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \tilde{V})$.

1.1.6 Lemma. *Die Abbildung*

$$\Phi : (\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \tilde{V}))^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}, \tilde{V}^{\mathbb{C}}), T + iS \mapsto T^{\mathbb{C}} + iS^{\mathbb{C}}$$

ist ein Vektorraumisomorphismus.

Beweis. \mathbb{C} -Linearität und Injektivität sind klar. Ist nun $A \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}, \tilde{V}^{\mathbb{C}})$, so definiere man $T = \text{Re} \circ A \circ \iota$, $S = \text{Im} \circ A \circ \iota \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \tilde{V})$. Damit ist

$$(T^{\mathbb{C}} + iS^{\mathbb{C}})(x + iy) = \text{Re}Ax + i\text{Im}Ax + i(\text{Re}Ay + i\text{Im}Ay) = Ax + iAy = A(x + iy)$$

für alle $x + iy \in V^{\mathbb{C}}$. □

Hiermit erhält man insbesondere aus der auf $(\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \tilde{V}))^{\mathbb{C}}$ bestehenden Konjugation eine entsprechende Abbildung auf $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}, \tilde{V}^{\mathbb{C}})$, die gerade durch $\overline{T^{\mathbb{C}} + iS^{\mathbb{C}}} = T^{\mathbb{C}} - iS^{\mathbb{C}}$ gegeben ist und nachstehende Regeln erfüllt

1.1.7 Lemma. *Für $A \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}, \tilde{V}^{\mathbb{C}})$, $B \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\tilde{V}^{\mathbb{C}}, W^{\mathbb{C}})$ ist*

1. $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$
2. $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha} \overline{A}$, $\alpha \in \mathbb{C}$
3. $\overline{B \circ A} = \overline{B} \circ \overline{A}$
4. $\overline{Az} = \overline{A} \overline{z}$ für alle $z \in V^{\mathbb{C}}$

Das folgende Resultat ist damit unmittelbar einsichtig.

1.1.8 Lemma. *Es sei $A \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}, \tilde{V}^{\mathbb{C}})$. Dann sind äquivalent:*

- i *Es existiert ein $T \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \tilde{V})$ mit $A = T^{\mathbb{C}}$*
- ii $\overline{A} = A$
- iii $\text{Im} \circ A \circ \iota = 0$

1.1.2 Komplexifizierung reeller Hilberträume

Nach der rein algebraischen Komplexifizierung soll nun der topologische Aspekt einbezogen werden. Es sei hierfür H ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Auf der Komplexifizierung $H^{\mathbb{C}}$ erhält man hieraus kanonisch ein Skalarprodukt durch

$$\langle x + iy, u + iv \rangle = \langle x, u \rangle - i\langle x, v \rangle + i\langle y, u \rangle + \langle y, v \rangle, x + iy, u + iv \in H^{\mathbb{C}}$$

Die hiervon induzierte Norm $\|x + iy\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ zeigt insbesondere, dass mit H auch stets $H^{\mathbb{C}}$ ein Hilbertraum ist, die Einbettung $\iota : H \rightarrow H^{\mathbb{C}}$ eine Isometrie und die Abbildungen $\text{Re}, \text{Im} : H^{\mathbb{C}} \rightarrow H$ stetig sind. Zudem ist offenbar die Konjugation $\bar{\cdot} : H^{\mathbb{C}} \rightarrow H^{\mathbb{C}}$ ein isometrischer

Isomorphismus.

Ist nun $T \in \mathcal{L}(H, \tilde{H})$, so ist für $x + iy \in H^{\mathbb{C}}$

$$\|T^{\mathbb{C}}(x + iy)\|^2 = \|Tx + iTy\|^2 = \|Tx\|^2 + \|Ty\|^2 \leq \|T\|^2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|T\|^2\|x + iy\|^2$$

und folglich $T^{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(H^{\mathbb{C}}, \tilde{H}^{\mathbb{C}})$ mit $\|T^{\mathbb{C}}\| \leq \|T\|$. Damit ist aber offenbar $\|T^{\mathbb{C}}\| = \|T\|$ und somit die Abbildung $T \mapsto T^{\mathbb{C}}$ eine Isometrie zwischen den Banachräumen $\mathcal{L}(H, \tilde{H})$ und $\mathcal{L}(H^{\mathbb{C}}, \tilde{H}^{\mathbb{C}})$. Man erhält nun wie im vorigen Abschnitt einen Funktor

$$\mathbf{HILB}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{HILB}_{\mathbb{C}}$$

$$H \mapsto H^{\mathbb{C}}$$

$$T \mapsto T^{\mathbb{C}}$$

1.1.9 Lemma. Für $T \in \mathcal{L}(H)$ ist $(T^{\mathbb{C}})^* = (T^*)^{\mathbb{C}}$.

Beweis. Folgt aus

$$\begin{aligned} \langle T^{\mathbb{C}}(x + iy), u + iv \rangle &= \langle Tx + iTy, u + iv \rangle = \langle Tx, u \rangle + i\langle Ty, u \rangle - i\langle Tx, v \rangle + \langle Ty, v \rangle \\ &= \langle x, T^*u \rangle + i\langle y, T^*u \rangle - i\langle x, T^*v \rangle + \langle y, T^*v \rangle = \langle x + iy, T^*u + iT^*v \rangle \\ &= \langle x + iy, (T^*)^{\mathbb{C}}(u + iv) \rangle \end{aligned}$$

□

Neben der Stetigkeit gibt es weitere Eigenschaften die ein Operator stets simultan mit seiner Komplexifizierung erfüllt.

1.1.10 Lemma. Für $T \in \mathcal{L}(H)$ gilt

1. $T \in Gl(H) \iff T^{\mathbb{C}} \in Gl(H^{\mathbb{C}})$
2. T normal $\iff T^{\mathbb{C}}$ normal
3. T selbstadjungiert $\iff T^{\mathbb{C}}$ selbstadjungiert
4. T orthogonal $\iff T^{\mathbb{C}}$ unitär

Beweis. (1) folgt unmittelbar aus (1.1.1) und dem Prinzip der offenen Abbildung. (3) ergibt sich aus 1.1.9, (2) und (4) folgen analog unter Hinzunahme der Funktorialität der Komplexifizierung.

□

Zudem erhält man analog zu 1.1.6

1.1.11 Lemma. Für zwei reelle Hilberträume H, \tilde{H} ist

$$\Phi((\mathcal{L}(H, \tilde{H}))^{\mathbb{C}}) = \mathcal{L}(H^{\mathbb{C}}, \tilde{H}^{\mathbb{C}}).$$

Beweis. Für $A \in \mathcal{L}(H^{\mathbb{C}}, \tilde{H}^{\mathbb{C}})$ erhält man $\Phi^{-1}(A) = \text{Re} \circ A \circ \iota + i\text{Im} \circ A \circ \iota \in (\mathcal{L}(H, \tilde{H}))^{\mathbb{C}}$.
Ist umgekehrt $T, S \in \mathcal{L}(H, \tilde{H})$, so ist

$$\|(T^{\mathbb{C}} + iS^{\mathbb{C}})(x + iy)\| \leq \|T^{\mathbb{C}}(x + iy)\| + \|S^{\mathbb{C}}(x + iy)\| \leq (\|T\| + \|S\|)\|x + iy\|$$

also $\Phi(T + iS) \in \mathcal{L}(H^{\mathbb{C}}, \tilde{H}^{\mathbb{C}})$. □

1.1.12 Folgerung. $T^{\mathbb{C}} + iS^{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(H^{\mathbb{C}}, \tilde{H}^{\mathbb{C}}) \iff T, S \in \mathcal{L}(H, \tilde{H})$.

1.1.13 Bemerkung. Auf dem Banachraum $\mathcal{L}(H^{\mathbb{C}}, \tilde{H}^{\mathbb{C}})$ besteht nun zusätzlich die offensichtlich stetige Abbildung der Konjugation $T^{\mathbb{C}} + iS^{\mathbb{C}} \mapsto T^{\mathbb{C}} - iS^{\mathbb{C}}$. Man beachte hiermit, dass insgesamt durch Komplexifizierung gewonnene komplexe Hilberträume und ihre Morphismen jeweils eine wesentliche zusätzliche Struktur besitzen.

Folgendes Resultat kann mit den bisherigen Ergebnissen mühelos bestätigt werden.

1.1.14 Lemma. *Es sei H ein reeller Hilbertraum.*

1. $P \in \mathcal{L}(H)$ ist genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn $P^{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(H^{\mathbb{C}})$ eine Orthogonalprojektion ist.
2. $P \in \mathcal{L}(H^{\mathbb{C}})$ ist genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn $\overline{P} \in \mathcal{L}(H^{\mathbb{C}})$ eine Orthogonalprojektion ist.

1.2 Spektrum und Funktionalkalkül

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Untersuchung des Spektrums und die Bereitstellung des Funktionalkalküls für selbstadjungierte Operatoren reeller Hilberträume. Im Sinne der eingangs gemachten Erläuterungen werden die Resultate zumeist mittels der Komplexifizierung aus dem komplexen Fall gewonnen. Zur Anwendung dieser Idee ist zunächst die analog zum endlichdimensionalen Fall symmetrischer Matrizen bestehende Invarianz des Spektrums unter der Komplexifizierung bedeutsam. Mit dieser Erkenntnis gerüstet übertragen sich grundlegende Eigenschaften von Spektren selbstadjungierter Operatoren komplexer Hilberträume unmittelbar auf den reellen Fall. Die anschließende Darlegung des Funktionalkalküls ist an [Wer05] orientiert, wobei die dort gegebenen Betrachtungen unter Verwendung der Komplexifizierung auf den reellen Fall übertragen werden und damit insbesondere den einfachen Zusammenhang zwischen dem reellen und komplexen Kalkül erkennen lassen. Abschließend werden Konsequenzen der Existenz des Funktionalkalküls dargelegt, sowie die Stetigkeit des Spektrums allgemeiner Operatoren und die Stetigkeit des Funktionalkalküls diskutiert.

Für einen reellen oder komplexen Hilbertraum H bezeichne $\mathcal{S}(H) \subset \mathcal{L}(H)$ den abgeschlossenen Unterraum der selbstadjungierten Operatoren und $\mathcal{K}(H) \subset \mathcal{L}(H)$ das zweiseitige abgeschlossene Ideal der kompakten Operatoren auf H .

Es bezeichne weiterhin für $T \in \mathcal{L}(H)$ neben der Resolvente $\rho(T)$ und dem Spektrum $\sigma(T)$

- $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \ker(\lambda - T) \neq \{0\}\}$ das **Punktspektrum**
- $\sigma_d(T) = \{\lambda \in \sigma_p(T) : \dim \ker(\lambda - T) < \infty\}$ das **diskrete Spektrum**
- $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \ker(\lambda - T) = \{0\}, \overline{\operatorname{im}(\lambda - T)} = H\}$ das **stetige Spektrum**
- $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \ker(\lambda - T) = \{0\}, \overline{\operatorname{im}(\lambda - T)} \neq H\}$ das **Restspektrum**

Bekanntlich ist ein selbstadjungierter Operator genau dann injektiv, wenn er dichtes Bild hat und folglich ist $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$ für alle $T \in \mathcal{S}(H)$.

1.2.1 Lemma. *Ist H ein reeller Hilbertraum und $T \in \mathcal{S}(H)$, so gilt*

1. $\rho(T) = \rho(T^{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{R}$
2. $\sigma(T) = \sigma(T^{\mathbb{C}})$
3. $\sigma_p(T) = \sigma_p(T^{\mathbb{C}}), \sigma_d(T) = \sigma_d(T^{\mathbb{C}}), \sigma_c(T) = \sigma_c(T^{\mathbb{C}})$
4. Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ ist $E(T^{\mathbb{C}}, \lambda) = E(T, \lambda)^{\mathbb{C}}$.

Beweis. 1. Folgt aus $(\lambda - T)^{\mathbb{C}} = \lambda - T^{\mathbb{C}}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ zusammen mit 1.1.10.

2. Aus (1) mit $\sigma(T^{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{R}$.

3. Die ersten beiden Gleichungen folgen mit (1.1.1) $\ker(\lambda - T^{\mathbb{C}}) = \ker((\lambda - T)^{\mathbb{C}}) = (\ker(\lambda - T))^{\mathbb{C}}$, die letzte hieraus wegen $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$ und (2).

4. Folgt ebenfalls mit $\ker(\lambda - T^{\mathbb{C}}) = \ker(\lambda - T)^{\mathbb{C}} = (\ker(\lambda - T))^{\mathbb{C}}$ aus (1.1.1). □

Mit diesen doch sehr elementaren Resultaten ist die Behandlung von Resolvente und Spektrum selbstadjungierter Operatoren auf reellen Hilberträumen vollständig auf die entsprechende komplexe Theorie zurückgeführt. Demnach überträgt sich auch jede der bekannten Aussage über Spektren selbstadjungierter Operatoren auf den reellen Fall, womit sich beispielsweise unmittelbar folgende Resultate ergeben.

1.2.2 Folgerung. *Es sei $T \in \mathcal{S}(H)$.*

1. $\sigma(T) \neq \emptyset$.
2. *Isolierte Punkte von $\sigma(T)$ sind Eigenwerte.*

Es sollen nun die Überlegungen zum Funktionalkalkül folgen. Wie bereits eingangs erwähnt wird dieser aus der Darstellung des Kalküls im komplexen Fall aus [Wer05] gewonnen. Alternative Möglichkeiten, die ebenfalls das Bestehen des komplexen Kalküls voraussetzen sind in [Wei80, Exercise 7.25] und [Li03, Chapter 1.2] skizziert.

1.2.3 Definition. Es bezeichne Σ die Borel- σ -Algebra auf \mathbb{R} und es sei H ein reeller oder komplexer Hilbertraum. Eine Abbildung

$$E : \Sigma \rightarrow \mathcal{L}(H), A \mapsto E_A$$

heißt **Spektralmaß**, falls alle E_A Orthogonalprojektionen sind und

1. $E_{\emptyset} = 0, E_{\mathbb{R}} = id$
2. Ist $A_i \in \Sigma, i \in \mathbb{N}$, mit $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, so ist $\sum_{i=1}^{\infty} E_{A_i}(x) = E_{\cup A_i}(x) \forall x \in H$

Ein Spektralmaß E hat **kompakten Träger**, falls eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ mit $E_K = id$ existiert.

Es ist nicht schwer aus der Definition abzuleiten, dass im Fall eines kompakten Trägers K stets $E_A = id$ für alle $A \in \Sigma$ mit $K \subset A$.

1.2.4 Lemma. *Es sei H ein reeller Hilbertraum.*

1. $A \mapsto E_A$ ist genau dann ein Spektralmaß auf $H^{\mathbb{C}}$, wenn $A \mapsto \overline{E_A}$ ein Spektralmaß auf $H^{\mathbb{C}}$ ist.
2. $A \mapsto E_A$ ist genau dann ein Spektralmaß auf H , wenn $A \mapsto E_A^{\mathbb{C}}$ ein Spektralmaß auf $H^{\mathbb{C}}$ ist.

Beweis. 1. Da $\overline{\overline{E_A}} = E_A$ genügt es zu zeigen, dass mit E_A auch $\overline{E_A}$ ein Spektralmaß ist. Wegen 1.1.14 ist zunächst $\overline{E_A}$ simultan mit E_A eine Orthogonalprojektion. Die Bedingungen (1) sind trivialerweise auch für $\overline{E_A}$ erfüllt. Da wegen 1.1.7 $\overline{E_A}(z) = \overline{E_A(\overline{z})}$ für jedes $A \in \Sigma$ und $z \in H^{\mathbb{C}}$ folgt mit der Stetigkeit der Konjugation

$$\overline{E_{\cup A_i}}(z) = \overline{E_{\cup A_i}(\overline{z})} = \overline{\sum_{i=1}^{\infty} E_{A_i}(\overline{z})} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{E_{A_i}(\overline{z})} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{E_{A_i}}(z)$$

und somit ist $A \mapsto \overline{E_A}$ ein Spektralmaß.

2. Wegen 1.1.14 ist jedes E_A simultan mit $E_A^{\mathbb{C}}$ eine Orthogonalprojektion. Der Nachweis der Eigenschaft (1) ist jeweils trivial, die Eigenschaft (2) folgt sofort aus der Definition des komplexifizierten Operators unter Beachtung der Wahl der Topologie auf $H^{\mathbb{C}}$ mit der eine Reihe in $H^{\mathbb{C}}$ genau dann konvergiert, wenn Real- und Imaginärteil konvergieren. □

Bekanntlich kann jede beschränkte und meßbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ bezüglich eines Spektralmaßes integriert werden. Für $A \in \Sigma$ und die Indikatorfunktion $f = \chi_A$ definiert man hierzu

$$\int f dE = E_A$$

setzt diesen Ausdruck linear auf Treppenfunktionen $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ fort und definiert schließlich für eine beliebige beschränkte und meßbare Funktion f

$$\int f dE = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dE \tag{1.2.1}$$

wobei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine gleichmäßig gegen f konvergierende Folge von Treppenfunktionen ist¹. Die technischen Details dieser gewöhnlichen Konstruktion erweisen sich als sehr überschaubar: Die Unabhängigkeit von der Darstellung einer Treppenfunktion als Linearkombination von Indikatorfunktionen ist standard, der letzte Schritt rechtfertigt sich aus der für eine Treppenfunktion f ohne große Mühe nachzuweisenden Ungleichung

$$\left\| \int f dE \right\| \leq \|f\|_{\infty} \tag{1.2.2}$$

womit (1.2.1) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(H)$ ist und folglich ein von der speziellen Wahl der approximierenden Folge von Treppenfunktionen unabhängiges Grenzelement in $\mathcal{L}(H)$ besitzt.

Das so definierte Integral werde mit $\int f dE$ oder $\int f(\lambda) dE_{\lambda}$ bezeichnet. Hat das verwendete Spektralmaß E einen kompakten Träger K , so definiere man für eine beschränkte und meßbare Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{K}$ das Integral als $\int_K f dE = \int \chi_K f dE$.

1.2.5 Lemma. *Es sei H ein reeller Hilbertraum, E_A ein Spektralmaß auf $H^{\mathbb{C}}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkt und meßbar. Dann ist*

$$\overline{\int f(\lambda) dE_{\lambda}} = \int \overline{f(\lambda)} d\overline{E_{\lambda}}$$

¹vgl.[Wer05, Lemma VII.1.5, Satz A.1.5 (e)]

Beweis. Zunächst ist die Aussage wegen 1.2.4 sinnvoll. Sie gilt nun mit 1.1.7 für jede Treppenfunktion und wegen der Stetigkeit der Konjugation in $\mathcal{L}(H^{\mathbb{C}})$ auch im allgemeinen Fall. \square

1.2.6 Lemma. *Es sei H ein reeller Hilbertraum und $A \mapsto E_A$ ein Spektralmaß auf H . Dann ist für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und meßbar*

$$\left(\int f(\lambda) dE_\lambda \right)^{\mathbb{C}} = \int f(\lambda) dE_\lambda^{\mathbb{C}}$$

Beweis. Die Aussage ist mit 1.2.4 sinnvoll, für Treppenfunktionen offensichtlich und folgt somit aus der Stetigkeit der Abbildung $\mathcal{L}(H) \rightarrow \mathcal{L}(H^{\mathbb{C}})$, $T \mapsto T^{\mathbb{C}}$. \square

1.2.7 Satz (Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren). *Für jedes $T \in \mathcal{S}(H)$ existiert ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß E mit kompaktem Träger auf H , so dass*

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_\lambda$$

Hierbei ist $\sigma(T)$ die kleinste kompakte Menge mit $E_{\sigma(T)} = id$.

Beweis. Im Fall eines komplexen Hilbertraumes ist die Aussage bekannt (vgl. etwa [Wer05, Kap. VII]).

Ist nun H ein reeller Hilbertraum, so betrachte man die Komplexifizierung $T^{\mathbb{C}} \in \mathcal{S}(H^{\mathbb{C}})$. Aus 1.2.5 erhält man mit $\sigma(T^{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{R}$

$$T^{\mathbb{C}} = \overline{T^{\mathbb{C}}} = \int_{\sigma(T^{\mathbb{C}})} \lambda d\overline{E}_\lambda$$

Wegen der im komplexen Fall gewährleisteten Eindeutigkeit des Spektralmaßes ist aber folglich $E_A = \overline{E}_A$ für alle $A \in \Sigma$ und daher existiert mit 1.1.8 und 1.2.4 ein Spektralmaß $A \mapsto \tilde{E}_A \in \mathcal{L}(H)$ auf H mit $\tilde{E}_A^{\mathbb{C}} = E_A$ für alle $A \in \Sigma$. Mit 1.2.6 und $\sigma(T^{\mathbb{C}}) = \sigma(T)$ ist damit aber

$$T^{\mathbb{C}} = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_\lambda = \left(\int_{\sigma(T)} \lambda d\tilde{E}_\lambda \right)^{\mathbb{C}}$$

und folglich

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda d\tilde{E}_\lambda$$

Damit ist die Existenz nachgewiesen.

Die Eindeutigkeit folgt, da umgekehrt \tilde{E}_A wegen 1.2.4 ein Spektralmaß $\tilde{E}_A^{\mathbb{C}}$ induziert, mit dem der zugehörige Operator $T^{\mathbb{C}}$ die entsprechende Integraldarstellung besitzt. Da diese aber eindeutig ist folgt auch die Eindeutigkeit von \tilde{E} .² \square

²Bei diesem Argument wird natürlich die nun schon mehrfach implizit verwendete Treue des Komplexifizierungsfunktors benötigt.

Es bezeichne nun für eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ den mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ versehenen Banachraum

$$B(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ beschränkt und meßbar}\}$$

Damit erhält man nun für ein festes $T \in \mathcal{S}(H)$ durch

$$B(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H), f \mapsto f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE_\lambda \quad (1.2.3)$$

analog zu komplexen Hilberträumen den meßbaren Funktionalkalkül. Wegen (1.2.2) ist stets

$$\left\| \int f dE \right\| \leq \|f\|_\infty \quad (1.2.4)$$

und somit ist die Abbildung (1.2.3) stetig. Es ist insbesondere zu beachten, dass im Gegensatz zum komplexen Fall stets ein selbstadjungierter Operator erhalten wird³.

Von besonderer Bedeutung ist nun der unmittelbar aus der Konstruktion folgende Zusammenhang zwischen dem reellen und dem komplexen Kalkül.

1.2.8 Folgerung. Für $T \in \mathcal{S}(H)$ und $f \in B(\sigma(T))$ ist

$$f(T^{\mathbb{C}}) = f(T)^{\mathbb{C}}$$

Beweis. Im Beweis von 1.2.7 wurde gezeigt, dass mit dem Spektralmaß E_A des Operators T das Spektralmaß von $T^{\mathbb{C}}$ gerade durch $E_A^{\mathbb{C}}$ gegeben ist. Damit folgt die Behauptung mühelos aus 1.2.6. \square

1.2.9 Bemerkung. Durch das Spektralmaß wird insbesondere für feste $x, y \in H$ ein reelles Maß $A \mapsto \langle E_A x, y \rangle$ definiert. Durch einen einfachen Grenzübergang lässt sich

$$\langle f(T)x, y \rangle = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) d\langle E_\lambda x, y \rangle \quad \forall x, y \in H$$

zeigen. Dieses Resultat ist im komplexen Fall durchaus bekannt und besitzt vielfältige Anwendungen. Da es hier im weiteren Verlauf nicht benötigt wird, soll auf den Beweis verzichtet werden.

Das Resultat 1.2.8 erlaubt nun ohne aufwändige Überlegungen den Nachweis der wesentlichen Eigenschaften des reellen Funktionalkalküls.

1.2.10 Lemma. Es sei $T \in \mathcal{S}(H)$ selbstadjungiert.

1. (1.2.3) ist ein Algebrenhomomorphismus. Insbesondere ist also

$$\{f(T) : f \in B(\sigma(T))\}$$

eine kommutative Operatoralgebra.

³Diese Eigenschaft ist allerdings wenig überraschend, da im komplexen Fall $f(T)$ für jede reellwertige Abbildung ebenfalls selbstadjungiert.

2. Sind $g : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar und beschränkt, so ist $(f \circ g)(T) = f(g(T))$.
3. Für $f \in B(\sigma(T))$ und $Tx = \lambda x$ ist $f(T)x = f(\lambda)x$.
4. Für $f \in C(\sigma(T))$ ist $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.

Beweis. Bekanntlich gelten sämtliche Aussagen im komplexen Fall (vgl. [Wer05, Kap. VII]). Unter Verwendung von 1.2.8 erhält man hieraus

1. $f g(T)^{\mathbb{C}} = f g(T^{\mathbb{C}}) = g f(T^{\mathbb{C}}) = g f(T)^{\mathbb{C}} \Rightarrow f g(T) = g f(T)$
2. $(f \circ g)(T)^{\mathbb{C}} = (f \circ g)(T^{\mathbb{C}}) = f(g(T^{\mathbb{C}})) = f(g(T)^{\mathbb{C}}) = f(g(T))^{\mathbb{C}} \Rightarrow (f \circ g)(T) = f(g(T))$
3. $Tx = \lambda x \Rightarrow T^{\mathbb{C}}x = \lambda x \Rightarrow f(T^{\mathbb{C}})x = f(\lambda)x \Rightarrow f(T)^{\mathbb{C}}x = f(\lambda)x \Rightarrow f(T)x = f(\lambda)x$
4. $\sigma(f(T)) = \sigma(f(T)^{\mathbb{C}}) = \sigma(f(T^{\mathbb{C}})) = f(\sigma(T^{\mathbb{C}})) = f(\sigma(T))$

□

Für einen Operator $T \in \mathcal{S}(H)$ und $A \in \Sigma$ werden im Folgenden die Operatoren $E_A = \chi_A(T)$ als **Spektralprojektoren** bezeichnet. Mit den bisher erhaltenen Aussagen können nun wichtige Erkenntnisse über diese gewonnen werden.

1.2.11 Lemma. *Es sei $T \in \mathcal{S}(H)$ mit Spektralmaß E .*

1. $\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow \exists U \subset \mathbb{R}$ offene Umgebung von λ mit $E_U = 0$.
2. $\lambda \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow E_{\{\lambda\}} \neq 0$. In diesem Fall ist $\text{im}(E_{\{\lambda\}}) = E(T, \lambda)$.

Beweis. 1. Nach Konstruktion von E ist $E_{\rho(T)} = 0$ und mit der Offenheit von $\rho(T) \subset \mathbb{R}$ erhält man die erste Richtung. Zum Beweis der Umkehrung sei U eine Umgebung von λ mit $E_U = 0$. Man setze nun $f(t) = \frac{1}{\lambda - t}$ für $t \notin U$ und $f = 0$ sonst. Dann ist f meßbar und auf $\sigma(T)$ beschränkt. Ebenso gilt dies für $g(t) = \lambda - t$. Es folgt zunächst

$$f(T)(\lambda - T) = f(T)g(T) = (fg)(T) = \chi_{\mathbb{R} \setminus U}(T) = E_{\mathbb{R} \setminus U} = id$$

Mit $f(T)g(T) = g(T)f(T)$ ist aber folglich $\lambda \in \rho(T)$.

2. Offenbar genügt es $\text{im}(E_{\{\lambda\}}) = \ker(\lambda - T)$ zu zeigen. Mit der Gültigkeit der entsprechenden Aussage im komplexen Fall folgt dies aber mit 1.2.1 und 1.1.1 aus

$$E(T, \lambda)^{\mathbb{C}} = E(T^{\mathbb{C}}, \lambda) = \text{im}(E_{\{\lambda\}}^{\mathbb{C}}) = \text{im}(E_{\{\lambda\}})^{\mathbb{C}}$$

□

1.2.12 Bemerkung. Es soll an dieser Stelle erwähnt werden, dass wie im Komplexen ein weiterer Funktionalkalkül für Operatoren reeller Banach- und Hilberträume konstruiert werden kann.

Für einen komplexen Banachraum X und einen Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ bezeichne $\mathcal{H}(A)$ die Menge

aller komplexwertigen Funktionen, die auf einer (von der Funktion abhängigen) offenen Umgebung der Menge $\sigma(A)$ lokalholomorph sind. Für ein $f \in \mathcal{H}(A)$ mit offener Umgebung $\Omega(f)$ und einen Integrationsweg $\Gamma \subset \Omega(f)$ mit $\Gamma \cap \sigma(A) = \emptyset$ der $\sigma(A)$ umschließt wird durch

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

ein beschränkter linearer Operator auf X definiert, der unabhängig von den getroffenen Wahlen ist. Mit dieser Definition ist die Abbildung $\mathcal{H}(A) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ ein \mathbb{C} -Algebrenhomomorphismus und es gilt der Spektralabbildungssatz $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$ für alle $f \in \mathcal{H}(A)$. Diese Konstruktion wird häufig als **Dunford-Kalkül** benannt.

Um diese Konstruktion auch im reellen Fall anwenden zu können betrachtet man Funktionen mit $\overline{f(T^{\mathbb{C}})} = f(T^{\mathbb{C}})$ und definiert $f(T) = \operatorname{Re}(f(T^{\mathbb{C}}))$. Es ist nicht schwer einzusehen, dass die Bedingung an die Funktion f genau dann erfüllt ist, wenn $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$, f also die komplexe Fortsetzung einer reellwertigen Funktion ist. Dieser Funktionalkalkül stellt sehr starke Anforderungen an die Funktion f , ist dafür aber nicht auf selbstadjungierte Operatoren eingeschränkt.

Viele der in den folgenden Kapiteln verwendeten Aussagen könnten ebensogut auch unter Verwendung des reellen Dunford-Kalküls bewiesen werden. Da aber hier im reellen Fall stets selbstadjungierte Operatoren betrachtet werden, ist der meßbare Kalkül stärker und zudem für manche Aussagen unumgänglich.

Nach Benennung des Dunford-Kalküls sollen jetzt zwei wichtige Anwendungen zur Stetigkeit des Spektrums zitiert werden, deren Beweise im Komplexen mittels dieses Kalküls geführt werden. Zuvor soll noch ein wichtiges Lemma genannt werden, das ebenfalls in diesen Beweisen benötigt wird, aber auch allgemein von hohem Interesse ist.

1.2.13 Lemma (Projektorenlemma). *Es seien P, Q Projektoren auf dem Banachraum X . Falls $\|P - Q\| < 1$, so ist*

$$X = \ker P \oplus \operatorname{im} Q, \quad X = \operatorname{im} P \oplus \ker Q$$

und es ist $\operatorname{rk}(P) = \operatorname{rk}(Q)$.

Beweis. [GGK90, Lemma 4.3] □

1.2.14 Satz. *Es sei H ein reeller oder komplexer Hilbertraum, $A \in \mathcal{L}(H)$ und $\Omega \subset \mathbb{K}$ eine offene Umgebung von $\sigma(A)$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\sigma(B) \subset \Omega$ für alle $B \in \mathcal{L}(H)$ mit $\|A - B\| < \varepsilon$.*

Beweis. Den Beweis für einen komplexen Banachraum findet man in [GGK90, Theorem 4.1].

Ist nun H ein reeller Hilbertraum so ist zunächst mit einem zu 1.2.1 analogen Beweis $\sigma(A) = \sigma(A^{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{R}$ für alle $A \in \mathcal{L}(H)$. Ist nun $A \in \mathcal{L}(H)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}$ eine offene Umgebung von $\sigma(A)$, so ist $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \setminus \Omega)$ eine offene Umgebung von $\sigma(A^{\mathbb{C}})$ in \mathbb{C} . Mit der Gültigkeit der Aussage im komplexen Fall existiert aber ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $B \in \mathcal{L}(H)$ mit $\|A - B\| = \|(A - B)^{\mathbb{C}}\| = \|A^{\mathbb{C}} - B^{\mathbb{C}}\| < \varepsilon$ stets $\sigma(B^{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \setminus \Omega)$, also $\sigma(B) = \sigma(B^{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{R} \subset \Omega$. □

1.2.15 Satz. *Es sei H ein komplexer Hilbertraum, $A \in \mathcal{L}(H)$ und $\sigma \subset \sigma_d(A)$ eine endliche Teilmenge. Zudem sei Γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in \mathbb{C} um σ mit $\sigma(A) \cap \Gamma = \emptyset$ und der σ von $\sigma(A) \setminus \sigma$ trennt. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $B \in \mathcal{L}(H)$ mit $\|A - B\| < \varepsilon$ gilt:*

- $\sigma(B) \cap \Gamma = \emptyset$.
- *Der Teil von $\sigma(B)$ innerhalb Γ ist eine endliche Teilmenge von $\sigma_d(B)$.*
- $\sum_{\lambda} \text{innerhalb } \Gamma \dim E(B, \lambda) = \sum_{\lambda} \text{innerhalb } \Gamma \dim E(A, \lambda)$

Beweis. [GGK90, Theorem 4.2] □

1.2.16 Bemerkung. Mit einem zu 1.2.14 analogen Vorgehen kann die Aussage unter den naheliegenden Modifikationen auch auf reelle Hilberträume übertragen werden, wobei im dritten Teil der Aussage natürlich statt Gleichheit eine Ungleichung zu verwenden ist. Diese Aussage wird aber im weiteren Verlauf dieser Arbeit nur im komplexen Fall Anwendung finden.

Die folgenden Resultate sind für viele Anwendungen des Funktionalkalküls von fundamentaler Bedeutung. Für den komplexen Fall findet man den Beweis der zweiten Aussage in [AS69], die ebenso bedeutungsvolle erste Aussage ist im dort gegebenen Beweis enthalten.

1.2.17 Satz. *Es sei H ein reeller oder komplexer Hilbertraum und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Abbildung*

$$\mathcal{S}(H) \ni T \mapsto f(T) \in \mathcal{S}(H)$$

stetig.

Beweis. Es sei $A \in \mathcal{S}(H)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte offene Umgebung von $\sigma(A)$. Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ wähle man nun ein Polynom p mit $\|(p - f)|_{\Omega}\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{3}$. Mit 1.2.14 und der offensichtlichen Stetigkeit der Abbildung $\mathcal{L}(H) \ni A \mapsto p(A) \in \mathcal{L}(H)$ wähle man nun eine Umgebung $U \subset \mathcal{L}(H)$ von A , so dass $\sigma(B) \subset \Omega$ und $\|p(B) - p(A)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $B \in U$. Damit ist aber unter Verwendung von (1.2.4)

$$\begin{aligned} \|f(B) - f(A)\| &\leq \|f(B) - p(B)\| + \|p(B) - p(A)\| + \|p(A) - f(A)\| \\ &\leq \|(f - p)|_{\sigma(B)}\|_{\infty} + \|p(B) - p(A)\| + \|(f - p)|_{\sigma(A)}\|_{\infty} < \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $B \in U \cap \mathcal{S}(H)$. □

1.2.18 Folgerung. *Es sei $H : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Homotopie und H ein reeller oder komplexer Hilbertraum. Dann ist die Abbildung*

$$I \times \mathcal{S}(H) \ni (t, A) \mapsto H(t, A) \in \mathcal{S}(H)$$

ebenfalls eine Homotopie.

Beweis. Zunächst ist bekanntlich die Abbildung $I \ni t \mapsto f_t|_K \in C(K)$ bei Wahl der Supremumsnorm auf $C(K)$ für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ stetig.

Es sei $(t_0, A_0) \in I \times \mathcal{S}(H)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen 1.2.17 existiert nun ein $\delta > 0$, so dass

$$\|f_{t_0}(A) - f_{t_0}(A_0)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } A \in \mathcal{S}(H) \text{ mit } \|A - A_0\| < \delta$$

Mit 1.2.14 wähle man zudem eine beschränkte offene Umgebung Ω von $\sigma(A_0) \subset \mathbb{R}$, so dass $\sigma(A) \subset \Omega$ für alle $A \in \mathcal{S}(H)$ mit $\|A - A_0\| < \delta$. Wegen der eingangs gemachten Bemerkung kann nun nach eventueller Verkleinerung von δ mit (1.2.4) angenommen werden, dass

$$\|f_t(A) - f_{t_0}(A)\| \leq \|(f_t - f_{t_0})|_{\sigma(A)}\|_\infty \leq \|(f_t - f_{t_0})|_{\overline{\Omega}}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $|t - t_0| < \delta$ und alle $\|A - A_0\| < \delta$. Damit ist aber

$$\|f_t(A) - f_{t_0}(A_0)\| \leq \|f_t(A) - f_{t_0}(A)\| + \|f_{t_0}(A) - f_{t_0}(A_0)\| < \varepsilon$$

für alle $(t, A) \in I \times \mathcal{S}(H)$ mit $|t - t_0| + \|A - A_0\| < \delta$. □

Kapitel 2

Hilbertmannigfaltigkeiten, Hilbertbündel und Morse Theorie

In diesem Kapitel werden wichtige Grundlagen zur unendlichdimensionalen Morse Theorie bereitgestellt. Bekanntlich werden in der Morse Theorie kritische Punkte glatter Abbildungen auf glatten Mannigfaltigkeiten betrachtet. Hierzu soll in einem ersten Abschnitt zunächst eine kurze Zusammenstellung der damit verbundenen Begriffe gegeben werden. Die gewählte Darstellung ist eng an [La95] orientiert, wobei hier lediglich der Spezialfall auf Hilberträumen modellierter unendlichdimensionaler Mannigfaltigkeiten betrachtet wird, womit sich einige Darstellungen zusätzlich vereinfachen. Anschließend werden die ebenso benötigten Hilbertbündel definiert, wobei die Darstellung wie zuvor nur die in [La95] präsentierten Sprechweisen und Erkenntnisse in aller Kürze zusammenfasst.

Der hierauf folgende wesentliche Teil dieses Kapitels präsentiert einige recht elementare aber ebenso bedeutungsvolle Definitionen und Aussagen der unendlichdimensionalen Morse Theorie. Neben einer weiteren Betrachtung von Eigenschaften selbstadjungierter Operatoren werden diese nun insbesondere ihre Bedeutung unter Beweis stellen dürfen. Die hier gegebene Darstellung orientiert sich an [PT88] und [Ma94], stellt aber auch schon einige im späteren Verlauf der Arbeit benötigte Begriffe und Resultate aus [MPP05] bereit.

2.1 Die Kategorie der Hilbertmannigfaltigkeiten

2.1.1 Objekte und Morphismen

2.1.1 Definition. Es sei M eine Menge und H ein reeller Hilbertraum.

Ein (**glatter**) **Atlas** für M mit Werten in H ist eine Familie $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ von **Karten**, wobei I eine Indexmenge ist, so dass

- $U_i \subset M$ für alle $i \in I$ und $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.
- Für jedes $i \in I$ ist $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi(U_i)$ eine Bijektion auf eine offene Teilmenge von H und für alle $i, j \in I$ ist $\varphi_i(U_i \cap U_j) \subset H$ offen.
- Für alle $i, j \in I$ mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ist die **Kartenwechselabbildung**

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

ein Diffeomorphismus.

Ist $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ ein Atlas für eine Menge M , so existiert offenbar genau eine Topologie auf M , so dass alle U_i offen und alle φ_i Homöomorphismen sind.

Für eine Menge M heißen zwei Atlanten \mathcal{A}, \mathcal{B} mit Werten in einem Hilbertraum H **äquivalent**, falls $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ein Atlas für M ist. Die Äquivalenzklassen der so entstehenden Äquivalenzrelation werden **glatte Strukturen** auf M genannt.

2.1.2 Definition. Ein Paar (M, \mathcal{S}) bestehend aus einer Menge M und einer glatten Struktur mit Werten in einem Hilbertraum H heißt **glatte Mannigfaltigkeit** mit Modell H oder kurz **Hilbertmannigfaltigkeit**.

Nach Definition ist eine glatte Struktur für eine Menge M bereits durch die Angabe eines Atlas eindeutig festgelegt. Da zudem jeder Atlas einer glatten Struktur die gleiche Topologie auf M definiert, kann eine glatte Mannigfaltigkeit stets kanonisch als topologischer Raum angesehen werden. Abweichend vom endlichdimensionalen Fall werden keine weiteren Forderungen an diese Topologie gestellt.

Sind M, N Hilbertmannigfaltigkeiten, so nennt man eine **Abbildung** $f : M \rightarrow N$ **glatt**, falls für jedes $x \in M$ eine Karte (U, φ) um x und eine Karte (V, ψ) um $f(x)$ existiert, so dass $f(U) \subset V$ und die Abbildung

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

eine glatte Abbildung zwischen Hilberträumen ist. Mit diesen Definitionen erhält man nun die Kategorie **HMFD** der Hilbertmannigfaltigkeiten deren Morphismen die glatten Abbildungen sind.

Es sei M eine Hilbertmannigfaltigkeit mit Modell H , $x \in M$ fest und

$$\mathcal{C}_x := \{(U, \varphi, v) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}, x \in U, v \in H\}$$

Nun heißen $(U, \varphi, v), (V, \psi, w) \in \mathcal{C}_x$ **äquivalent**, falls $D_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})v = w$. Der **Tangentialraum** $T_x M$ an M bei x ist die Menge aller Äquivalenzklassen von \mathcal{C}_x bezüglich dieser Äquivalenzrelation. Jede Karte (U, φ) um x induziert eine Bijektion $\hat{\varphi}_x : T_x M \rightarrow H$ durch $\hat{\varphi}_x([(U, \varphi, v)]) = v$, womit $T_x M$ unabhängig von der gewählten Karte mit der Struktur eines topologischen Vektorraums versehen wird. Folglich ist $T_x M \in \mathfrak{Ob}(\mathbf{HILB}_{\mathbb{R}})$ für alle $x \in M$, es besteht aber im Allgemeinen keine kanonische Wahl eines zugehörigen Skalarproduktes auf $T_x M$.

Sind M, N Hilbertmannigfaltigkeiten mit Modellen H, \tilde{H} und ist $x \in M$, so lässt sich das **Differential** $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ als die eindeutige Abbildung definieren, so dass für alle Karten (U, φ) um x und (V, ψ) um $f(x)$ mit $f(U) \subset V$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_x M & \xrightarrow{\hat{\varphi}_x} & H \\ d_x f \downarrow & & \downarrow D_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \\ T_{f(x)} N & \xrightarrow{\hat{\psi}_{f(x)}} & \tilde{H} \end{array}$$

kommutiert. Mit den definierten Vektorraumstrukturen und Topologien der Tangentialräume ist damit $d_x f \in \mathcal{L}(T_x M, T_{f(x)} N)$.

Durchaus nützlich ist die Berechnung des Differentials unter Verwendung von Kurven, deren Beweis analog zum endlichdimensionalen Fall zu führen ist.

2.1.3 Lemma. *Es sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildungen zwischen Hilbertmannigfaltigkeiten, $p \in M$, $v \in T_p M$ sowie $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Dann ist*

$$(d_p f)v = (f \circ \gamma)'(0)$$

2.1.4 Definition. Es seien M, N Hilbertmannigfaltigkeiten und $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung.

- f heißt **Submersion**, falls $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ für jedes $x \in M$ surjektiv ist.
- f heißt **Immersion**, falls für jedes $x \in M$ $\text{im}(d_x f) \subset T_{f(x)} N$ abgeschlossen und $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ injektiv ist.
- Ist f eine Immersion und $f : M \rightarrow f(M) \subset N$ ein Homöomorphismus, so heißt f **Einbettung**.

2.1.5 Bemerkung. Die hier in gewisser Weise unsymmetrisch wirkende Definition entsteht aus der grundsätzlichen Abgeschlossenheit des Kerns einer stetigen linearen Abbildung. Die allgemeine Definition von Submersion und Immersion fordert stattdessen die Existenz von Komplementäräumen zu Kern beziehungsweise Bild des Differentials (vgl. [La95, Proposition 2.2]), womit sich diese Definition für Objekte der Kategorie $\mathbf{HILB}_{\mathbb{R}}$ auf 2.1.4 reduziert.

2.1.6 Definition. Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt **Untermannigfaltigkeit**, falls ein abgeschlossener Unterraum $\tilde{H} \subset H$ und für jedes $x \in N$ eine Karte (U, φ) von M um x existiert, so dass $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap \tilde{H}$.

Ist N eine Untermannigfaltigkeit von M , so erhält N durch Einschränkungen der Karten von M einen Atlas mit dem N eine Hilbertmannigfaltigkeit ist. Bezüglich dieser glatten Struktur ist die Inklusion $\iota : N \rightarrow M$ eine Einbettung und das Differential $d\iota$ kann verwendet werden um für jedes $x \in N$ den Tangentialraum $T_x N$ mit einem abgeschlossenen Teilraum von $T_x M$ zu identifizieren.

Für eine glatte Abbildung $f : M \rightarrow N$ heiße $p \in M$ **regulär**, falls $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ surjektiv ist, andernfalls heißt p **kritisch**. Ein Punkt $q \in N$ heißt **regulärer Wert**, falls $f^{-1}(q)$ keine kritischen Punkte enthält.

2.1.7 Lemma. *Es seien M, N Hilbertmannigfaltigkeiten und $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Ist $q \in N$ ein regulärer Wert von f , so ist $f^{-1}(q)$ eine Untermannigfaltigkeit von M und für jedes $p \in f^{-1}(q)$ ist*

$$T_p f^{-1}(q) = \ker(d_p f)$$

Beweis. [Kli82, Theorem 1.3.8]

□

2.2 Die Kategorie der Hilbertbündel

2.2.1 Definition der Objekte und Morphismen

2.2.1 Definition. Es seien E, M Hilbertmannigfaltigkeiten, H ein Hilbertraum sowie $\pi : E \rightarrow M$ eine glatte Abbildung.

Eine **trivialisierende Überdeckung** \mathcal{A} von $\pi : E \rightarrow M$ ist eine Familie $\{(U_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ bestehend aus einer offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von M und Diffeomorphismen $\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times H$, so dass

- Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\tau_i} & U_i \times H \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & U_i & \end{array}$$

kommutiert. Insbesondere erhält man für jedes $i \in I$ und $x \in U_i$ einen Diffeomorphismus

$$\tau_{ix} : \pi^{-1}(x) \rightarrow H$$

- Für alle $i, j \in I$ mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ und jedes $x \in U_i \cap U_j$ ist $\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1} \in GL(H)$.
- Für alle $i, j \in I$ mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ist die Abbildung

$$U_i \cap U_j \rightarrow GL(H), \quad x \mapsto (\tau_j \tau_i^{-1})_x$$

glatt.

Zwei trivialisierende Überdeckungen \mathcal{A}, \mathcal{B} von $\pi : E \rightarrow M$ heißen **äquivalent**, falls $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ wieder eine trivialisierende Überdeckung von π ist. Dies definiert offenbar eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller trivialisierenden Überdeckungen für $\pi : E \rightarrow M$. $(\pi, E, M, H, \mathcal{S})$, wobei \mathcal{S} eine Äquivalenzklasse bezüglich obiger Relation ist, wird ein **Hilbertbündel** mit Modellraum H genannt. Die Struktur eines Hilbertbündels ist nach Definition durch Angabe einer trivialisierenden Überdeckung eindeutig bestimmt. Zudem kann wegen der zweiten Bedingung unabhängig von der gewählten Trivialisierung jede Faser $E_x := \pi^{-1}(x)$ eines Hilbertbündels als Objekt der Kategorie $\mathbf{HILB}_{\mathbb{R}}$ aufgefasst werden.

2.2.2 Definition. Es seien M, N Hilbertmannigfaltigkeiten und $\pi : E \rightarrow M, \pi' : E' \rightarrow N$ Hilbertbündel. Ein **Hilbertbündelmorphismus** $\pi \rightarrow \pi'$ besteht aus einem Paar glatter Abbildungen

$$f_0 : M \rightarrow N \quad \text{und} \quad f : E \rightarrow E'$$

so dass folgende Bedingungen erfüllt sind

- Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f_0} & N \end{array}$$

ist kommutativ und für jedes $x \in M$ ist $f_x = f|_{E_x} \in \mathcal{L}(E_x, E'_{f(x)})$.

- Für jedes $x \in M$ existieren Trivialisierungen

$$\tau : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times H \quad \text{und} \quad \tau' : \pi'^{-1}(U') \rightarrow U' \times H'$$

um x bzw. $f(x)$, so dass $f_0(U) \subset U'$ und die Abbildung

$$U \rightarrow \mathcal{L}(H, H'), \quad x \mapsto \tau'_{f_0(x)} \circ f \circ \tau_x^{-1}$$

glatt ist.

Mit diesen Definitionen erhält man die **Kategorie der Hilbertbündel \mathbf{HilbB}** . Werden lediglich Hilbertbündel über einer festen Hilbertmannigfaltigkeit M und Bündelmorphismen mit $f_0 = id$ betrachtet, so erhält man eine Unterkategorie **$\mathbf{HilbB}(M)$** .

2.2.2 Das Tangentialbündel

Die disjunkte Vereinigung $\coprod_{x \in M} T_x M$ lässt sich auf kanonische Weise mit einer Topologie versehen, so dass der entstehende Raum TM mit der offensichtlichen Projektion ein Hilbertbündel $\pi : TM \rightarrow M$ bildet. Die Trivialisierungen werden hierbei von den Karten des Atlas von M und den Abbildungen $\hat{\varphi}$ induziert, wobei der Modellraum von π gerade durch das Modell von M gegeben ist. Sind M, N Hilbertmannigfaltigkeiten und $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, so erhält man einen Hilbertbündelmorphismus $df : TM \rightarrow TN$, der für jedes $x \in M$ durch das Differential $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ gegeben ist. Diese Konstruktion liefert insgesamt einen kovarianten Funktor **$\mathbf{HMFD} \rightarrow \mathbf{HilbB}$** .

2.2.3 Das Pullbackbündel

In der Kategorie **\mathbf{HMFD}** führt der kategorielle Pullback eines Hilbertbündels $\pi : E \rightarrow N$ mittels einer glatten Abbildung $f : M \rightarrow N$ unter der offensichtlich harmlosen Identifikation der Faser $(f^*E)_x$ mit $E_{f(x)}$ zu einem Hilbertbündel $f^*\pi : f^*E \rightarrow M$ mit den Eigenschaften:

- Für jedes $x \in M$ ist $(f^*E)_x = E_{f(x)}$.
- Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \longrightarrow & E \\ f^*\pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

kommutiert, wobei die obere horizontale Abbildung auf jeder Faser die Identität ist.

- Ist $E = N \times H$ das triviale Bündel, so ist $f^*E = M \times H$ und $f^*\pi$ die Projektion.
- Ist $V \subset N$ offen und $U = f^{-1}(V)$, so ist

$$f^*(E|_V) = (f^*E)|_U$$

und man hat ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f^*E|_V & \longrightarrow & E|_V \\
 & \swarrow & \downarrow & & \swarrow \\
 f^*E & \longrightarrow & E & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & U & \longrightarrow & V \\
 \swarrow & & \downarrow & & \swarrow \\
 M & \longrightarrow & N & &
 \end{array}$$

2.2.4 Exakte Sequenzen von Hilbertbündeln

2.2.3 Definition. Es sei M eine Hilbertmannigfaltigkeit,

$$\pi : E \rightarrow M, \pi' : E' \rightarrow M, \pi'' : E'' \rightarrow M$$

Hilbertbündel über M , sowie $f : \pi' \rightarrow \pi, g : \pi \rightarrow \pi''$ Hilbertbündelmorphismen.

- Die Sequenz

$$0 \rightarrow \pi' \xrightarrow{f} \pi$$

heißt **exakt**, falls eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von M mit zugehörigen Trivialisierungen $\tau'_i : E'|_{U_i} \rightarrow U_i \times H'$ und $\tau_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times H$ existiert, so dass H stets eine Darstellung als Produkt $H = H' \times F_i$ gestattet und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 E'|_{U_i} & \xrightarrow{f} & E|_{U_i} \\
 \tau'_i \downarrow & & \downarrow \tau_i \\
 U_i \times H' & \xrightarrow{id \times \iota} & U_i \times H' \times F_i
 \end{array}$$

kommutiert.

- Die Sequenz

$$\pi \xrightarrow{g} \pi'' \rightarrow 0$$

heißt **exakt**, falls g surjektiv ist und eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von M mit zugehörigen Trivialisierungen $\tau_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times H$ und $\tau''_i : E''|_{U_i} \rightarrow U_i \times H''$ existiert, so dass H

stets eine Darstellung als Produkt $H = H'' \times F_i$ gestattet und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E|_{U_i} & \xrightarrow{g} & E''|_{U_i} \\ \tau_i \downarrow & & \downarrow \tau_i'' \\ U_i \times H'' \times F_i & \xrightarrow{id \times pr_1} & U_i \times H'' \end{array}$$

kommutiert.

- Die Sequenz

$$0 \rightarrow \pi' \xrightarrow{f} \pi \xrightarrow{g} \pi'' \rightarrow 0$$

heißt **exakt**, falls beide Enden exakt sind und $\text{im}(f) = \ker(g)$, wobei

$$\ker(g) = \bigcup_{x \in M} \ker(g|_{E_x})$$

Ist $\pi : E \rightarrow M$ ein Hilbertbündel, so heißt eine Teilmenge $S \subset E$ ein **Unterbündel**, falls eine exakte Sequenz $0 \rightarrow \pi' \xrightarrow{f} \pi$ mit $f(E') = S$ existiert. Damit besitzt S unabhängig von der Wahl des Bündels π' und des Morphismus f eine (bis auf Isomorphie in **HilbB**) eindeutige Struktur eines Hilbertbündels.

Desweiteren erhält man aus einer exakten Sequenz $0 \rightarrow \pi' \xrightarrow{f} \pi$ das Quotientenbündel π_Q mit Totalraum $E/E' = \coprod_{x \in M} E_x/E'_x$. Der hieraus auf kanonische Weise zu erhaltende Hilbertbündelmorphismus $h : \pi \rightarrow \pi_Q$ ist der kategorielle Kokern des Hilbertbündelmorphismus $f : \pi' \rightarrow \pi$. Dual hierzu erhält man aus einer exakten Sequenz $\pi \xrightarrow{g} \pi'' \rightarrow 0$ wie in obiger Definition ein Hilbertbündel π_K mit Totalraum $\bigcup_{x \in M} \ker(g|_{E_x})$. Der hieraus kanonisch zu erhaltende Hilbertbündelmorphismus $h' : \pi_K \rightarrow \pi$ ist der kategorielle Kern des Hilbertbündelmorphismus $g : \pi \rightarrow \pi''$.

2.2.4 Definition. Ist $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Hilbertmannigfaltigkeiten, so erhält man aus der universellen Abbildungseigenschaft eines Pullbacks einen Hilbertbündelmorphismus $T^*f : TM \rightarrow f^*TN$.

- Ist f eine Immersion so liefert dies eine exakte Sequenz $0 \rightarrow TM \xrightarrow{T^*f} f^*TN$. Das Quotientenbündel

$$f^*TN/\text{im}(T^*f)$$

heißt das **Normalenbündel** von f .

- Ist f eine Submersion so erhält man eine exakte Sequenz $TM \xrightarrow{T^*f} f^*TN \rightarrow 0$. Der Kern der Sequenz heißt das **Unterbündel** von f oder **Bündel entlang der Faser**.

2.3 Grundbegriffe der Morse Theorie

2.3.1 Selbstadjungierte Operatoren mit abgeschlossenem Bild

In diesem Abschnitt werden zunächst weiterführende Aussagen zu selbstadjungierten Operatoren reeller Hilberträume präsentiert. Bei einigen Resultaten wird statt eines Beweises lediglich auf Literatur verwiesen, in der die entsprechenden Aussagen für Operatoren komplexer Hilberträume zu finden sind. In diesen Fällen übertragen sich die dort gegebenen Beweise aber buchstäblich und werden hier nicht noch einmal aufgeschrieben.

Es sei im Weiteren stets H ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2.3.1 Lemma. *Für $T \in \mathcal{S}(H)$ sind folgende Aussagen äquivalent*

1. $\text{im}(T) \subset H$ ist abgeschlossen.
2. $T|_{\ker(T)^\perp} \in GL(\ker(T)^\perp)$.
3. 0 ist kein Häufungspunkt von $\sigma(T)$.

Beweis. Die Äquivalenz der ersten beiden Aussage ist beispielsweise in [BW93, Proposition 9.4] bewiesen.

Für $T \in \mathcal{S}(H)$ ist zunächst $A = T|_{\ker(T)^\perp}^{-1}: \ker(T)^\perp \rightarrow \ker(T)^\perp$ selbstadjungiert und dicht definiert. Die Äquivalenz folgt nun aus $\sigma(A) = (\sigma(T) \setminus \{0\})^{-1}$ und

$$\|A\| = \|A^C\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A^C)\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

wobei mittlere Gleichheit in [Wer05, Satz VI.1.6&VI.1.7] gezeigt ist. □

Es soll nun die Spektralzerlegung für eine große Klasse selbstadjungierter Operatoren bewiesen werden, die in der Theorie kritischer Punkte ein wichtiges Hilfsmittel ist und demnach noch häufiger Verwendung finden wird. Hierfür bezeichne zunächst für $T \in \mathcal{S}(H)$

$$m(A) = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle, \quad M(A) = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$$

die **obere-** und **untere Schranke** von T .

2.3.2 Lemma. *Für jedes $T \in \mathcal{S}(H)$ ist $\sigma(T) \subset [m(A), M(A)]$, $m(A), M(A) \in \sigma(A)$ und zudem*

$$\|A\| = \max\{|m(A)|, |M(A)|\}$$

Beweis. [Heu92, Satz 112.6] □

2.3.3 Definition. Es sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{S}(H)$. Dann heißt T

- **positiv definit**, falls ein $c > 0$ mit $\langle Tx, x \rangle \geq c\|x\|^2$ für alle $x \in H$ existiert.
- **negativ definit**, falls $-T$ positiv definit ist.

Eine unmittelbare Konsequenz aus 2.3.2 und der Abgeschlossenheit des Spektrums ist:

2.3.4 Lemma. $T \in \mathcal{S}(H)$ ist genau dann

- *positiv definit, falls $\sigma(T) \subset (0, \infty)$.*
- *negativ definit, falls $\sigma(T) \subset (-\infty, 0)$.*

Der folgende Satz liefert nun als bedeutsame Anwendung des Funktionalkalküls die Existenz der Spektralzerlegung.

2.3.5 Satz. *Es erfülle $T \in \mathcal{S}(H)$ eine der äquivalenten Bedingungen aus 2.3.1. Dann existiert eine orthogonale Zerlegung*

$$H = H^+ \oplus H^0 \oplus H^-$$

in T -invariante Unterräume, so dass $H^0 = \ker(T)$, $T|_{H^+}$ positiv definit und $T|_{H^-}$ negativ definit ist.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ mit $\sigma(T) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \{0\}$. Desweiteren sei $p^+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $p^+(t) = 1$ für $t \geq \varepsilon$ und $p^+(t) = 0$ für $t \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $p^- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p^-(t) = p^+(-t)$ und $p^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $p^0(0) = 1$ und $p^0(t) = 0$ für $|t| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Mit

$$P^+ = p^+(T), \quad P^- = p^-(T), \quad P^0 = p^0(T)$$

sind dies aber nach Wahl der Funktionen Orthogonalprojektionen mit $P^+ + P^- + P^0 = id$ und mit 1.2.11 ist $\text{im}(P^0) = \ker(T)$. Insgesamt besteht also mit

$$H^+ = \text{im}(P^+), \quad H^- = \text{im}(P^-), \quad H^0 = \text{im}(P^0)$$

eine orthogonale Zerlegung $H = H^+ \oplus H^0 \oplus H^-$.

Man betrachte nun die Funktion $\sigma(T) \ni t \mapsto tp^+(t) \in \mathbb{R}$. Mit $tp^+(t) \geq 0$ auf $\sigma(T)$ ist unter Verwendung von 1.2.10 $TP^+ = P^+T$ mit $\sigma(TP^+) \subset [0, \infty)$ und folglich $T(H^+) \subset H^+$ mit $\sigma(T|_{H^+}) \subset [0, \infty)$. Da nun aber unter den Voraussetzungen an $\sigma(T)$ mit 2.3.1 $T^{-1} : H^+ \oplus H^- \rightarrow H^+ \oplus H^-$ existiert und beschränkt ist, erhält man $T|_{H^+} \in GL(H^+)$ und damit $\sigma(T|_{H^+}) \subset (0, \infty)$ womit wegen 2.3.4 $T|_{H^+} : H^+ \rightarrow H^+$ als positiv definit nachgewiesen ist. Für H^- schließt man vollkommen analog. \square

Es bezeichne $\mathcal{C} = \mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H)$ die **Calkin-Algebra** von H sowie \mathcal{C}^\times die Einheitengruppe von \mathcal{C} . Damit ist die Menge der **Fredholmoperatoren** auf H bekanntlich durch

$$\mathcal{F}(H) = \pi^{-1}(\mathcal{C}^\times) \subset \mathcal{L}(H)$$

gegeben, wobei man dieser Darstellung zugleich die Offenheit dieser Teilmenge in $\mathcal{L}(H)$ entnimmt. Dieser Unterraum zerfällt in die Zusammenhangskomponenten

$$\mathcal{F}_k(H) = \{T \in \mathcal{F}(H) : \text{ind}(T) = k\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Wegen der vorausgesetzten Vollständigkeit von H erweist sich ein Operator T bereits genau dann als Fredholmoperator, wenn $\dim \operatorname{coker}(T), \dim \ker(T) < \infty$. Da nach Definition Fredholmoperatoren stets abgeschlossenes Bild haben, bilden die selbstadjungierten Fredholmoperatoren

$$\hat{\mathcal{F}}(H) = \mathcal{F}(H) \cap \mathcal{S}(H)$$

einen Raum der in Hinblick auf die bisherigen Aussagen dieses Abschnitts von besonderem Interesse ist.

2.3.6 Lemma. *Für $T \in \mathcal{S}(H)$ ist $T \in \hat{\mathcal{F}}$ genau dann, wenn $\dim \ker T < \infty$ und T eine der äquivalenten Aussagen aus 2.3.1 erfüllt.*

Beweis. Für die nicht triviale Richtung des Beweises besteht mit der Abgeschlossenheit von $\operatorname{im}(T)$ bekanntlich eine Orthogonalzerlegung $H = \ker T \oplus \operatorname{im} T$ und damit ist $\dim \operatorname{coker} T < \infty$, also $T \in \hat{\mathcal{F}}$. \square

2.3.7 Folgerung. *Es ist $T \in \hat{\mathcal{F}}(H) \iff T^{\mathbb{C}} \in \hat{\mathcal{F}}(H^{\mathbb{C}})$.*

Beweis. Aus 2.3.6 in Verbindung mit (1.1.1) und 1.1.10. \square

Man betrachte nun das essentielle Spektrum

$$\sigma_{\text{ess}}(T) = \sigma(\pi(T)) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda - T \notin \mathcal{F}(H)\}$$

Für $T \in \hat{\mathcal{F}}$ ist zunächst mit (1.1.1) und 2.3.6

$$\sigma_{\text{ess}}(T) = \sigma_{\text{ess}}(T^{\mathbb{C}})$$

und folglich das essentielle Spektrum niemals leer. Ein besonders interessantes Resultat ist

2.3.8 Lemma. *Für $T \in \hat{\mathcal{F}}(H)$ ist $\sigma(T) = \sigma_{\text{ess}}(T) \cup \sigma_d(T)$, wobei die Vereinigung disjunkt ist.*

Beweis. Das Resultat ist im komplexen Fall in [GGK90, Chapter XI, Corollary 8.5] bewiesen und folgt nun mit $\sigma(T) = \sigma(T^{\mathbb{C}})$, $\sigma_{\text{ess}}(T) = \sigma_{\text{ess}}(T^{\mathbb{C}})$ und $\sigma_d(T) = \sigma_d(T^{\mathbb{C}})$. \square

2.3.2 Anwendung des Funktionalkalküls auf Bilinearformen

In denen im nächsten Abschnitt zu präsentierenden grundlegenden Betrachtungen zur Morse Theorie werden Bilinearformen eine entscheidende Rolle spielen. Da sie zudem in [MPP05] von Bedeutung sind, sind die Definitionen hier eng an diesen Artikel angelehnt.

Es sei H ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und es bezeichne

$$\mathcal{B}(H) = \{B : H \times H \rightarrow \mathbb{R} : B \text{ bilinear und beschränkt}\}$$

Bekanntlich existiert zu jedem $B \in \mathcal{B}$ ein eindeutig bestimmtes $T_B \in \mathcal{S}(H)$ mit

$$B(x, y) = \langle T_B x, y \rangle \quad \forall x, y \in H$$

das im Folgenden als **Riesz-Darstellung** von B bezeichnet werde. Mit der Abgeschlossenheit von $\mathcal{S}(H) \subset \mathcal{L}(H)$ und

$$\|T_B\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T_B x, x \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} |B(x, x)| \quad \forall T \in \mathcal{S}(H)$$

wobei $B(x, y) = \langle T_B x, y \rangle$, ist nun $\mathcal{B}(H)$ mit der Norm $\|B\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |B(x, x)|$ ein Banachraum, der zudem isometrisch isomorph zu $\mathcal{S}(H)$ ist.

2.3.9 Definition. Es sei $B \in \mathcal{B}(H)$ und $T_B \in \mathcal{S}(H)$ die Riesz-Darstellung von B .

- B heißt **nicht entartet**, falls $T_B \in GL(H)$.
- B heißt **Fredholm**, falls $T_B \in \hat{\mathcal{F}}(H)$.

Es bezeichne $\mathcal{B}_F(H) \subset \mathcal{B}(H)$ die Teilmenge aller Fredholm-Bilinearformen.

Das folgende Resultat wird in [MPP05, S. 76] ohne Beweis erwähnt und wird sich später als bedeutsam erweisen.

2.3.10 Lemma. $\mathcal{B}_F(H) \subset \mathcal{B}(H)$ ist offen und stabil unter Störungen durch schwach-stetige Bilinearformen.

Beweis. Die Offenheit folgt unmittelbar aus der entsprechenden Aussage über Fredholmoperatoren.

Zum Beweis der zweiten Aussage sei $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ schwach stetig und $T \in \mathcal{S}(H)$ die Riesz-Darstellung von B . Da jedes Orthonormalsystem $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ schwach gegen 0 konvergiert ist $\langle T e_n, e_n \rangle \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ wegen der vorausgesetzten schwachen Stetigkeit von B . Für ein Orthonormalsystem $\{e_0\} \cup \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ werde im Folgenden für $n \in \mathbb{N}$ mit P_n die Orthogonalprojektion auf $\text{span}\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$ und mit $Q_n = id - P_n$ die hierzu komplementäre Orthogonalprojektion bezeichnet.

Das Ziel ist zunächst die induktive Konstruktion eines Orthonormalsystems mit

$$\|TQ_n\| \leq |\langle TQ_n e_n, e_n \rangle| + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.3.1}$$

Man wähle hierzu ein beliebiges normiertes $e_0 \in H$. Sind nun $\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ bereits gewählt, so existiert ein normiertes $e_n \in Q_n(H) = \{e_0, \dots, e_{n-1}\}^\perp$ mit

$$\|TQ_n\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle TQ_n x, x \rangle| \leq |\langle TQ_n e_n, e_n \rangle| + \frac{1}{n}$$

und folglich erhält man induktiv ein Orthonormalsystem mit der Eigenschaft (2.3.1). Nun ist aber nach Definition $Q_n e_n = e_n$ und damit

$$|\langle TQ_n e_n, e_n \rangle| = |\langle T e_n, e_n \rangle| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Man erhält schließlich mit (2.3.1)

$$\|TQ_n\| \leq |\langle TQ_n e_n, e_n \rangle| + \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (2.3.2)$$

Nun ist aber $T_n = TP_n = T(id - Q_n)$ ein Operator endlichen Ranges und mit (2.3.2) gilt

$$\|T - T_n\| = \|TQ_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Folglich ist aber T als Grenzelement einer Folge Operatoren endlichen Ranges kompakt und man erhält sofort die Behauptung aus der Stabilität der Fredholm Operatoren unter additiven kompakten Störungen. \square

Man betrachte nun für $B \in \mathcal{B}(H)$ den abgeschlossenen Unterraum

$$\ker(B) = \{u \in H : B(u, v) = 0 \forall v \in H\} \subset H$$

Offenbar ist damit $\ker(B) = \ker(T_B)$.

Das folgende Resultat ist die Übertragung von 2.3.5 auf Bilinearformen.

2.3.11 Satz. *Es sei $B \in \mathcal{B}_F(H)$. Dann existiert eine Orthogonalzerlegung $H = H^+ \oplus H^0 \oplus H^-$ mit $H^0 = \ker(B)$ und ein $T \in \mathcal{S}(H)$, so dass*

$$B(Tx, Tx) = \|P^+x\|^2 - \|P^-x\|^2$$

wobei P^+, P^- die Orthogonalprojektionen auf H^+ und H^- sind.

Beweis. Mit der Riesz-Darstellung $T_B \in \hat{\mathcal{F}}(H)$ existiert wegen 2.3.1 ein $\varepsilon > 0$, so dass $\sigma(T_B) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \{0\}$. Es sei nun $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, strikt positive Funktion mit $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}}$ für $|t| \geq \varepsilon$ und $\varphi(0) = 1$. Dann ist wegen $\varphi(t) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$

$$T = \varphi(T_B) \in \mathcal{S}(A) \cap GL(H)$$

Mit den Funktionen $p^+, p^- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus dem Beweis von 2.3.5 ist

$$\varphi(t)t\varphi(t) = \operatorname{sgn}(t) = p^+(t) - p^-(t) \text{ für alle } t \in \sigma(T_B)$$

und damit $TT_B T = P^+ - P^-$. Folglich ist

$$\begin{aligned} B(Tx, Tx) &= \langle T_B Tx, Tx \rangle = \langle TT_B Tx, x \rangle = \langle P^+x - P^-x, x \rangle \\ &= \langle P^+x, x \rangle - \langle P^-x, x \rangle = \|P^+x\|^2 - \|P^-x\|^2 \end{aligned}$$

\square

2.3.3 Kritische Punkte, die Hessesche und das Morse-Palais Lemma

Es sei M eine Hilbertmannigfaltigkeit mit Modell H und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. In dieser Situation ist offenbar $p \in M$ genau dann ein kritischer Punkt, wenn $d_p f = 0$. Desweiteren werde die Menge aller kritischen Punkte einer glatten Funktion im Folgenden mit $\text{Crit}(f)$ bezeichnet. Die hier vorgestellten Resultate sind sämtlich [Ma94] und [Pa63] entnommen.

Es sei $p \in \text{Crit}(f)$ und (U, φ) eine Karte von M mit $p \in U$. Man betrachte die Abbildung $F = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ und damit die quadratische Form

$$\text{hess}_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{hess}_p(f)(v) = (D_{\varphi(p)}^2 F)(u, u) \quad (2.3.3)$$

wobei $v = [U, \varphi, u]$.

2.3.12 Lemma. hess_p ist unabhängig von der gewählten Karte (U, φ) .

Beweis. Es sei (V, ψ) eine weitere Karte von M mit $p \in V$, $G = f \circ \psi^{-1}$ und $v = [V, \psi, w]$. Mit der Kartenwechselabbildung $\eta = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ ist

$$F = f \circ \varphi^{-1} = (f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1}) = G \circ \eta \text{ auf } \varphi(U \cap V)$$

Hiermit ist aber für jedes $x \in \varphi(U \cap V)$ und $\xi \in H$

$$\begin{aligned} (D_x F)(\xi) &= (D_{\eta(x)} G)((D_x \eta)(\xi)) \\ (D_x^2 F)(\xi, \xi) &= (D_{\eta(x)}^2 G)((D_x \eta)(\xi), (D_x \eta)(\xi)) + (D_{\eta(x)} G)((D_x^2 \eta)(\xi, \xi)) \end{aligned}$$

Für $x = \varphi(p)$ und $\xi = u$ erhält man unter Verwendung von $p \in \text{Crit}(f)$

$$(D_{\varphi(p)}^2 F)(u, u) = (D_{\psi(p)}^2 G)((D_{\varphi(p)} \eta)(u), (D_{\varphi(p)} \eta)(u)) = (D_{\psi(p)}^2 G)(w, w) \quad (2.3.4)$$

wobei verwendet wurde, dass $(D_{\varphi(p)} \eta)u = w$ wegen $v = [U, \varphi, u] = [V, \psi, w]$ □

2.3.13 Definition. Für $p \in \text{Crit}(f)$ heißt die aus (2.3.3) durch Polarisierung entstehende Bilinearform $\text{Hess}_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ die **Hessesche** von f an der Stelle p .

2.3.14 Bemerkung. Mit dieser Definition ist die Hessesche ausschließlich auf den Tangentialräumen kritischer Punkte definiert. Es gibt alternative Definitionen mit denen der Begriff der Hesseschen auf das gesamte Tangentialbündel fortgesetzt werden kann. Diese Definitionen sind allerdings im Allgemeinen nicht intrinsisch, da weitere Wahlen, wie beispielsweise ein Zusammenhang auf M , benötigt werden. Näheres hierzu ist in [PT88, §9] zu finden.

Das folgende Resultat ist von besonderer Bedeutung für die Berechnung der Hesseschen.

2.3.15 Lemma. Es sei $p \in \text{Crit}(f)$, $v \in T_p M$ und $\gamma : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$. Dann ist

$$\text{hess}_p(v) = \left. \frac{d^2 f(\gamma(t))}{dt^2} \right|_{t=0}$$

Beweis. Es sei (U, φ) eine Karte von M mit $p \in U$ und $v = [U, \varphi, u]$. Nun ist in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$

$$f \circ \gamma = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma) = F \circ \sigma$$

wobei $\sigma : I \rightarrow H$ eine glatte Kurve mit $\dot{\sigma}(0) = u$ ist. Mit $g = f \circ \gamma$ erhält man für hinreichend kleines s

$$\begin{aligned} g'(s) &= (D_{\sigma(s)}F)(\dot{\sigma}(s)) \\ g''(s) &= (D_{\sigma(s)}^2F)(\dot{\sigma}(s), \dot{\sigma}(s)) + (D_{\sigma(s)}F)(\ddot{\sigma}(s)) \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung $p \in \text{Crit}(f)$ ist damit für $s = 0$

$$g''(0) = (D_{\varphi(p)}^2F)(u, u) = \text{Hess}_p(v, v)$$

□

Es sei (U, φ) eine Karte von M um $p \in \text{Crit}(f)$ und $F = f \circ \varphi^{-1}$. Nach Definition ist

$$\text{Hess}_p(f)(v, v') = (D_{\varphi(p)}^2F)(u, u'), \quad v = [U, \varphi, u], v' = [U, \varphi, u'] \in T_pM$$

wobei $D_{\varphi(p)}^2F$ eine beschränkte, symmetrische Bilinearform auf H ist. Diese besitzt folglich eine Riesz-Darstellung $A_p \in \mathcal{S}(H)$, die aber offensichtlich nicht unabhängig von der gewählten Karte ist. Man betrachte nun aber die im Beweis von 2.3.12 gefundene Beziehung (2.3.4). Ist mit den dort gewählten Bezeichnungen A die Riesz-Darstellung von $D_{\varphi(p)}^2F$ und B die Riesz-Darstellung von $D_{\psi(p)}^2G$, so erhält man

$$\langle Au, u \rangle = \langle B(D_{\varphi(p)}\eta)u, (D_{\varphi(p)}\eta)u \rangle = \langle (D_{\varphi(p)}\eta)^* B(D_{\varphi(p)}\eta)u, u \rangle \quad \forall u \in H$$

und folglich ist

$$A = (D_{\varphi(p)}\eta)^* B(D_{\varphi(p)}\eta) \tag{2.3.5}$$

Mit $D_{\varphi(p)}\eta \in GL(H)$ ist damit die nachstehende Definition sinnvoll.

2.3.16 Definition. Es sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion.

- $p \in \text{Crit}(f)$ heißt **nicht entartet**, falls $A_p \in GL(H)$.
- f heißt **Morse Funktion**, falls alle $p \in \text{Crit}(f)$ nicht entartet sind.

2.3.17 Definition. Für $p \in \text{Crit}(f)$ heißt

$$i_{\text{Morse}}(p) = \sup\{\dim W : W \subset T_pM \text{ Unterraum, Hess}_p(f)|_W \text{ negativ definit}\} \in [0, \infty]$$

der **Morse Index** von p .

Es sei $p \in \text{Crit}(f)$ und $A_p \in \mathcal{S}(H)$ die Riesz-Darstellung von $\text{Hess}_p(f)$ bezüglich einer fest gewählten Karte (U, φ) um p . Desweiteren sei $H = H^+ \oplus H^0 \oplus H^-$ die gemäß 2.3.5 bestehende Zerlegung von H in den maximalen Unterraum auf dem A_p positiv definit ist, den Kern von A_p und den maximalen Unterraum auf dem A_p negativ definit ist. Die Karte (U, φ) heißt

- **Morse-Karte erster Art**, falls

$$f(\varphi^{-1}(v)) = f(p) + \frac{1}{2} \langle A_p v, v \rangle, \quad v \in \varphi(U)$$

- **Morse-Karte zweiter Art**, falls

$$f(\varphi^{-1}(v)) = f(p) + \frac{1}{2} (\|P^+ v\|^2 - \|P^- v\|^2), \quad v \in \varphi(U)$$

Hierbei bezeichne P^+, P^- die Projektionen auf H^+, H^- . Offenbar ist jede Morse-Karte zweiter Art bereits eine Morse-Karte erster Art und wegen 2.3.11 existiert mit jeder Morse-Karte erster Art auch stets eine Morse-Karte zweiter Art. Daher soll im Folgenden von der Existenz von Morse-Karten gesprochen werden. Im Falle der Existenz ist offenbar stets $i_{\text{Morse}}(p) = \dim H^-$. Das nun folgende Morse-Palais Lemma ist die Verallgemeinerung des bekannten Morse Lemmas auf Hilbertmannigfaltigkeiten und ist für viele Konstruktionen der Morse Theorie unverzichtbar.

2.3.18 Lemma (Morse-Palais Lemma). *Es sei $p \in \text{Crit}(f)$ nicht entartet. Dann existieren Morse-Karten um p .*

Beweis. Es sei $p \in \text{Crit}(f)$ und (U, φ) eine Karte um p . Es sei zudem $F = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ und (U, φ) so gewählt, dass $\varphi(p) = 0 \in H$.

Aus dem Taylorschen Satz (vgl. [La93, S. 349]) erhält man zunächst in einer Umgebung V von 0 die Darstellung

$$F(x) - F(0) = \int_0^1 (1-t) D_{tx}^2 F dt(x, x)$$

und da mit F auch

$$x \mapsto \int_0^1 (1-t) D_{tx}^2 F dt \in \mathcal{B}(H) \tag{2.3.6}$$

glatt ist (vgl. hierzu [La93, S. 350]), erhält man schließlich eine glatte Abbildung¹

$$x \mapsto A(x) \in \mathcal{S}(H)$$

so dass

$$F(x) - F(0) = \langle A(x)x, x \rangle, \quad x \in V$$

¹Die Abbildung $\mathcal{B}(H) \ni B \mapsto T_B \in \mathcal{S}(H)$ ist linear und stetig, damit insbesondere glatt.

Da insbesondere $A(x)$ für jedes feste $x \in V$ die Riesz-Darstellung von (2.3.6) ist, erhält man mit $A = A(0)$ unmittelbar $(D_0^2 F)(x, y) = 2\langle Ax, y \rangle$ für alle $x, y \in H$. Folglich ist $2A$ die Riesz-Darstellung der Hesseschen von f bezüglich der gewählten Karte und damit nach Voraussetzung $A = A(0) \in \mathcal{S}(H) \cap GL(H)$. Nach eventueller Verkleinerung von V ist $A(x) \in \mathcal{S}(H) \cap GL(H)$ für alle $x \in V$. Man definiere $B : V \rightarrow GL(H)$ durch $B(x) = A(x)^{-1}A(0)$. Diese Abbildung ist mit $x \mapsto A(x)$ ebenfalls glatt und es ist $B(0) = id$. Folglich kann nach eventueller weiterer Verkleinerung von V eine Abbildung $C : V \rightarrow GL(H)$ mit $C(x) = \sqrt{B(x)}$ definiert werden, die ebenfalls glatt ist, da die Wurzel in einer Umgebung von id durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt ist. Nun ist

$$B(x)^* A(x) = A(0)A(x)^{-1}A(x) = A(0) = A(x)B(x), \quad x \in V$$

Die Gültigkeit dieser Beziehung ist nun zunächst induktiv für jedes Polynom einsehbar und gilt damit nach Grenzübergang auch für $C(x)$. Man erhält

$$C(x)^* A(x)C(x) = A(x)C(x)^2 = A(x)B(x) = A(0) = A, \quad x \in V$$

und folglich

$$A(x) = C_1(x)^* AC_1(x), \quad x \in V \tag{2.3.7}$$

mit der glatten Abbildung $C_1 : V \rightarrow GL(H)$, $C_1(x) = C(x)^{-1}$. Definiert man nun $\psi : V \rightarrow H$ durch $\psi(x) = C_1(x)x$, so ist zunächst wegen

$$D_x \psi = C_1(x) + (D_x C_1)x$$

$D_0 \psi = C_1(0) = \sqrt{B(0)}^{-1} = id$ und folglich $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ nach eventueller weiterer Verkleinerung von V ein Diffeomorphismus. Unter Verwendung von (2.3.7) ist zudem

$$F(x) - F(0) = \langle A(x)x, x \rangle = \langle C_1(x)^* AC_1(x)x, x \rangle = \langle A\psi(x), \psi(x) \rangle, \quad x \in V$$

und damit

$$F(\psi^{-1}(x)) - f(p) = (f \circ (\psi \circ \varphi)^{-1})(x) - f(p) = \langle Ax, x \rangle, \quad x \in \psi(V)$$

Mit (2.3.5) und $D_0 \psi = id$ ist abschließend die Riesz-Darstellung der Hesseschen von f bezüglich der Karte $\psi \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)}$ ebenfalls durch $2A$ gegeben ist. \square

Als unmittelbare Konsequenzen ergeben sich die nachstehenden wichtigen Aussagen.

2.3.19 Folgerung. *Die Menge aller nicht entarteten kritischen Punkte ist isoliert in $\text{Crit}(f)$.*

2.3.20 Folgerung. *Es sei $p \in \text{Crit}(f)$ nicht entartet.*

- *Ist $i_{\text{Morse}}(p) = 0$, so besitzt f bei p ein lokales Minimum.*

- *Ist*

$$\sup\{\dim W : W \subset T_p M \text{ Unterraum, Hess}_p(f)|_W \text{ positiv definit}\} = 0$$

so besitzt f bei p ein lokales Maximum.

2.3.21 Bemerkung. Die Beweise dieser Aussagen benötigt nicht notwendig das Morse-Palais Lemma. Die erste Folgerung kann auch mittels des Umkehrsatzes bewiesen werden, die zweite Aussage lässt sich auf direkterem Weg aus dem Taylorschen Satz gewinnen.

Teil II

Homotopieinvarianten der Analysis

Kapitel 3

Der Brouwersche Abbildungsgrad

Das Ziel dieses Kapitels ist die Definition des Brouwerschen Abbildungsgrades, der im Morse Index Theorem [MPP05] zur Konstruktion eines Index für Geodäten verwendet wird, welcher als eine Verallgemeinerung der Zählung konjugierter Punkte angesehen werden kann. Der Abbildungsgrad ist in der Literatur durchaus unproblematisch auffindbar. Dennoch soll seine Konstruktion hier dargelegt werden, da er ein verhältnismäßig einfaches Modell für die grundsätzlich der Morse Index Theorie semi-Riemannscher Geodäten beseelende Problematik bietet.

Die Motivation des Abbildungsgrades besteht in dem Verlangen nach einer möglichst einfach zu berechnenden Zuweisung einer ganzen Zahl zu einer stetigen Funktion, mittels der möglichst detaillierte Aussagen über die Nullstellen der Funktion gemacht werden können. Neben der schon für glatte Funktionen bestehenden Möglichkeit der Häufung von Nullstellen, wird auch die offenbare Instabilität dieser wenig Hoffnung auf eine aussagekräftige Beschreibung von Nullstellenmengen mittels einer einzigen ganzen Zahl machen. Die entscheidende Idee zum Umgang mit diesen Schwierigkeiten ist die Forderung nach Invarianz des Abbildungsgrades unter gewissen Homotopien, mit der zugleich für die Möglichkeit einer expliziten Berechnung Sorge getragen wird. Mit der hier gewählten axiomatischen Konstruktion des Abbildungsgrades wird zugleich die Eindeutigkeit des Abbildungsgrades unter zwei naheliegenden weiteren Forderungen an seine Eigenschaften gezeigt.

Von der grundlegenden Idee des Umgangs mit obigen Irregularitäten bis zum Verlauf der hier präsentierten Konstruktion ist der Brouwersche Abbildungsgrad neben seiner Verwendung in [MPP05] ein lehrreiches und verhältnismäßig einfach beschaffenes Analogon zu den Methoden der Morse Theorie allgemeiner semi-Riemannscher Geodäten, dessen grundsätzliche Idee sich in vielen Konstruktionen und Beweismethoden widerspiegelt.

3.1 Axiomatische Definition und wichtige Eigenschaften

3.1.1 Definition. Es sei

$$\mathfrak{M} = \{(f, \Omega, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ beschränkt und offen, } f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stetig, } y \notin f(\partial\Omega)\}$$

Die Aussage des folgenden Satzes ist die Existenz und Eindeutigkeit des Brouwerschen Abbildungsgrades. Der Rest des Kapitels beinhaltet im Wesentlichen den Beweis dieser Aussage.

3.1.2 Satz. *Es existiert genau eine Funktion*

$$\text{deg} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{Z}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(d1) $\text{deg}(id, \Omega, y) = 1$ für alle $y \in \Omega$.

(d2) Für $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ offen mit $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ und $y \notin f(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ ist

$$\text{deg}(f, \Omega, y) = \text{deg}(f, \Omega_1, y) + \text{deg}(f, \Omega_2, y)$$

(d3) Ist $H : [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Homotopie und $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg mit $y(t) \notin H(t, \partial\Omega)$ für alle $t \in [0, 1]$, so ist $\text{deg}(H(t, \cdot), \Omega, y(t))$ unabhängig von $t \in [0, 1]$.

Aus den Axiomen des Abbildungsgrades erhält man mühelos das folgende Resultat.

3.1.3 Lemma. *Der Abbildungsgrad besitzt die folgenden Eigenschaften:*

1. Für jede offene Teilmenge $\Omega_1 \subset \Omega$ mit $y \notin f(\bar{\Omega} \setminus \Omega_1)$ ist $\text{deg}(f, \Omega, y) = \text{deg}(f, \Omega_1, y)$.

2. Aus $\text{deg}(f, \Omega, y) \neq 0$ folgt $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.

3. Für $|f(x) - g(x)| < d(y, f(\partial\Omega))$ auf $\partial\Omega$ ist $\text{deg}(f, \Omega, y) = \text{deg}(g, \Omega, y)$. Insbesondere ist also $\text{deg}(f, \Omega, y) = \text{deg}(g, \Omega, y)$ falls nur $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$.

4. Mit $r := d(y, f(\partial\Omega))$ ist $\text{deg}(\cdot, \Omega, y)$ konstant auf $\{g \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) : \|g - f\|_\infty < r\}$ und $\text{deg}(f, \Omega, \cdot)$ konstant auf $B_r(y) \subset \mathbb{R}^n$.

Beweis. 1. Mit $\Omega_1 = \Omega$ und $\Omega_2 = \emptyset$ erhält man zunächst mit (d2) $\text{deg}(f, \emptyset, y) = 0$. Ist nun $\Omega_1 \subset \Omega$ offen mit $y \notin f(\bar{\Omega} \setminus \Omega_1)$, so erhält man mit (d2) $\text{deg}(f, \Omega, y) = \text{deg}(f, \Omega_1, y) + \text{deg}(f, \emptyset, y) = \text{deg}(f, \Omega_1, y)$.

2. Ist $f^{-1}(y) = \emptyset$, so erhält man mit (1) $\text{deg}(f, \Omega, y) = \text{deg}(f, \emptyset, y) = 0$.

3. Man betrachte die Homotopie $H(t, x) = (1 - t)f(x) + tg(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|H(t, x) - y\| &= \|f(x) - y + t(g(x) - f(x))\| \\ &\geq \|f(x) - y\| - \|g(x) - f(x)\| \\ &\geq d(y, f(\partial\Omega)) - \|g(x) - f(x)\| > 0 \end{aligned}$$

für alle $(t, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$. Die Behauptung folgt nun mit (d3).

4. Die erste Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz aus (3).

Ist $y_1 \in B_r(y)$, so existiert ein Weg $y(t)$ von y nach y_1 und die Behauptung folgt sofort aus (d3).

□

3.2 Konstruktion des Abbildungsgrades

Es gibt mehrere Konstruktionen des Abbildungsgrades. Hier wird eine eher moderne, analytische Konstruktion gewählt, die hauptsächlich an [Te01] orientiert und wie bereits eingangs erwähnt lehrreich in Hinblick auf die Morse Theorie semi Riemannscher Geodäten ist. Ein gänzlich verschiedener Zugang der Konstruktion mittels Homologietheorie ist beispielsweise in [Bro04, Chapter 8] zu finden.

Zum Beweis des Satzes 3.1.2 wird zunächst die Existenz eines Abbildungsgrades mit den Eigenschaften (d1)-(d3) angenommen. Die Idee des Beweises ist hieraus zu rekonstruieren, wie sich der Abbildungsgrad für ein beliebiges Element aus \mathfrak{M} berechnen lässt. Hierzu wird zuerst der allgemeinste Fall stetiger Funktionen betrachtet, für die keine der oben genannten Irregularitäten auftreten und in diesem Spezialfall eine handliche Formel zur Berechnung des Abbildungsgrades aus den Axiomen gefolgert. Das weitere Vorgehen wird nun entscheidend durch die geforderte Homotopieinvarianz bestimmt, da hiermit insbesondere auch eine gewisse Stabilität des Abbildungsgrades bestehen muss. Weil sich nun die zur Vermeidung von Irregularitäten an die anfangs betrachteten Funktionen gestellten Bedingungen in geeigneter Weise als generisch erweisen, wird diese Stabilität letztlich zeigen, dass es bereits ausreicht den Abbildungsgrad im regulären Fall berechnen zu können. Der Satz 3.1.2 lässt sich damit abschließend durch den Nachweis der Eigenschaften (d1)-(d3) für die so erhaltene Reduktion der Berechnung auf den regulären Fall beweisen.

In der Morse Theorie semi-Riemannscher Geodäten wird man bei der Aufsuche geeigneter Verallgemeinerungen der Indizes des klassischen Morse Index Theorems mit ähnlichen Schwierigkeiten konfrontiert, die hier eingangs bezüglich der Nullstellen stetiger Funktionen genannt wurden. Von wesentlicher Bedeutung in der bisher entwickelten Theorie ist daher die hier zu erkennende Kraft der Verwendung von Homotopieinvarianzen für eigentlich analytisch motivierte Begriffe. Diese erlaubt es zum einen in gewissen irregulären Situationen überhaupt aussagekräftige Indizes zu konstruieren. Zum anderen erhält man hiermit als grundlegende Idee den Nachweis der obligatorischen Gleichheit zweier solcher Indizes in einem verallgemeinerten Morse Index Theorem mittels aus der Homotopieinvarianz folgenden Stabilitätsresultaten zu erzielen.

Es soll zunächst eine Bemerkung gemacht werden, die sich im Folgenden häufig als hilfreich erweisen wird.

3.2.1 Bemerkung. Für $(f, \Omega, y) \in \mathfrak{M}$ ist mit der Homotopie $H(t, x) = f(x) - (1 - t)y$, $(t, x) \in [0, 1] \times \bar{\Omega}$ und dem Weg $y(t) = t \cdot y$ offenbar $y(t) \notin H(t, \partial\Omega)$ für alle $t \in [0, 1]$ und man erhält aus (d3)

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f - y, \Omega, 0)$$

Diese Eigenschaft des Abbildungsgrades wird von nun an ohne Begründung benutzt.

3.2.1 Der reguläre Fall

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ bezeichne $CV(f)$ die Menge aller kritischen Werte von f .

3.2.2 Satz. *Es sei $\deg : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{Z}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (d1)-(d3). Dann ist für $(f, \Omega, y) \in \mathfrak{M}$ mit $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und $y \notin CV(f)$*

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_f(x) \quad (3.2.1)$$

wobei $J_f(x) = \det D_x f$ und $\sum_{x \in \emptyset} := 0$.

Beweis. Für $f^{-1}(y) = \emptyset$ folgt die Gültigkeit der Aussage unmittelbar aus 3.1.3, (2).

Es sei dementsprechend $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Mit obiger Bemerkung kann zunächst ohne Einschränkung $y = 0$ angenommen werden. Da nach Voraussetzung 0 ein regulärer Wert von f ist, zeigt eine einfache Überlegung unter Verwendung des Umkehrsatzes die Isoliertheit der Punkte aus $f^{-1}(0)$ in Ω . Da sich zudem unter der Voraussetzung $0 \notin f(\partial\Omega)$ die kritischen Punkte nicht am Rand $\partial\Omega$ häufen können, erhält man nun insgesamt die Isoliertheit der kritischen Punkte von f in $\bar{\Omega}$. Somit sei $f^{-1}(0) = \{x^1, \dots, x^N\}$ für ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$.

Aus 3.1.3,(2) und (d2) erhält man nun

$$\deg(f, \Omega, 0) = \sum_{i=1}^N \deg(f, B_{\delta_i}(x^i), 0)$$

für hinreichend kleine $\delta_i > 0, i = 1, \dots, N$, und folglich genügt es

$$\deg(f, B_{\delta_i}(x^i), 0) = \operatorname{sgn} J_f(x^i), \quad i = 1, \dots, N$$

nachzuweisen¹.

Hierfür sei $i \in \{1, \dots, N\}$ fest gewählt. Aus der Definition des Differentials von f erhält man

$$f(x) = (D_{x_i} f)(x - x^i) + \|x - x^i\| r(x - x^i), \quad r \in C(B_{\delta_i}(0), \mathbb{R}^n) \text{ mit } r(0) = 0$$

Man betrachte nun die Homotopie

$$H : [0, 1] \times B_{\delta_i}(x^i) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad H(t, x) = D_{x_i} f(x - x^i) + (1 - t)\|x - x^i\| r(x - x^i)$$

Mit $J_f(x^i) \neq 0$ existiert eine Konstante $\lambda > 0$, so dass $\|(D_{x_i} f)(x - x^i)\| \geq \lambda \|x - x^i\|$ und da $r(0) = 0$ kann unter Verwendung von 3.1.3, (1) δ_i so klein gewählt werden, dass $\|r(x - x^i)\| < \lambda$ für alle $x \in B_{\delta_i}(x^i)$. Mit diesen Wahlen ist aber

$$\|H(t, x)\| \geq \|(D_{x_i} f)(x - x^i)\| - (1 - t)\|x - x^i\| \|r(x - x^i)\| \geq \lambda \delta_i - \delta_i \|r(x - x^i)\| > 0$$

¹ $B_\delta(x)$ bezeichne hier stets den offenen Ball vom Radius δ um x , wobei die gewöhnliche Norm des \mathbb{R}^n verwendet wird.

für alle $(t, x) \in [0, 1] \times \partial B_{\delta_i}(x^i)$ und man erhält mit (d3)

$$\deg(f, B_{\delta_i}(x^i), 0) = \deg((D_{x_i}f)(\cdot -x^i), B_{\delta_i}(x^i), 0)$$

Da nun bekanntlich $Gl(n, \mathbb{R})$ aus den zwei Wegzusammenhangskomponenten

$$Gl^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in Gl(n, \mathbb{R}) : \det A > 0\} \text{ und } Gl^-(n, \mathbb{R}) = \{A \in Gl(n, \mathbb{R}) : \det A < 0\}$$

besteht, ist mit (d3) offenbar

$$\deg((D_{x_i}f)(\cdot -x^i), B_{\delta_i}(x^i), 0) = \deg(\text{diag}(\text{sgn } J_f(x_i), 1, \dots, 1)(\cdot -x^i), B_{\delta_i}(x^i), 0)$$

Es bleibt noch

$$\deg(\text{diag}(\text{sgn } J_f(x_i), 1, \dots, 1)(\cdot -x^i), B_{\delta_i}(x^i), 0) = \text{sgn } J_f(x^i)$$

zu zeigen.

Für $\text{sgn } J_f(x_i) = 1$ ist zunächst mit (d1)

$$\begin{aligned} \deg(\text{diag}(\text{sgn } J_f(x_i), 1, \dots, 1)(\cdot -x^i), B_{\delta_i}(x^i), 0) &= \deg(\text{id}(\cdot -x^i), B_{\delta_i}(x^i), 0) \\ &= \deg(\text{id}, B_{\delta_i}(x^i), x^i) = 1 \end{aligned}$$

Im Fall $\text{sgn } J_f(x^i) = -1$ sei

$$\begin{aligned} U_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x_k - x_k^i| < 1, 1 \leq k \leq n\} \\ U_2 &= \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < x_1 - x_1^i < 3, |x_k - x_k^i| < 1, 2 \leq k \leq n\} \\ U &= \{x \in \mathbb{R}^n : -1 < x_1 - x_1^i < 3, |x_k - x_k^i| < 1, 2 \leq k \leq n\} \end{aligned}$$

und $y_0^i = x^i + (2, 0, \dots, 0) \in U_2$. Man betrachte nun die stetige Abbildung $M : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$M(x) = \begin{cases} \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)(x - x^i) = (-(x_1 - x_1^i), x_2 - x_2^i, \dots, x_n - x_n^i), & x \in \bar{U}_1 \\ x - y_0^i = (x_1 - (x_1^i + 2), x_2 - x_2^i, \dots, x_n - x_n^i), & x \in \bar{U}_2 \end{cases}$$

Mit der Homotopie² $H : [0, 1] \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$H(t, x) = \begin{cases} (-(1-t)(x_1 - x_1^i) + t, x_2 - x_2^i, \dots, x_n - x_n^i), & (t, x) \in [0, 1] \times \bar{U}_1 \\ ((1-t)(x_1 - (x_1^i + 2)) + t, x_2 - x_2^i, \dots, x_n - x_n^i), & (t, x) \in [0, 1] \times \bar{U}_2 \end{cases}$$

ist nun leicht einzusehen, dass $0 \notin H(t, \partial U)$ für alle $t \in [0, 1]$. Folglich ist mit

$$H(1, x) = (1, x_2 - x_2^i, \dots, x_n - x_n^i) \neq 0, \quad x \in U$$

²Es ist leicht nachzuprüfen, dass auf $([0, 1] \times \bar{U}_1) \cap ([0, 1] \times \bar{U}_2) = [0, 1] \times (\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2)$ beide Definitionen übereinstimmen.

und 3.1.3,(2)

$$\deg(M, U, 0) = \deg(H(0, \cdot), U, 0) = \deg(H(1, \cdot), U, 0) = 0$$

Da nun wegen (d2) $0 = \deg(M, U, 0) = \deg(M, U_1, 0) + \deg(M, U_2, 0)$ ³ erhält man schließlich mit (d1) und 3.1.3,(1)

$$\begin{aligned} \deg(\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)(\cdot - x^i), B_{\delta_i}(x^i), 0) &= \deg(\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)(\cdot - x^i), U_1, 0) \\ &= -\deg(M, U_2, 0) = -\deg(\text{id}, U_2, y_0^i) = -1 \end{aligned}$$

□

3.2.3 Bemerkung. Dieser Beweis unterscheidet sich etwas von dem in [Te01]. Dort wird aus $M = H(1, \cdot)$ auf ∂U und 3.1.3,(4) auf $\deg(M, U, 0) = 0$ geschlossen. Es ist jedoch leicht einzusehen, dass M und $H(1, \cdot)$ nur auf einem "kleinen Teil" des Randes ∂U übereinstimmen, womit sich diese Schlussweise als nicht zulässig erweist und obige Homotopie notwendig macht.

Mit der aus den Axiomen des Abbildungsgrades gewonnenen Beziehung (3.2.1) ist dieser nun für alle hinreichend regulären Funktionen festgelegt. Das weitere Ziel ist nun (3.2.1) ohne weiteren direkten Rückgriff auf die Axiome auf alle Elemente aus \mathfrak{M} fortzusetzen, so dass diese Fortsetzung mit dem Abbildungsgrad im Fall seiner Existenz übereinstimmt. Diese Fortsetzung wird in zwei Schritten konstruiert. Zunächst wird die Bedingung an den Punkt y fallen, anschließend wird die so erhaltene Fortsetzung von (3.2.1) auf allgemeine stetige Funktionen ausgedehnt.

3.2.2 Erweiterung auf Funktionen mit kritischen Werten

Zum Erhalt einer Fortsetzung von (3.2.1) auf Funktionen mit kritischen Werten ist ein weiterer Blick auf die gewünschte Eigenschaft (d3) lehrreich. Ist $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und $y \notin f(\partial\Omega)$, so existiert offenbar eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von y , so dass $\tilde{y} \notin f(\partial\Omega)$ für alle $\tilde{y} \in U$. Bei Gültigkeit von (d3) muss $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, \tilde{y})$ gelten, und wegen des Lemmas von Sard findet man stets ein $\tilde{y} \in U$, so dass die rechte Seite dieser Gleichung durch (3.2.1) definiert ist. Um dieses Vorgehen präzise zu machen ist also die Unabhängigkeit von dem gewählten $\tilde{y} \in U$ zu zeigen.

Hierfür wird zunächst eine Darstellung von (3.2.1) benötigt, die sich auf Funktionen mit kritischen Werten fortsetzen lässt.

3.2.4 Lemma. *Es sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y \notin CV(f) \cup f(\partial\Omega)$ und $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ eine Familie glatter Funktionen, so dass $\text{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$.*

Dann existiert ein $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, y) > 0$, so dass für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\deg(f, \Omega, y) = \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x) dx$$

³Um die Zulässigkeit dieses Schrittes zu begründen genügt es zu zeigen, dass M auf $\overline{U_1} \cap \overline{U_2}$ nirgends verschwindet. Hier ist aber die erste Komponente von $M(x)$ gerade konstant -1 .

Beweis. Für $f^{-1}(y) = \emptyset$ erhält man zunächst $\varphi_\varepsilon(f(x) - y) = 0$ für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 := d(y, f(\bar{\Omega}))$ und alle $x \in \bar{\Omega}$.

Ist andernfalls $f^{-1}(y) = \{x^1, \dots, x^N\}$, so folgt unter Verwendung des Umkehrsatzes die Existenz eines $\varepsilon_0 > 0$, so dass $f^{-1}(B_{\varepsilon_0}(y)) = \bigcup_{i=1}^N U(x^i)$, $f|_{U(x^i)}$ bijektiv und $J_f(x) \neq 0$ für alle $x \in U(x^i)$. Mit $\varphi_\varepsilon(f(x) - y) = 0$ für $x \in \bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^N U(x^i)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, und einer aus den eben genannten Eigenschaften zulässigen Substitution erhält man schließlich für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x) dx &= \sum_{i=1}^N \int_{U(x^i)} \varphi_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}(J_f(x)) \int_{U(x^i)} \varphi_\varepsilon(f(x) - y) |J_{f-y}(x)| dx \\ &= \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}(J_f(x)) \int_{B_{\varepsilon_0}(0)} \varphi_\varepsilon(\tilde{x}) d\tilde{x} = \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}(J_f(x)) = \operatorname{deg}(f, \Omega, y) \end{aligned}$$

wobei für die letzte Gleichheit (3.2.1) verwendet wurde. \square

Es sei nun $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und $y_0 \notin f(\partial\Omega)$. Mit $\alpha = d(y_0, f(\partial\Omega))$, zwei regulären Werten $y^1, y^2 \in B_\alpha(y_0)$ von f und $\delta = \alpha - \max_{i=1,2} \{\|y^i - y_0\|\}$ existiert nach 3.2.4 ein $0 < \varepsilon < \delta$, so dass

$$\operatorname{deg}(f, \Omega, y^2) - \operatorname{deg}(f, \Omega, y^1) = \int_{\Omega} (\varphi_\varepsilon(f(x) - y^2) - \varphi_\varepsilon(f(x) - y^1)) J_f(x) dx \quad (3.2.2)$$

Es soll nun das Verschwinden dieses Integrals nachgewiesen werden.

Man betrachte die Abbildung $w \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit

$$w(x) = (y^1 - y^2) \int_0^1 \varphi_\varepsilon(x - y^1 + t \cdot (y^1 - y^2)) dt$$

Mit $r := \alpha - (\delta - \varepsilon) < \alpha$ ist falls $\|x - y_0\| \geq r$

$$\begin{aligned} \|x - y_1 + t(y_1 - y_2)\| &\geq \|x - y_0\| - \|y_0 - y_1 + t(y_1 - y_2)\| \geq r - \max\{\|y_0 - y_1\|, \|y_0 - y_2\|\} \\ &\geq \alpha - (\delta - \varepsilon) - (\alpha - \delta) = \varepsilon \end{aligned}$$

und folglich ist wegen $\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$

$$\operatorname{supp} w \subset B_r(y_0) \quad (3.2.3)$$

Außerdem erhält man

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} w)(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x^i}(x - y^1 + t(y^1 - y^2)) (y_i^1 - y_i^2) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\varepsilon(x - y^1 + t(y^1 - y^2)) dt = \varphi_\varepsilon(x - y_2) - \varphi_\varepsilon(x - y_1) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Es bezeichne nun $d_{ij}(x)$ den Kofaktor von $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ in $J_f(x)$, also das Produkt aus $(-1)^{i+j}$ und der Determinante, die man aus $J_f(x)$ durch Streichen der j -ten Zeile und i -ten Spalte erhält. Hiermit sei $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$v_i(x) = \sum_{j=1}^n w_j(f(x)) d_{ij}(x) \quad \text{für } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2.5)$$

und $v(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Wegen (3.2.3) ist sicher $w(f(x)) = 0$ falls $\|f(x) - y_0\| \geq r$ und folglich ist mit $\|f(x) - y_0\| \geq \alpha > r$ für $x \in \partial\Omega$ der Träger von (3.2.5) in Ω enthalten. Damit ist aber unter den gegebenen Voraussetzungen $v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Für das weitere Vorgehen werden die Identitäten

- $\sum_{i=1}^n \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_i}(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n$
- $\sum_{i=1}^n d_{ij}(x) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) = \delta_{jk} J_f(x)$

benötigt. Man erhält diese Aussagen aus direkten Berechnungen, die hier übergangen werden sollen. Details sind in [Dei85, §2] und [Ruz04, §4.1] zu finden. Mit 3.2.4 ist damit

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1}^n d_{ij}(x) \frac{\partial w_j}{\partial x^k}(f(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x^i}(x) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_j(f(x)) \frac{\partial d_{ij}}{\partial x^i}(x) \\ &= \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial w_j}{\partial x^k}(f(x)) \sum_{i=1}^n d_{ij}(x) \frac{\partial f_k}{\partial x^i}(x) + \sum_{j=1}^n w_j(f(x)) \sum_{i=1}^n \frac{\partial d_{ij}}{\partial x^i}(x) \\ &= \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial w_j}{\partial x^k}(f(x)) \delta_{jk} J_f(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial w_j}{\partial x^j}(f(x)) J_f(x) \\ &= (\operatorname{div} w)(f(x)) J_f(x) = (\varphi_\varepsilon(f(x) - y^2) - \varphi_\varepsilon(f(x) - y^1)) J_f(x) \end{aligned}$$

Mit einem hinreichend großen Quader $\Omega \subset Q = [-a, a]^n$ erhält man hiermit schließlich aus (3.2.2) und $\operatorname{supp} v \subset \Omega$

$$\deg(f, \Omega, y^2) - \deg(f, \Omega, y^1) = \int_{\Omega} \operatorname{div} v(x) dx = \int_Q \operatorname{div} v(x) = 0$$

wobei das Verschwinden des letzten Integrals aus dem Satz von Fubini folgt⁴.

Damit ist also gezeigt wie man eine Abbildung $\mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit den Eigenschaften (d1)-(d3) für $y \in CV(f)$ und $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ berechnet.

3.2.3 Erweiterung auf stetige Funktionen

Bei der Fortsetzung von (3.2.1) auf Funktionen mit kritischen Werten wurde bereits eine aus der geforderten Homotopieinvarianz (d3) motivierte Stabilitätseigenschaft verwendet. Für die

⁴Alternativ kann statt Q auch ein hinreichend glattes Gebiet $\mathcal{O} \supset \Omega$ gewählt werden und das Verschwinden des Integrals mit dem Integralsatz von Stokes begründet werden.

Behandlung beliebiger stetiger Funktionen benötigt man nun eine Stabilitätsaussage der bisher konstruierten Fortsetzung von (3.2.1).

3.2.5 Lemma. *Es sei $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $y \notin f(\partial\Omega)$. Dann existiert zu jedem $g \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ein $\delta > 0$, so dass $\deg(f + t \cdot g, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, y)$ für alle $t \in (-\delta, \delta)$.*

Beweis. Es bezeichne im Folgenden $f_t = f + tg$.

Für $f^{-1}(y) = \emptyset$ ist mit $\delta := \frac{d(y, f(\bar{\Omega}))}{\|g\|_\infty}$ zunächst offenbar

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f + tg, \Omega, y) = 0 \quad \text{für } \|t\| < \delta$$

Es sei nun $y \notin CV(f)$ und $f^{-1}(y) = \{x^1, \dots, x^N\}$. Zudem bezeichne

$$h(t, x) = f(x) + tg(x) - y, \quad x \in \bar{\Omega}$$

Damit ist $h(0, x^i) = f(x^i) - y = 0$ und $J_{h(0, \cdot)}(x^i) = J_f(x^i) \neq 0$ für $i = 1, \dots, N$. Man erhält aus dem Hauptsatz über implizite Funktionen die Existenz von disjunkten Umgebungen $U(x^i)$ und stetigen Funktionen $x^i : (-\delta_1, \delta_1) \rightarrow U(x^i)$ mit $h(t, x^i(t)) = 0$ für $t \in (-\delta_1, \delta_1)$ und

$$f_t^{-1}(y) \cap \bigcup_{i=1}^N U(x^i) = \{x^1(t), \dots, x^N(t)\}, \quad |t| < \delta_1$$

Zudem können die Umgebungen $U(x^i)$ so klein gewählt werden, dass

$$\operatorname{sgn} J_f(x) = \operatorname{sgn} J_f(x^i), \quad x \in \overline{U(x^i)}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.2.6)$$

Man erhält desweiteren mit $\delta_2 = \frac{d(y, f(\bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^N U(x^i)))}{\|g\|_\infty}$

$$\|f(x) + t \cdot g(x) - y\| \geq \|f(x) - y\| - |t|\|g\|_\infty > 0$$

für alle $x \in \bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^N U(x^i)$ und alle $t \in (-\delta_2, \delta_2)$. Damit ist für $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$f_t^{-1}(y) = \{x^1(t), \dots, x^N(t)\}, \quad |t| < \delta_0$$

Mit der offensichtlichen Stetigkeit von $J_{f_t}(x)$ in (t, x) und (3.2.6) existiert aber ein $0 < \delta \leq \delta_0$ mit

$$|J_{f_t}(x) - J_{f_0}(x)| = |J_{f_t}(x) - J_f(x)| < \min\{|J_f(z)| : z \in \bigcup_{i=1}^N U(x^i)\}, \quad (t, x) \in (-\delta, \delta) \times \bigcup_{i=1}^N U(x^i)$$

und mit dieser Wahl von δ ist nun

$$\operatorname{sgn} J_{f_t}(x^i(t)) = \operatorname{sgn} J_f(x^i(t)) = \operatorname{sgn} J_f(x^i), \quad i = 1, \dots, N$$

Man erhält also insgesamt aus (3.2.1)

$$\begin{aligned} \deg(f_t, \Omega, y) &= \sum_{x \in f_t^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_{f_t}(x) = \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn} J_{f_t}(x^i(t)) \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_f(x) = \deg(f, \Omega, y), \quad |t| < \delta \end{aligned}$$

Für $y \in CV(f)$ sei $\tilde{y} \in B_{\frac{\rho}{3}}(y)$ ein regulärer Wert, wobei $\rho = d(y, f(\partial\Omega))$. Mit den Ergebnissen des vorigen Abschnitts ist damit $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, \tilde{y})$ und mit dem soeben betrachteten Fall existiert ein $\tilde{\delta} > 0$, so dass $\deg(f, \Omega, \tilde{y}) = \deg(f + t \cdot g, \Omega, \tilde{y})$ für $t \in (-\tilde{\delta}, \tilde{\delta})$. Mit $\delta = \min\{\tilde{\delta}, \frac{\rho}{3\|g\|_{\infty}}\}$ ist

$$\begin{aligned} \|\tilde{y} - f_t(x)\| &\geq \|\tilde{y} - f(x)\| - |t|\|g(x)\| \geq \|y - f(x)\| - \|\tilde{y} - y\| - |t|\|g(x)\| \\ &\geq \frac{2}{3}\rho - |t|\|g\|_{\infty} \geq \frac{1}{3}\rho, \quad (t, x) \in (-\delta, \delta) \times \partial\Omega \end{aligned}$$

und folglich nach Wahl von \tilde{y}

$$\|\tilde{y} - y\| < \frac{\rho}{3} \leq d(\tilde{y}, f_t(\partial\Omega)), \quad t \in (-\delta, \delta)$$

Damit ist aber mit den Ergebnissen des vorigen Abschnitts $\deg(f + t \cdot g, \Omega, \tilde{y}) = \deg(f + t \cdot g, \Omega, y)$ und insgesamt $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f + t \cdot g, \Omega, y)$ für $t \in (-\delta, \delta)$. \square

Mit diesem Ergebnis kann abschließend eine Fortsetzung von (3.2.1) für alle $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $y \notin f(\partial\Omega)$ erhalten werden.

Es sei hierfür $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y \notin f(\partial\Omega)$ und $\alpha = d(y, f(\partial\Omega))$. Es seien zudem $g, \tilde{g} \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $\|g - f\|_{\infty}, \|\tilde{g} - f\|_{\infty} < \alpha$. Man betrachte nun

$$h(t, x) = g(x) + t \cdot (\tilde{g}(x) - g(x))$$

und unter Beachtung von $y \notin H([0, 1] \times \partial\Omega)$ nach Wahl von g und \tilde{g}

$$\varphi(t) = \deg(h(t, \cdot), \Omega, y), \quad t \in [0, 1]$$

Für jedes fest gewähltes $t_0 \in [0, 1]$ erhält man mit $h(t, \cdot) = h(t_0, \cdot) + (t - t_0)(\tilde{g} - g)$ aus 3.2.5 die Konstanz von φ in einer Umgebung von t_0 . Damit ist aber φ stetig auf $[0, 1]$ und folglich konstant. Da demnach $\deg(g, \Omega, y) = \deg(\tilde{g}, \Omega, y)$ kann nun $\deg(f, \Omega, y)$ als der Abbildungsgrad jeder solchen Funktion definiert werden. Es ist hierbei zudem zu beachten, dass dies konsistent mit der Eigenschaft (d3) ist.

3.2.4 Beweis des Hauptsatzes

Aus den Axiomen des Abbildungsgrades ist unmittelbar einzusehen, dass dieser, im Fall seiner Existenz, mit der konstruierten Fortsetzung von (3.2.1) übereinstimmt. Folglich gibt es zunächst höchstens einen Abbildungsgrad, der die Eigenschaften (d1)-(d3) erfüllt. Zudem ist damit bereits erkannt wie sich im Fall der Existenz der Abbildungsgrad berechnet:

Es sei $(f, \Omega, y) \in \mathcal{M}$ sowie $g \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $\|f - g\|_{\infty} < d(y, f(\partial\Omega))$ und \tilde{y} ein regulärer Wert von g mit $\|\tilde{y} - y\| < d(y, g(\partial\Omega))$. Dann ist der Abbildungsgrad von (f, Ω, y) gegeben durch

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, \tilde{y}) = \sum_{x \in g^{-1}(\tilde{y})} \operatorname{sgn} J_g(x)$$

Natürlich kann g dabei auch direkt so gewählt werden, dass y bereits ein regulärer Wert von g ist.

Um jetzt 3.1.2 zu beweisen genügt es für die gewonnene Fortsetzung von (3.2.1) die Eigenschaften (d1)-(d3) nachzuweisen:

(d1) Diese Eigenschaft ist mit (3.2.1) klar.

(d2) Es sei $g \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $\|f - g\|_\infty < d(y, f(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)))$, so dass y ein regulärer Wert von g ist. Wegen $y \notin g(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ ist damit

$$\begin{aligned} \deg(f, \Omega, y) &= \deg(g, \Omega, y) \\ \deg(f, \Omega_i, y) &= \deg(g, \Omega_i, y), \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

und es genügt die Aussage für g nachzuweisen. Hier ist sie aber wegen (3.2.1) offensichtlich.

(d3) Es sei zunächst $H : [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Homotopie. Wegen der Kompaktheit von $[0, 1] \times \bar{\Omega}$ ist diese gleichmäßig stetig und damit ist auch die hiervon induzierte Abbildung $H : [0, 1] \rightarrow C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ein stetiger Weg. Mit den Ausführungen nach 3.2.5 ist nun

$$\deg(\cdot, \Omega, y) : \{f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) : y \notin f(\partial\Omega)\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

lokal konstant und somit auf jeder Zusammenhangskomponente von

$$\{f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) : y \notin f(\partial\Omega)\}$$

konstant. Mit dem Weg $H : [0, 1] \rightarrow \{f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) : y \notin f(\partial\Omega)\} \subset C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ist aber folglich $\deg(H(0), \Omega, y) = \deg(H(1), \Omega, y)$.

Um nun die in (d3) angegebene allgemeine Homotopieinvarianz anzugeben erhält man zunächst mit (3.2.1) die Translationsinvarianz

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f - y, \Omega, 0), \quad f \in \{f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) : y \notin f(\partial\Omega)\}$$

Mit der bereits nachgewiesenen Homotopieinvarianz erhält man unter der Voraussetzung $y(t) \notin H(t, \partial\Omega)$ für $t \in [0, 1]$

$$\deg(H(0), \Omega, y(0)) = \deg(H(t) - y(t), \Omega, 0) = \deg(H(1), \Omega, y(1))$$

Damit ist abschließend die Existenz und Eindeutigkeit des Abbildungsgrades nachgewiesen.

Kapitel 4

Der Spektralfluss

Beginnend sollen einige motivierende Bemerkungen gemacht werden.

Es sei $[a, b] \ni t \rightarrow L(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ein Weg symmetrischer Matrizen mit $L(a), L(b) \in GL(n, \mathbb{R})$.

Nach [Ka95, Chapter II, Theorem 5.2] existieren nun n stetige Funktionen

$$\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

so dass $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$ für jedes $t \in [a, b]$ die mit Vielfachheiten aufgelisteten Eigenwerte von $L(t)$ sind. Die grundlegende Idee des Spektralflusses ist die Zuweisung einer ganzen Zahl zu jedem solchen Weg, mit der Aussagen zur Evolution des Spektrums $\sigma(L(t))$ entlang des Weges L gemacht werden können. Wie bei der Betrachtung von Nullstellen stetiger Funktionen durch den Brouwerschen Abbildungsgrad ist auch hier unmittelbar einzusehen, dass mittels einer ganzen Zahl nicht sonderlich viele Informationen wiedergegeben werden können. Eine durchaus sinnvolle Definition ist

$$\text{sf}(L, [a, b]) = |\{i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i(a) < 0, \lambda_i(b) > 0\}| - |\{i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i(a) > 0, \lambda_i(b) < 0\}|$$

mit der angegeben wird wie viele positive Eigenwerte $L(a)$ effektiv bei Durchlaufen des Weges hinzugewinnt. Man vergleiche hierzu Abbildung 4.1.

Mittels der oben zitierten Darstellung des Spektrums entlang eines Weges als Menge stetiger Funktionen erhält man unmittelbar die folgenden Eigenschaften.

1. Für zwei Wege $L_1 : [a, b] \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), L_2 : [b, c] \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit invertierbaren Endpunkten und $L_1(b) = L_2(b)$ ist

$$\text{sf}(L_1 * L_2, [a, c]) = \text{sf}(L_1, [a, b]) + \text{sf}(L_2, [b, c])$$

2. Für eine Homotopie $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $H(t, a), H(t, b) \in GL(n, \mathbb{R})$ für alle $t \in [0, 1]$ ist $\text{sf}(H(t, \cdot), [a, b])$ unabhängig von $t \in [0, 1]$.

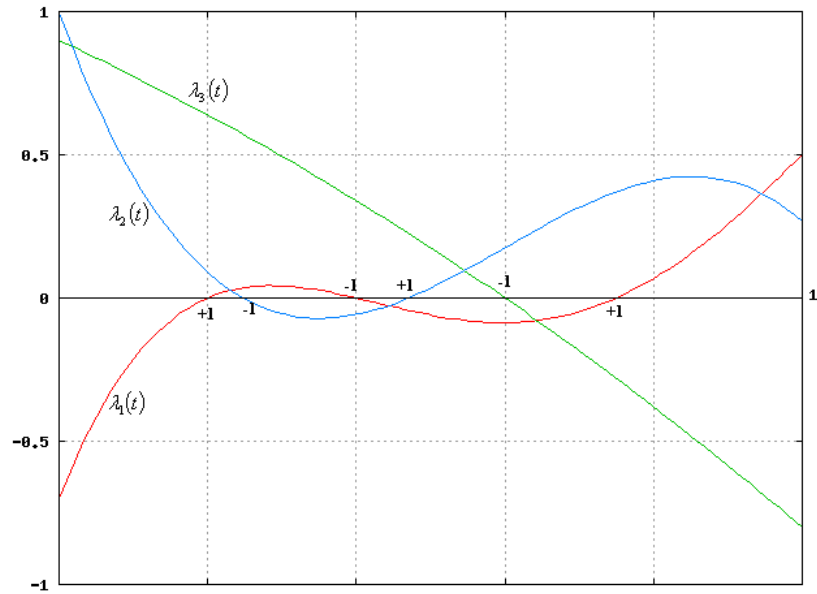


Abbildung 4.1: Darstellung der Eigenwerte eines Weges $L : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ mit $\text{sf}(L) = 0$. An den Nullstellen der Eigenwerte ist der Beitrag zum Spektralfluss angegeben.

Die Idee des hier zu präsentierenden Spektralflusses ist diese elementare Definition in geeigneter Weise auf selbstadjungierte Operatoren reeller Hilberträume zu übertragen. Um überhaupt brauchbare Aussagen zu Vorzeichenwechseln von Eigenwerten treffen zu können ist sicher zu fordern, dass in einer Umgebung von 0 das Spektrum der betrachteten Operatoren lediglich aus isolierten Eigenwerten endlicher Vielfachheit besteht. Damit ist nun die Betrachtung des Raumes der selbstadjungierten Fredholmoperatoren für weitere Überlegungen naheliegend.

4.1 Die Theoreme von Kuiper, Milnor und Palais

Für spätere Überlegungen sollen zunächst drei fundamentale Resultate genannt werden, die Aussagen zur Topologie von Operatorräumen machen oder als solche Anwendung finden werden.

Das Theorem von Milnor

Es bezeichne \mathcal{W} die Klasse aller Räume die den Homotopietyp eines CW-Komplexes haben. In [Mi57] werden Eigenschaften topologischer Räume definiert, deren Vorliegen bereits zur Zugehörigkeit zu \mathcal{W} führt. Um eines dieser Resultate angeben zu können wird zunächst die folgende Definition benötigt.

4.1.1 Definition. Ein topologischer Raum X heie **gleichgradig lokalkonvex**, falls eine Umgebung U der Diagonale in $X \times X$ und eine Abbildung $\lambda : U \times [0, 1] \rightarrow X$ existiert, so dass

1. $\lambda(x, y, 0) = x, \lambda(x, y, 1) = y$ für alle $(x, y) \in U$ und $\lambda(x, x, t) = x$ für alle $x \in X, t \in [0, 1]$.
2. Es existiert eine offene Überdeckung $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ von X , so dass

$$V_\alpha \times V_\alpha \subset U \quad \text{und} \quad \lambda(V_\alpha \times V_\alpha \times [0, 1]) = V_\alpha$$

Wie bereits eingangs erwähnt ist eine der bedeutenden Aussagen der Arbeit Milnors ([Mi57, Lemma 4])

4.1.2 Satz. *Jeder parakompakte gleichgradig lokalkonvexe topologische Raum gehört zur Klasse \mathcal{W} .*

In [AS69, S. 13] wird erwähnt, dass damit insbesondere jede offene Teilmenge eines Banachraums \mathcal{W} angehört. Im folgenden Resultat wird diese später benötigte Aussage nun in etwas allgemeinerer Form nachgewiesen.

4.1.3 Folgerung. *Jede offene Teilmenge eines normierten linearen Raumes gehört zur Klasse \mathcal{W} .*

Beweis. Es sei X ein normierter linearer Raum und $A \subset X$ offen. A ist als metrischer Raum bekanntlich parakompakt. Man definiere

$$V_x = B_{d(X \setminus A, x)}(x) \subset A, \quad x \in A$$
$$U = \{(x, y) \in A \times A : \exists B \subset A, B \text{ Ball mit } x, y \in B\} \subset A \times A$$

Dann ist $\{V_x\}_{x \in A}$ eine offene Überdeckung von A und U eine offene Umgebung der Diagonalen in $A \times A$. Desweiteren definiere man eine Abbildung $\lambda : U \times I \rightarrow A$ durch

$$\lambda(x, y, t) = (1 - t)pr_1(x, y) + t \cdot pr_2(x, y) = (1 - t)x + ty$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da für $(x, y) \in U$

$$\lambda(x, y, t) = (1 - t)x + ty \in B \subset A, \text{ für alle } t \in [0, 1]$$

also $\lambda(U \times I) \subset A$. Offenbar ist $\lambda(x, y, 0) = x, \lambda(x, y, 1) = y, \forall (x, y) \in U$ und $\lambda(x, x, t) = x$ für alle $x \in A, t \in [0, 1]$.

Für $(y_1, y_2) \in V_x \times V_x$ ist $y_1, y_2 \in V_x = B_{d(X \setminus A, x)}(x)$ und folglich $V_x \times V_x \subset U$.

Die Inklusion $V_x \subset \lambda(V_x \times V_x \times I)$ ist offensichtlich. Andererseits ist für $(y_1, y_2, t) \in V_x \times V_x \times I$ stets

$$\lambda(y_1, y_2, t) = (1 - t)y_1 + ty_2 \in V_x = B_{d(X \setminus A, x)}(x)$$

Damit sind aber alle Voraussetzungen des obigen Resultates von Milnor nachgewiesen und die Aussage gezeigt. \square

Trivialerweise gehört damit insbesondere auch jeder zu einer offenen Teilmenge eines normierten linearen Raumes homotopieäquivalente Raum zur Klasse \mathcal{W} .

Es sei daran erinnert, dass für punktierte topologische Räume $(X, x_0), (Y, y_0)$ eine stetige Abbildung $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine **schwache Homotopieäquivalenz** genannt wird, falls alle induzierten Abbildungen

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

bijektiv sind. Das folgende Resultat ist durchaus bekannt.

4.1.4 Satz (Whitehead). *Für zur Klasse \mathcal{W} gehörende topologische Räume X, Y ist jede schwache Homotopieäquivalenz $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ bereits eine Homotopieäquivalenz.*

Das Theorem von Palais

Es sei H ein separabler Hilbertraum, der hier lediglich zur Vereinfachung der Schreibweise als komplex vorausgesetzt sei. Desweiteren sei $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H und $H_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. Es bezeichne

$$\mathcal{L}(H_n) = \{A \in \mathcal{L}(H) : A(H_n) \subset H_n, A(H_n^\perp) = 0\}$$

und

$$U(n) = \{id + U \in \mathcal{U}(H) : U \in \mathcal{L}(H_n)\}$$

Hiermit sei

$$U(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(n)$$

Insbesondere trage also $U(\infty)$ die schwache Topologie. Außerdem bezeichne

$$\mathcal{U}_{\mathcal{K}} = \{id + K \in \mathcal{U}(H) : K \in \mathcal{K}(H)\}$$

Das folgende Resultat entstammt der Arbeit [Pa65] und ist dort in allgemeinerem Kontext bewiesen.

4.1.5 Satz. *Die Inklusionsabbildung*

$$j : U(\infty) \rightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{K}}(H)$$

ist eine Homotopieäquivalenz.

Die hier gegebene Definition von $U(n)$ als Unterraum der unitären Operatoren $\mathcal{U}(H)$ eines separablen Hilbertraums mit der durch die Operatornorm gegebenen Topologie ist offensichtlich homöomorph zu der, auf gewöhnlichem Wege definierten, Gruppe der unitären Matrizen. Hiermit sind aber wegen des Bottschen Periodizitätssatzes auch sämtliche Homotopiegruppen dieses Raumes bekannt und man erhält als unmittelbare Konsequenz des obigen Theorems

4.1.6 Folgerung. $\pi_k(\mathcal{U}_{\mathcal{K}}) \cong \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \mathbb{Z} & k \text{ ungerade} \end{cases}$

Das Theorem von Kuiper

Die Darstellungen der letztgenannten Aussagen waren jeweils Folgerungen aus Theoremen, die so abstrakt sind, dass es an dieser Stelle unangemessen wäre sämtliche hiermit verbundenen Definitionen und Vorbereitungen zu erläutern. Die Aussage des Theorems von Kuiper ist hingegen wesentlich prägnanter.

4.1.7 Satz (Kuipers Theorem, [Kui65]). *Es sei H ein unendlichdimensionaler reeller oder komplexer separabler Hilbertraum. Dann ist die Gruppe der topologischen Isomorphismen $GL(H) \subset \mathcal{L}(H)$ auf einen Punkt kontrahierbar.*

Da bekanntlich mittels der Homotopie

$$H : I \times GL(H) \rightarrow GL(H), (t, A) \mapsto A((1-t)(A^*A)^{-\frac{1}{2}} + tid) \quad (4.1.1)$$

die Isometrien eines Hilbertraumes stets ein Deformationsretrakt von $GL(H)$ sind, erhält man aus Kuipers Theorem das folgende Resultat.

4.1.8 Folgerung. *Für einen reellen separablen Hilbertraum H ist die orthogonale Gruppe $O(H)$, für einen komplexen separablen Hilbertraum H die unitäre Gruppe $U(H)$ auf einen Punkt kontrahierbar.*

4.2 Topologie von $\hat{\mathcal{F}}$

Wie bereits in der eingangs gemachten Motivation erwähnt, werden zur Definition des Spektralflusses selbstadjungierte Fredholmoperatoren verwendet. Obwohl es für die üblichen Definitionen des Spektralflusses nicht benötigt wird, soll in diesem Abschnitt die Topologie des Raumes der selbstadjungierten Fredholmoperatoren näher betrachtet werden. Diese Überlegungen werden insbesondere im vierten Teil der Arbeit benötigt. Die präsentierten Resultate sind weitestgehend an [AS69] und [BW85] orientiert.

4.2.1 Die Unterräume $\hat{\mathcal{F}}_+, \hat{\mathcal{F}}_-, \hat{\mathcal{F}}_* \subset \hat{\mathcal{F}}$

4.2.1 Definition. Für einen reellen oder komplexen Hilbertraum H definiert man die folgenden Teilmengen von $\hat{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{F}}(H)$:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{F}}_+ &= \{T \in \hat{\mathcal{F}} : \sigma_{ess}(T) \subset \mathbb{R}^+\} \\ \hat{\mathcal{F}}_- &= \{T \in \hat{\mathcal{F}} : \sigma_{ess}(T) \subset \mathbb{R}^-\} \\ \hat{\mathcal{F}}_* &= \hat{\mathcal{F}} \setminus (\hat{\mathcal{F}}_+ \cup \hat{\mathcal{F}}_-)\end{aligned}$$

Die Elemente aus $\hat{\mathcal{F}}_{\pm}$ werden **essentiell positiv** beziehungsweise **essentiell negativ** genannt. Operatoren aus $\hat{\mathcal{F}}_*$ werden als **total indefinit** bezeichnet.

4.2.2 Lemma. $T \in \hat{\mathcal{F}}_{\pm} \iff$ es existiert ein $K \in \mathcal{K}_S(H)$, so dass $T - K$ positiv definit/ negativ definit.

Beweis. Für $K \in \mathcal{K}_S(H)$ mit $\sigma(T - K) \subset (c, \infty)$ und $c > 0$ ist

$$\sigma_{ess}(T) = \sigma_{ess}(T - K) \subset \sigma(T - K) \subset (c, \infty)$$

Ist umgekehrt $\sigma_{ess}(T) \in (0, \infty)$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \in \rho(T)$, so dass $\sigma(T) \cap (-\infty, \varepsilon)$ nur aus Eigenwerten endlicher Vielfachheit besteht. Damit ist aber insbesondere $E_{(-\infty, \varepsilon)}(T) \in \mathcal{K}_S(H)$. Zudem ist mit der Offenheit der Resolvente die Einschränkung der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} t + m, & t \in (-\infty, \varepsilon) \\ t, & t \in [\varepsilon, \infty) \end{cases}$$

auf $\sigma(T)$ für jedes $m \in \mathbb{R}$ stetig und es ist $f(T) = T + mE_{(-\infty, \varepsilon)}(T)$. Wegen des Spektralabbildungssatzes ist nun $\sigma(T + mE_{(-\infty, \varepsilon)}(T)) \in (0, \infty)$ falls nur $m > |\inf \sigma(T)|$. \square

Offenbar sind die eben definierten Teilmengen von $\hat{\mathcal{F}}_*$ disjunkt.

4.2.3 Lemma. $\hat{\mathcal{F}}_+, \hat{\mathcal{F}}_-, \hat{\mathcal{F}}_* \subset \hat{\mathcal{F}}$ sind offen und abgeschlossen.

Beweis. Wegen der Disjunktheit der Mengen und $\hat{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{F}}_- \cup \hat{\mathcal{F}}_+ \cup \hat{\mathcal{F}}_*$ genügt es die Offenheit zu beweisen. Diese Aussage wird hier nur im Fall $\hat{\mathcal{F}}_*$ gezeigt, die Beweise der anderen beiden

Aussagen sind damit offensichtlich.

Es sei nun $A \in \hat{\mathcal{F}}_*(H)$ und $\varepsilon > 0$, so dass $\sigma(A) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \{0\}$. Zudem sei

$$\Omega = (-\infty, -\frac{\varepsilon}{2}) \cup (-\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3}) \cup (\frac{\varepsilon}{2}, \infty)$$

Mit 1.2.14 existiert ein $\delta > 0$, so dass $\sigma(B) \subset \Omega$ für alle $B \in \hat{\mathcal{F}}(H)$ mit $\|A - B\| < \delta$. Hiermit sind aber auf der Menge aller $B \in \hat{\mathcal{F}}_*(H)$ mit $\|A - B\| < \delta$ die Orthogonalprojektoren $E_{(-\infty, -\frac{\varepsilon}{2}]}(\cdot)$, $E_{[\frac{\varepsilon}{2}, \infty)}(\cdot)$ stetig und folglich ist nach eventueller Verkleinerung von δ

$$\|E_{[\frac{\varepsilon}{2}, \infty)}(B) - E_{[\frac{\varepsilon}{2}, \infty)}(A)\|, \|E_{(-\infty, -\frac{\varepsilon}{2}]}(B) - E_{(-\infty, -\frac{\varepsilon}{2}]}(A)\| < 1$$

für alle $B \in \hat{\mathcal{F}}_*(H)$ mit $\|A - B\| < \delta$. Mit 1.2.13 ist nun $\text{rk}(E_{(-\infty, -\frac{\varepsilon}{2}]}(B)) = \text{rk}(E_{[\frac{\varepsilon}{2}, \infty)}(B)) = \infty$ und damit wegen der Kompaktheit des Spektrums $B \in \hat{\mathcal{F}}_*(H)$ für alle $B \in \hat{\mathcal{F}}$ mit $\|B - A\| < \delta$. \square

Das weitere Ziel ist zu beweisen, dass diese Mengen tatsächlich die Zusammenhangskomponenten von $\hat{\mathcal{F}}$ sind und zudem ein besseres Verständnis ihrer Topologie zu erlangen. Das folgende Resultat liefert nun eine erste Teilantwort hierzu.

4.2.4 Lemma. $\hat{\mathcal{F}}_+ \simeq \{id\}$, $\hat{\mathcal{F}}_- \simeq \{-id\}$

Beweis. Mit den Homotopien

$$\begin{aligned} H : I \times \hat{\mathcal{F}}_+ &\rightarrow \hat{\mathcal{F}}_+, \quad H(t, T) = (1-t)T + t \cdot id \\ H : I \times \hat{\mathcal{F}}_- &\rightarrow \hat{\mathcal{F}}_-, \quad H(t, T) = (1-t)T - t \cdot id \end{aligned}$$

folgt die Behauptung unmittelbar aus 2.3.6. \square

4.2.2 Zur Topologie von $\hat{\mathcal{F}}_*$

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, dass $\hat{\mathcal{F}}_+$ und $\hat{\mathcal{F}}_-$ topologisch triviale Zusammenhangskomponenten von $\hat{\mathcal{F}}$ sind. Der Nachweis des Zusammenhangs und ähnlich präziser Aussagen zur Topologie des Komplements $\hat{\mathcal{F}}_*$ ist deutlich komplizierter und wird auch im Verlauf dieses Abschnitts nur teilweise gegeben.

Homotopieäquivalenz $\hat{\mathcal{F}}_* \simeq \hat{F}_*$

4.2.5 Lemma. *Die Abbildung*

$$\hat{\mathcal{F}}_* \ni A \mapsto \inf |\sigma_{ess}(A)| = \inf \{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{ess}(A)\} \in (0, \infty)$$

ist stetig.

Beweis. Es bezeichne $p : \mathcal{L}(H) \rightarrow \mathcal{C}(H)$ die Projektion auf die Calkin-Algebra. Mit der Existenz eines $\varepsilon > 0$, so dass $\sigma_{ess}(A) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$ erhält man

$$\inf |\sigma_{ess}(A)| = \inf |\sigma(p(A))| = \frac{1}{\sup \frac{1}{|\sigma(p(A))|}} = \frac{1}{\sup |\sigma(p(A)^{-1})|} = \|p(A)^{-1}\|^{-1}$$

Hierbei wurde im letzten Schritt ausgenutzt, dass für $A \in \mathcal{S}(H)$ stets $p(A)$ ein selbstadjungiertes Element in der reellen bzw. komplexen C^* -Algebra \mathcal{C} ist. Wegen der Stetigkeit von Inversion und Norm in Banachalgebren lässt diese Aussage aber keinen Zweifel mehr an der oben behaupteten Stetigkeit. \square

Unter Verwendung des soeben gezeigten Resultats erhält man nun eine Homotopie

$$H : I \times \hat{\mathcal{F}}_* \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*, \quad H(t, T) = ((1-t) + t \inf |\sigma_{ess}(T)|)^{-1} T$$

Damit ist $\sigma_{ess}(H(1, T)) \cap (-1, 1) = \emptyset$ und $1 \in |\sigma_{ess}(H(1, T))|$ für alle $T \in \hat{\mathcal{F}}_*$.

Man betrachte nun die von der Deformationsretraktion $H : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$H(t, x) = \begin{cases} (1-t)x - t, & x \in (-\infty, -1) \\ x, & x \in [-1, 1] \\ (1-t)x + t, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

induzierte Homotopie $H : I \times \hat{\mathcal{F}}_* \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$.

Die Hintereinanderausführung obiger Homotopien induziert nun eine Deformationsretraktion $H : I \times \hat{\mathcal{F}}_* \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ auf den abgeschlossenen Unterraum

$$\hat{F}_* = \{A \in \hat{\mathcal{F}}_* : \|A\| = 1, \sigma_{ess}(A) = \{-1, 1\}\} \subset \hat{\mathcal{F}}_*$$

Intermezzo: Unterräume von \hat{F}_* und $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}(H)$

Im Folgenden sei H für Aussagen zu $\hat{\mathcal{F}}$ ein komplexer oder reeller Hilbertraum, bei Aussagen zu $\mathcal{U}(H)$ sei stets H als komplexer Hilbertraum vorausgesetzt.

Es sei für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}(n) &= \{A \in \hat{F}_* : \sigma(A) \cap (-1, 1) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}, k \leq n\} \\ \tilde{\mathcal{U}}(n) &= \{U \in \mathcal{U}(H) : \text{rk}(id - U) \leq n\} \end{aligned}$$

wobei die Eigenwerte in der Definition von $\hat{\mathcal{F}}(n)$ mit Vielfachheiten gezählt werden. Desweiteren betrachte man die Räume

$$\hat{\mathcal{F}}(\infty) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \hat{\mathcal{F}}(n) \subset \hat{F}_*, \quad \tilde{\mathcal{U}}(\infty) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathcal{U}}(n) \subset \mathcal{U}(H)$$

Für fest gewählte Operatoren $A \in \hat{\mathcal{F}}(\infty)$, $B \in \tilde{\mathcal{U}}(\infty)$ können nun folgende Homotopien definiert werden.

- Es sei $\sigma(A) \cap (-1, 1) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ und $\varepsilon > 0$, so dass

$$-1 + \varepsilon \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m \leq 1 - \varepsilon$$

Man wähle eine Deformationsretraktion $h : I \times [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, die $[-1, -1 + \frac{\varepsilon}{2}]$ auf $\{-1\}$, $[1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1]$ auf $\{1\}$ abbildet und auf $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ die Identität ist. Diese induziert nun eine Homotopie

$$h : I \times \hat{F}_* \rightarrow \hat{F}_* \text{ mit } h(t, A) = A \text{ für alle } t \in [0, 1]$$

- Die Homotopie $h : I \times [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ induziert außerdem eine Homotopie $\tilde{h} : I \times S^1 \rightarrow S^1$ mit $\tilde{h}(t, e^{i\pi\theta}) = -e^{i\pi h(t, \theta)}$. Bei entsprechender Wahl von $\varepsilon > 0$ kann zudem erreicht werden, dass $\tilde{h}(t, \cdot) = id$ auf $\sigma(B)$ für alle $t \in [0, 1]$. Hieraus erhält man eine Homotopie

$$\tilde{h} : I \times \mathcal{U}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{K}} \text{ mit } h(t, B) = B \text{ für alle } t \in [0, 1]$$

4.2.6 Satz. *Es seien $A \in \hat{\mathcal{F}}(\infty)$ und $B \in \tilde{\mathcal{U}}(\infty)$. Dann gilt*

- Für jedes kompakte $X \subset \hat{F}_*$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $h_1(X) \subset \hat{\mathcal{F}}(n)$.
- Für jedes kompakte $X \subset \mathcal{U}_{\mathcal{K}}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\tilde{h}_1(X) \subset \tilde{\mathcal{U}}(n)$

Beweis. Es sei $T \in \hat{F}_*$ und $a > 0$ mit $\varepsilon < a < 1$ und $a, -a \in \rho(T)$ gewählt. Wegen der Offenheit von $\rho(T)$ existiert eine Umgebung $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \subset \mathbb{R}$ von $\sigma(T)$ bestehend aus disjunkten offenen Mengen mit $1 \in \Omega_1$, $\Omega_2 \subset [-a, a]$ und $-1 \in \Omega_3$. Wegen 1.2.14 existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $A \in \hat{F}_*$ mit $\|A - T\| < \delta$ stets $\sigma(A) \subset \Omega$. Auf dieser Menge ist aber die Abbildung $T \mapsto E_{[-a, a]}(T)$ stetig, und nach eventueller Verkleinerung von δ besteht unter Verwendung von 1.2.13 eine offene Umgebung U_T von T , so dass $\text{rk}(E_{[-a, a]}(T)) = \text{rk}(E_{[-a, a]}(S))$ für alle $S \in U_T$. Nach Wahl von a ist damit $h_1(A) \in \hat{\mathcal{F}}(\text{rk}(E_{[-a, a]}(T)))$ für alle $A \in U_T$. Ist nun $X \subset \hat{F}_*$ kompakt, so besteht eine endliche Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ aus solchen Mengen und man erhält die gewünschte Behauptung aus

$$h_1(X) = \bigcup_{i=1}^n h_1(U_i)$$

Im Fall von \tilde{h} verläuft die Argumentation ganz analog. □

4.2.7 Folgerung. *Für jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und jede Wahl von Basispunkten $A \in \hat{\mathcal{F}}(\infty)$, $B \in \tilde{\mathcal{U}}(\infty)$ sind die von der Inklusion induzierten Abbildungen*

$$\begin{aligned} \iota_* &: \pi_k(\hat{\mathcal{F}}(\infty), A) \rightarrow \pi_k(\hat{F}_*, A) \\ \iota_* &: \pi_k(\tilde{\mathcal{U}}(\infty), B) \rightarrow \pi_k(\mathcal{U}_{\mathcal{K}}, B) \end{aligned}$$

bijektiv.

Beweis. Der Beweis dieser Aussagen benötigt lediglich die Eigenschaften der Homotopien aus 4.2.6 und keine speziellen Eigenschaften der Räume. Daher ist es ausreichend den Beweis für \hat{F}_* zu geben.

Es sei $h : I \times \hat{F}_* \rightarrow \hat{F}_*$ die oben beschriebene Homotopie.

Ist zunächst $g : (S^k, *) \rightarrow (\hat{F}_*, A)$, so ist wegen der Kompaktheit von $g(S^k)$

$$H : I \times S^k \rightarrow \hat{F}_*, \quad H(t, z) = h(t, g(z))$$

eine Homotopie mit $H(t, *) = h(t, A) = A$ für alle $t \in [0, 1]$ und $H(1, z) \in \hat{\mathcal{F}}(\infty)$ für alle $z \in S^k$. Damit ist die Abbildung surjektiv.

Sind $g_1, g_2 : (S^k, *) \rightarrow (\hat{\mathcal{F}}(\infty), A)$ mit $\iota \circ g_1 \simeq \iota \circ g_2$ und $H : I \times S^k \rightarrow \hat{F}_*$ eine basispunkterhaltene Homotopie zwischen diesen Abbildungen, so ist $H(I \times S^k) \subset \hat{F}_*$ kompakt und folglich ist $h_1(H(I \times S^k)) \subset \hat{\mathcal{F}}(n) \subset \hat{\mathcal{F}}(\infty)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Damit ist aber $h_1 \circ H : I \times S^k \rightarrow \hat{\mathcal{F}}(\infty)$ eine Homotopie mit $h_1(H(t, *)) = A$ für alle $t \in [0, 1]$ und $(h_1 \circ H)(0, \cdot) = (h_1 \circ g_1)$ und $(h_1 \circ H)(1, \cdot) = (h_1 \circ g_2)$. Da aber $h_t(\hat{\mathcal{F}}(\infty)) \subset \hat{\mathcal{F}}(\infty)$ mit $h_t(A) = A$ für alle $t \in I$ ist folglich auch $[g_1] = [g_2] \in \pi_1(\hat{\mathcal{F}}(\infty), A)$ und die Abbildung injektiv. \square

4.2.8 Bemerkung. Aus 4.1.5 erhält man hiermit unmittelbar ein kommutatives Diagramm von Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(\tilde{U}(\infty)) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_k(\mathcal{U}_{\mathcal{K}}) \\ \uparrow \iota_* & \nearrow j_* & \\ \pi_k(U(\infty)) & & \end{array}$$

wobei ι jeweils die kanonische Einbettung bezeichne. Damit ist insbesondere mit 4.1.6

$$\pi_k(\tilde{U}(\infty)) \cong \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \mathbb{Z} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für die Räume $\hat{\mathcal{F}}_+$ und $\hat{\mathcal{F}}_-$ bilden die Operatoren id und $-id$ jeweils kanonische Basispunkte, im Fall des Raumes $\hat{\mathcal{F}}_*$ existiert jedoch kein einzelner dermaßen ausgezeichnete Operator. Stattdessen liefert aber der Raum

$$\mathcal{J} = \{2P - id \in \mathcal{L}(H) : P \text{ Orthogonalprojektion}, \dim \ker P = \dim \text{im } P = \infty\}$$

eine ganze Menge von Operatoren, die in gewisser Weise die einfachsten Operatoren dieses Raumes darstellen. Dieser Raum wird daher im Folgenden auch als **Raum der Basispunkte** von $\hat{\mathcal{F}}_*$ bezeichnet. Unter Verwendung des Funktionalkalküls ist unmittelbar einzusehen, dass $\mathcal{J} = \hat{\mathcal{F}}(0)$. Zudem erhält man aus dem Spektralsatz für kompakte normale Operatoren $\tilde{U}(0) = \{id\}$.

4.2.9 Folgerung. Für jede Wahl des Basispunktes $A \in \mathcal{J}$ sind die von den Inklusionen induzierten Abbildungen

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_k(\hat{\mathcal{F}}(n), A) &\rightarrow \pi_k(\hat{\mathcal{F}}(\infty), A), \quad k \geq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_k(\tilde{U}(n), id) &\rightarrow \pi_k(\tilde{U}(\infty), id), \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

bijektiv.

Beweis. Wie im Beweis von 4.2.7 genügt es wieder den Beweis im Fall $\hat{\mathcal{F}}(\infty)$ zu führen. Es bezeichne nun $j_n^m : \hat{\mathcal{F}}(n) \hookrightarrow \hat{\mathcal{F}}(m)$ und $\iota_n : \hat{\mathcal{F}}(n) \hookrightarrow \hat{\mathcal{F}}(\infty)$ die kanonischen Inklusionen.

Ist $g : (S^k, *) \rightarrow (\hat{\mathcal{F}}(\infty), A)$ gegeben, so ist $g(S^k) \subset \hat{\mathcal{F}}(\infty)$ kompakt und folglich existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $h_1(g(S^k)) \subset \hat{\mathcal{F}}(n)$. Wegen $h_t(g(S^k)) = A$ für alle $t \in [0, 1]$ ist zudem $[g] = [h_1 \circ g] \in \pi_k(\hat{\mathcal{F}}(\infty), A)$. Damit wird aber offenbar $[h_1 \circ g] \in \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_k(\hat{\mathcal{F}}(n), A)$ durch die von der Inklusion induzierte Abbildung auf $[g]$ abgebildet und somit ist diese surjektiv.

Es sei nun $g_1 : (S^k, *) \rightarrow (\hat{\mathcal{F}}(n), A)$, $g_2 : (S^k, *) \rightarrow (\hat{\mathcal{F}}(m), A)$ mit $\iota_n \circ g_1 \simeq \iota_m \circ g_2$ und es bezeichne $H : I \times S^k \rightarrow \hat{\mathcal{F}}(\infty)$ eine Homotopie zwischen diesen Abbildungen. Da aber $H(I \times S^k) \subset \hat{\mathcal{F}}(\infty)$ kompakt ist, erhält man die Existenz eines $k \in \mathbb{N}$ mit $h_1(H(I \times S^k)) \subset \hat{\mathcal{F}}(k)$. Damit ist aber offenbar $(j_n^k)_*[g_1] = (j_m^k)_*[g_2]$ und folglich $[g_1] = [g_2] \in \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_k(\hat{\mathcal{F}}(n), A)$. \square

Berechnung von $\pi_k(\hat{\mathcal{F}}(\infty))$ im komplexen Fall

Dieser Abschnitt ist gänzlich der Berechnung von $\pi_k(\hat{\mathcal{F}}(\infty))$ gewidmet. Hierbei sei zunächst stets H ein komplexer Hilbertraum. Zum reellen Fall ist am Ende des Abschnittes eine Bemerkung zu finden.

Die folgende allgemeine Aussage zu unitären Operatoren wird in den weiteren Argumentationen mehrfach benötigt und soll daher als Lemma genannt werden.

4.2.10 Lemma. *Es sei $U \in \mathcal{U}(H)$ mit $\sigma_{ess}(U) = \{1\}$. Dann ist $U = id + K$ mit einem normalen Operator $K \in \mathcal{K}(H)$.*

Beweis. Zunächst ist $U - id$ normal mit $\sigma_{ess}(U - id) = 0$. Es bezeichne $p : H \rightarrow \mathcal{C}$ die Projektion auf die Calkin-Algebra von H und $r : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ den Spektralradius. Da $p(U - id) \in \mathcal{C}$ normal ist, erhält man¹

$$\|p(U - id)\|_{\mathcal{C}} = r(p(U - id)) = 0$$

und folglich ist $U - id \in \mathcal{K}(H)$. Damit ist alles gezeigt. \square

4.2.11 Folgerung. $\exp(\pi i(\hat{F}_* + id)) \subset \mathcal{U}_{\mathcal{K}}(H)$

Beweis. Für $A \in \hat{F}_*$ ist $B = \exp(\pi i(A + id)) \in \mathcal{U}(H)$ und wegen des Spektralabbildungssatzes $\sigma_{ess}(B) = \{1\}$. Die Behauptung folgt aus 4.2.10. \square

Mit dem Funktionalkalkül für komplexe selbstadjungierte Operatoren besitzt jedes $T \in \hat{\mathcal{F}}(n)$ eine Darstellung

$$T = P_+ - P_- + \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$$

¹Die Gleichheit von Norm und Spektralradius für normale Elemente unitärer C^* -Algebren ist eine durchaus bekannte Tatsache. Man findet sie beispielsweise in [Wer05, Lemma IX.3.3]

wobei $P_+ = E_{\{1\}}(T)$, $P_- = E_{\{-1\}}(T)$ und $P_i = E_{\{\lambda_i\}}(T)$ die Spektralprojektoren und $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ die mit Vielfachheiten aufgezählten Eigenwerte von T in $(-1, 1)$ sind. Mit dieser Darstellung ist

$$\begin{aligned}
\exp(i\pi(T + id)) &= \exp\left(i\pi(P_+ - P_- + \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i + id)\right) \\
&= \exp\left(i\pi(-P_+ - P_- - \sum_{i=1}^n P_i + id + 2P_+ + \sum_{i=1}^n (1 + \lambda_i)P_i)\right) \\
&= \exp\left(i\pi(2P_+ + \sum_{i=1}^n (1 + \lambda_i)P_i)\right) = \exp(2\pi i P_+) \exp\left(i\pi \sum_{i=1}^n (1 + \lambda_i)P_i\right) \\
&= (id + P_+(e^{2\pi i} - 1)) \exp\left(i\pi \sum_{i=1}^n (1 + \lambda_i)P_i\right) = \exp\left(i\pi \sum_{i=1}^n (1 + \lambda_i)P_i\right) \\
&= \prod_{i=1}^n \exp(\pi i(1 + \lambda_i)P_i) = \prod_{i=1}^n \left(id + P_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi i(1 + \lambda_i))^n}{n!}\right) \\
&= \prod_{i=1}^n id + P_i(e^{\pi i(1 + \lambda_i)} - 1) = \prod_{i=1}^n \left(P_+ + P_- + \sum_{k=1, k \neq i}^n P_k + e^{\pi i(1 + \lambda_i)} P_i\right) \\
&= P_+ + P_- + \sum_{i=1}^n e^{\pi i(1 + \lambda_i)} P_i = P_+ + P_- - \sum_{i=1}^n e^{\pi i \lambda_i} P_i
\end{aligned}$$

Folglich ist mit $V = \text{im}(E_{\{1\}}(T)) \oplus \text{im}(E_{\{-1\}}(T))$

$$\exp(\pi i(T + id)) = \begin{cases} id & \text{auf } V \\ -\sum_{i=1}^n e^{\pi i \lambda_i} P_i & \text{auf } V^\perp \end{cases} \in \tilde{U}(n) \subset \tilde{U}(\infty) \quad (4.2.1)$$

und man erhält das Resultat

$$\exp(\pi i(\hat{\mathcal{F}}(n) + id)) \subset \tilde{U}(n), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

womit offenbar ebenfalls

$$\exp(\pi i(\hat{\mathcal{F}}(\infty) + id)) \subset \tilde{U}(\infty)$$

Damit besteht aber ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{\mathcal{F}}(n) & \longrightarrow & \hat{\mathcal{F}}(\infty) & \longrightarrow & \hat{F}_* \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\tilde{U}(n) & \longrightarrow & \tilde{U}(\infty) & \longrightarrow & \mathcal{U}_{\mathcal{K}}
\end{array}$$

in dem die vertikalen Abbildungen durch $\exp(\pi i(\cdot + id))$ und die horizontalen Abbildungen durch die Inklusionen gegeben sind.

Das Ziel dieses Abschnittes ist nun der Beweis der folgenden zentralen Aussage aus [AS69]:

4.2.12 Satz (Atiyah, Singer '69). *Die von der Abbildung*

$$\exp(\pi i(\cdot + id)) : \hat{\mathcal{F}}(\infty) \rightarrow \tilde{U}(\infty)$$

induzierten Abbildungen

$$\exp(i\pi(\cdot + id))_* : \pi_k(\hat{\mathcal{F}}(\infty), J) \rightarrow \pi_1(\tilde{U}(\infty), id)$$

sind für jedes $J \in \mathcal{J}$ und jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bijektiv.

Mit dem kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \lim \pi_k(\hat{\mathcal{F}}(n), J) & \xrightarrow{\cong} & \pi_k(\hat{\mathcal{F}}(\infty), J) \\ \exp(i\pi(\cdot + id))_* \downarrow & & \downarrow \exp(i\pi(\cdot + id))_* \\ \lim \pi_k(\tilde{U}(n), id) & \xrightarrow{\cong} & \pi_k(\tilde{U}(\infty), id) \end{array}$$

genügt es unter Verwendung der Eigenschaften des direkten Limes (vgl. [Swi02, Corollary 7.49]) zu zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\exp(\pi i(\cdot + id)) : \hat{\mathcal{F}}(n) \rightarrow \tilde{U}(n)$$

eine Homotopieäquivalenz ist. Diese Aussage soll nun mittels einer Induktion nachgewiesen werden.

Man betrachte hierzu die Räume

$$\begin{aligned} C(n) &= \{F \in \hat{\mathcal{F}}(\infty) : \sigma(F) \cap (-1, 1) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}\} = \hat{\mathcal{F}}(n) \setminus \hat{\mathcal{F}}(n-1) \\ D(n) &= \{U \in \tilde{U}(n) : \text{rk}(id - U) = n\} = \tilde{U}(n) \setminus \tilde{U}(n-1), \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

wobei in der Definition von $C(n)$ die Eigenwerte mit Vielfachheiten gezählt werden. Mit den obigen Überlegungen und des Spektralsatzes für kompakte normale Operatoren ist zunächst $\exp(i\pi(C(n) + id)) = D(n)$. Das folgende Resultat wird später im Induktionsschritt benötigt.

4.2.13 Lemma. *Die Abbildung $\exp(i\pi(\cdot + id)) : C(n) \rightarrow D(n)$ ist ein Faserbündel mit kontrahierbarer Faser.*

Beweis. Zur besseren Lesbarkeit ist der Beweis in mehrere Teile gegliedert.

1. Schritt Zunächst soll gezeigt werden, dass durch

$$\{\ker(id - A)\}_{A \in D(n)}, \quad \{\ker(id - A)^\perp\}_{A \in D(n)}$$

ein Unterbündel des trivialen Bündels $D(n) \times H$ und ein n -dimensionales Vektorbündel gegeben sind. Man benötigt hierfür zunächst folgendes Resultat:

4.2.14 Lemma. *Es sei $A_0 \in D(n)$ beliebig gewählt. Dann existiert eine Umgebung $U \subset \mathcal{L}(H)$ von A_0 , so dass*

$$\ker(id - A) \cap \ker(id - A_0)^\perp = \{0\} \quad \text{für alle } A \in U$$

Beweis. Man beachte, dass mit $A_0 \in \mathcal{U}(H)$ der Operator $id - A_0$ stets normal ist. Es sei $V = \ker(id - A_0)^\perp = \text{im}(id - A_0)$, $W = \ker(id - A_0)$ und man betrachte für $S \in \mathcal{L}(H)$ die Abbildung

$$\varphi_S : V \oplus W \rightarrow H, \quad \varphi_S(v \oplus w) = (id - S)(v) + w$$

Nun ist die Abbildung $\varphi_{A_0} \in \mathcal{L}(V \oplus W, H)$ offenbar stetig und mit $H = \ker(id - A_0)^\perp \oplus \ker(id - A_0)$ erhält man unmittelbar die Bijektivität von φ_{A_0} , womit diese Abbildung wegen des Prinzips der offenen Abbildung ein topologischer Isomorphismus ist. Da aber $GL(V \oplus W, H) \subset \mathcal{L}(V \oplus W, H)$ offen ist, existiert eine offene Umgebung von φ_{A_0} in $GL(V \oplus W, H)$. Da

$$\varphi : \mathcal{L}(H) \rightarrow \mathcal{L}(V \oplus W, H), \quad S \mapsto \varphi_S$$

ebenfalls stetig ist, kann nun U als das Urbild dieser Umgebung gesetzt werden. Damit ist $\varphi(U) \subset GL(V \oplus W, H)$.

Wäre $0 \neq v \in \ker(id - A) \cap \ker(id - A_0)^\perp$ für ein $A \in U$, so wäre $\varphi_A(v, 0) = 0$ und folglich $\varphi_A \notin GL(V \oplus W, H)$. \square

Mit diesem Resultat können Trivialisierungen für die Bündel angegeben werden. Ist $A_0 \in D(n)$, so wähle man eine Umgebung U von A_0 in $D(n)$ wie im Lemma. Ist nun $P_1 \in \mathcal{L}(H)$ die Orthogonalprojektion auf $\ker(id - A_0)$ und $P_2 \in \mathcal{L}(H)$ die Orthogonalprojektion auf $\ker(id - A_0)^\perp$ bezüglich der Zerlegung $H = \ker(id - A_0) \oplus \ker(id - A_0)^\perp$, so sind deren Einschränkungen $P_1|_{\ker(id - A)}$, $P_2|_{\ker(id - A)^\perp}$ nach Definition von U bijektiv und somit wegen des Prinzips der offenen Abbildung für jedes $A \in U$ topologische Isomorphismen. Hieraus erhält man nun Trivialisierungen

$$\begin{aligned} \pi_1^{-1}(U) \ni (A, x) &\mapsto (A, P_1|_{\ker(id - A)} x) \in H \times \ker(id - A_0) \\ \pi_2^{-1}(U) \ni (A, x) &\mapsto (A, P_2|_{\ker(id - A)^\perp} x) \in H \times \ker(id - A_0)^\perp \end{aligned}$$

mit denen sich wie eingangs behauptet $\{\ker(id - A)\}_{A \in D(n)}$ und $\{\ker(id - A)^\perp\}_{A \in D(n)}$ als Vektorbündel erweisen.

Aus den gefundenen Trivialisierungen erhält man durch

$$\begin{aligned} \pi_1^{-1}(U) \ni (A, x) &\mapsto (A, (P_1|_{\ker(id - A)} (P_1|_{\ker(id - A)})^*)^{-\frac{1}{2}} P_1|_{\ker(id - A)} x) \in H \times \ker(id - A_0) \\ \pi_2^{-1}(U) \ni (A, x) &\mapsto (A, (P_2|_{\ker(id - A)^\perp} (P_2|_{\ker(id - A)^\perp})^*)^{-\frac{1}{2}} P_2|_{\ker(id - A)^\perp} x) \in H \times \ker(id - A_0)^\perp \end{aligned}$$

faserweise unitäre Trivialisierungen, die im Folgenden benötigt werden.

2. Schritt Unter Verwendung der faserweise unitären Trivialisierungen aus dem 1. Schritt soll nun gezeigt werden, dass $\exp(i\pi(\cdot + id)) : C(n) \rightarrow D(n)$ ein Faserbündel definiert. Hierzu soll zunächst die Standardfaser festgelegt werden.

Für $\exp(i\pi(T + id)) \in D(n)$ mit $T \in C(n)$ ist mit (4.2.1) und den dort gewählten Bezeichnungen

$$\exp(i\pi(T + id)) = \begin{cases} id & \text{auf } V \\ -\sum_{i=1}^n e^{i\pi\lambda_i} P_i & \text{auf } V^\perp \end{cases}$$

und folglich ist jedes $A \in C(n)$ im Urbild von der Form

$$A = P_+ - P_- + \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$$

wobei $P_+ + P_-|_V = id_V$, $\dim(\ker(P_+)) = \dim(\ker(P_-)) = \infty$ und

$$V = \{u \in H : \exp(i\pi(T + id))u = u\}$$

Insbesondere erhält man aus dem Spektralsatz für normale kompakte Operatoren unmittelbar die Surjektivität der betrachteten Abbildung. Die Standardfaser sei nun durch

$$\mathcal{J}(V) = \{2P - id \in \mathcal{L}(V) : P \text{ Orthogonalprojektion, } \dim \ker(P) = \dim \text{im}(P) = \infty\}$$

festgelegt, wobei bis auf Homöomorphie natürlich V durch jeden anderen separablen Hilbertraum ersetzt werden kann. Damit ist insbesondere $\mathcal{J}(V) \approx \mathcal{J}$.

Ist nun $\Omega \subset D(n)$ offen, so dass $\pi_1|_\Omega, \pi_2|_\Omega$ trivial sind, so ist auch das Bündel

$$\pi_1 \oplus \pi_2 : \{\ker(id - A) \oplus \ker(id - A)^\perp\}_{A \in D(n)} \rightarrow D(n)$$

über Ω trivial und man hat Trivialisierungen

$$U' : (\pi_1 \oplus \pi_2)^{-1}(\Omega) \rightarrow \Omega \times (\ker(id - A_0) \oplus \ker(id - A_0)^\perp) = \Omega \times H$$

die faserweise unitär sind. Hieraus erhält man eine Trivialisierung für $\exp(i\pi(\cdot + id))$ über Ω durch

$$T \mapsto (\exp(i\pi(T + id)), U'_{\exp(i\pi(T + id))} T (U'_{\exp(i\pi(T + id))})^* |_{\ker(id - A_0)}) \in \Omega \times \mathcal{J}(\ker(id - A_0))$$

Somit ist $\exp(i\pi(\cdot + id)) : C(n) \rightarrow D(n)$ ein Faserbündel.

3. Schritt Im letzten Schritt soll die zum Beweis der Behauptung noch fehlende Kontrahierbarkeit der Standardfaser \mathcal{J} gezeigt werden. Es ist offenbar

$$\mathcal{J} \approx \mathcal{P} = \{P \in \mathcal{L}(H) : P \text{ Orthogonalprojektion, } \dim \ker P = \dim \text{im } P = \infty\}$$

4.2.15 Lemma. $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}(H)$ gehört zur Klasse \mathcal{W} .

Beweis. $P \in \mathcal{S}(H)$ ist offenbar genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn $\sigma(P) = \{0, 1\}$. Man betrachte die wegen 1.2.14 und 1.2.15 offene Teilmenge

$$\Omega = \left\{ A \in \mathcal{S}(H) : \sigma(A) \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \right. \\ \left. |\sigma_p(A) \cap \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)| = \infty, |\sigma_p(A) \cap \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)| = \infty \right\} \subset \mathcal{S}(H)$$

Wählt man nun eine Deformationsretraktion $H : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ auf 0 und $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ auf 1 abbildet, so ist wegen eingangs gemachter Bemerkung und dem Spektralabbildungssatz $H_1(\Omega) = \mathcal{P}$. Da die selbstadjungierten Operatoren eines komplexen Hilbertraumes keinen linearen Raum bilden, betrachte man $\mathcal{S}(H)$ als Unterraum der Reellifizierung von $\mathcal{L}(H)$. Da dies die Topologie von $\mathcal{S}(H)$ nicht verändert, ist damit Ω eine offene Teilmenge eines normierten linearen Raumes und mit 4.1.3 der Klasse \mathcal{W} angehörig. Damit ist aber \mathcal{P} Deformationsretrakt eines Elementes aus \mathcal{W} und folglich die Aussage gezeigt. \square

4.2.16 Lemma. *Die Gruppenwirkung*

$$\mathcal{P} \times \mathcal{U}(H) \rightarrow \mathcal{P}, \quad (P, U) \mapsto U^* P U$$

ist transitiv.

Beweis. Es seien $P, Q \in \mathcal{P}$. Man wähle Orthonormalbasen $\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \{e'_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ von H , so dass

$$P(H) = \text{span}\{e_i\}_{i=0}^{\infty}, \quad (id - P)(H) = \text{span}\{e_i\}_{i=-1}^{-\infty} \\ Q(H) = \text{span}\{e'_i\}_{i=0}^{\infty}, \quad (id - Q)(H) = \text{span}\{e'_i\}_{i=-1}^{-\infty}$$

und definiere

$$U : H \rightarrow H, \quad Ux = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \langle x, e_i \rangle e'_i$$

Nun ist unter Verwendung der Parsevalschen Gleichung

$$\|Ux\|^2 = \left\langle \sum_{i \in \mathbb{Z}} \langle x, e_i \rangle e'_i, \sum_{i \in \mathbb{Z}} \langle x, e_i \rangle e'_i \right\rangle = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle x, e_i \rangle} \\ = \sum_{i \in \mathbb{Z}} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2, \quad x \in H$$

und folglich U eine Isometrie. Da zudem für $y \in H$ mit $x = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle y, e'_j \rangle e_j \in H$

$$Ux = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\langle \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle y, e'_j \rangle e_j, e_i \right\rangle e'_i = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle y, e'_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle e'_i \\ = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \langle y, e'_i \rangle e'_i = y$$

ist zunächst $U \in \mathcal{U}(H)$.

Da für jedes $x \in H$

$$\begin{aligned} U^{-1}QUx &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\langle \sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e'_i, e'_j \right\rangle e_j = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \langle e'_i, e'_j \rangle e_j \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i = Px \end{aligned}$$

ist abschließend $U^*QU = P$ und folglich die Transitivität nachgewiesen. \square

Mit diesem Resultat ist \mathcal{P} mit der Gruppenwirkung

$$\mathcal{P} \times \mathcal{U}(H) \rightarrow \mathcal{P}, (P, U) \mapsto U^*PU$$

ein homogener Raum und zudem ist der Stabilisator eines beliebig gewählten $P_0 \in \mathcal{P}$ durch

$$\text{Stab } P_0 = \{U \in \mathcal{U}(H) : U^*P_0U = P_0\}$$

gegeben. Es soll zunächst gezeigt werden, dass

$$\mathcal{U}(H)/\text{Stab } P_0 \approx \mathcal{P}$$

Hierzu ist bekannt, dass die kanonische Abbildung $[U] \mapsto U^*P_0U$ stets stetig und bijektiv ist. Es genügt damit die Stetigkeit der Umkehrabbildung nachzuweisen. Dies kann zunächst in einer Umgebung von P_0 getan werden:

Ist P_1 hinreichend nahe an P_0 , so ist $G = G(P_1) = P_0P_1 + (id - P_0)(id - P_1) \in GL(H)$ wegen $G(P_0) \in GL(H)$. Damit ist aber $GG^* \in GL(H)$ und $(GG^*)^{-\frac{1}{2}}G \in \mathcal{U}(H)$. Mit

$$GG^* = P_0P_1P_0 + (id - P_0)(id - P_1)(id - P_0)$$

ist aber $P_0GG^* = GG^*P_0$ und man erhält

$$\begin{aligned} ((GG^*)^{-\frac{1}{2}}G)^*P_0((GG^*)^{-\frac{1}{2}}G) &= G^*(GG^*)^{-\frac{1}{2}}P_0((GG^*)^{-\frac{1}{2}}G) \\ &= G^*(GG^*)^{-\frac{1}{2}}(GG^*)^{-\frac{1}{2}}P_0G = G^*(G^*)^{-1}G^{-1}P_0G \\ &= G^{-1}P_0G = G^{-1}P_0(P_0P_1 + (id - P_0)(id - P_1)) \\ &= G^{-1}P_0P_1 = G^{-1}(P_0P_1 + (id - P_0)(id - P_1))P_1 \\ &= G^{-1}GP_1 = P_1 \end{aligned}$$

Folglich ist aber in einer Umgebung Ω von P_0 die Umkehrabbildung durch

$$g : \Omega \rightarrow \mathcal{U}(H)/\text{Stab}(P_0), \quad P_1 \mapsto [(GG^*)^{-\frac{1}{2}}G]$$

mit $G = P_0P_1 + (id - P_0)(id - P_1)$ gegeben.

Für ein beliebiges $P \in \mathcal{P}$ existiert nun ein $U \in \mathcal{U}(H)$ mit $U^*P_0U = P$. Damit ist $\Omega_P = U^*\Omega U$ eine Umgebung von P und mit

$$g_P : \Omega_P \rightarrow \mathcal{U}(H)/\text{Stab}(P_0), \quad g_P(U) = g(UPU^*)U$$

erhält man die gesuchte Umkehrabbildung auf Ω_P . Insgesamt ist damit aber die betrachtete Abbildung stetig und folglich $\mathcal{U}(H)/\text{Stab } P_0 \approx \mathcal{P}$.

Mit diesen Betrachtungen besitzt nun auch die Projektion $\mathcal{U}(H) \rightarrow \mathcal{U}(H)/\text{Stab}(P_0)$ um jeden Punkt einen Schnitt und folglich ist $\mathcal{U}(H) \rightarrow \mathcal{U}(H)/\text{Stab}(P_0)$ ein Faserbündel² mit Standardfaser $\text{Stab}(P_0)$. Es ist leicht einzusehen, dass $\text{Stab}(P_0) \approx \mathcal{U}(P_0(H)) \times \mathcal{U}((id - P_0)(H))$ und damit ist die Standardfaser von $\mathcal{U}(H) \rightarrow \mathcal{U}(H)/\text{Stab}(P_0)$ wegen Kuipers Theorem 4.1.7 kontrahierbar. Abschließend ergibt sich nun aus der langen exakten Sequenz des Faserbündels

$$\pi_n(\mathcal{U}(H)/\text{Stab}(P_0)) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

und man erhält aus 4.2.15 die Kontrahierbarkeit von $\mathcal{J} \approx \mathcal{U}(H)/\text{Stab}(P_0)$

Damit ist der Beweis der Aussage 4.2.13 beendet. □

4.2.17 Bemerkung. Betrachtet man statt unitärer Operatoren im dritten Teil des Beweises orthogonale Operatoren eines reellen Hilbertraumes, so erhält man analog die Kontrahierbarkeit des Basispunktraumes \mathcal{J} der reellen total indefiniten Fredholmoperatoren.

Mit diesem Lemma ist insbesondere wegen $C(0) = \hat{\mathcal{F}}(0) = \mathcal{J}$ und $D(0) = \tilde{U}(0)$ der Induktionsanfang bereits gegeben.

Im Sinne der nun zu führenden Induktion wird dieses Lemma verwendet um unter der vorausgesetzten Homotopieäquivalenz $\exp(\pi i(\cdot + id)) : \hat{\mathcal{F}}(n-1) \rightarrow \tilde{U}(n-1)$ die Abbildung $\exp(\pi i(\cdot + id)) : \hat{\mathcal{F}}(n) \rightarrow \tilde{U}(n)$ als Homotopieäquivalenz nachzuweisen. Hierfür werden zwei Dinge benötigt. Zuerst ein abstraktes Lemma, das Bedingungen aufzeigt unter denen ein solches "Zusammenflicken" von Homotopieäquivalenzen funktioniert und danach der Nachweis der Gültigkeit dieser Bedingungen im konkret vorliegenden Fall.

Das technische Lemma

4.2.18 Definition. Eine offene Teilmenge U eines topologischen Raumes X heißt **respektabel**, falls $X \setminus U$ und ∂U zu \mathcal{W} gehören und beide Paare $(\bar{U}, \partial U), (X \setminus U, \partial U)$ die allgemeine Homotopiefortsetzungseigenschaft³ besitzen.

4.2.19 Lemma. *Es sei X ein normaler topologischer Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und es existiere eine offene Umgebung $A \subset U$, so dass A ein strenger Deformationsretrakt von U ist. Dann besitzt das Paar (X, A) die allgemeine Homotopiefortsetzungseigenschaft.*

Beweis. [Bre93, Theorem VII.1.5] □

²Im Allgemeinen ist die Existenz eines lokalen Schnittes natürlich nicht zum Nachweis lokaler Trivialität geeignet. Die Gültigkeit der Schlussweise ist hierbei wegen des Vorliegens eines homogenen Raumes gerechtfertigt, vgl. [Swi02, Theorem 4.13]

³Zur Bezeichnung: (X, A) habe die allgemeine Homotopiefortsetzungseigenschaft, falls die Inklusion $\iota : A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung ist.

4.2.20 Definition. Es sei X ein topologischer Raum und $X_1, X_2 \subset X$. Dann heißt das Tripel $(X; X_1, X_2)$ eine **Mayer-Vietoris Triade**, falls

1. $X = X_1 \cup X_2$
2. $X_1, X_2 \subset X$ abgeschlossen.
3. Für $X_0 = X_1 \cap X_2$ besitzen die Raumpaare (X_1, X_0) und (X_2, X_0) die allgemeine Homotopiefortsetzungseigenschaft.

4.2.21 Bemerkung. Die Bezeichnung entstammt dem Bestehen der klassischen Mayer-Vietoris Sequenz für solche Triaden (vgl. hierzu [ES52, § 15]).

4.2.22 Lemma. *Es seien $(X; X_1, X_2), (Y; Y_1, Y_2)$ Mayer-Vietoris Triaden und $f : X \rightarrow Y$ stetig, so dass $f|_{X_i} : X_i \rightarrow Y_i$ für $i = 0, 1, 2$ eine Homotopieäquivalenz ist. Dann ist auch $f : X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. [Bro68, Theorem 7.4.1] □

Mit diesen Definitionen und Resultaten kann jetzt das angekündigte technische Lemma formuliert und bewiesen werden.

4.2.23 Lemma. *Es seien X, X' topologische Räume, $f : X' \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, $A \subset X$ und $A' = f^{-1}(A)$. Desweiteren gelte*

1. $f : A' \rightarrow A$ ist eine Homotopieäquivalenz.
2. $f : X' \setminus A' \rightarrow X \setminus A$ ist ein Faserbündel mit kontrahierbarer Faser.
3. A besitzt eine respektable offene Umgebung U , so dass $f^{-1}(U) = U'$ respektabel ist und die Inklusionen $A \hookrightarrow \bar{U}, A' \hookrightarrow \bar{U}'$ Homotopieäquivalenzen sind.

Dann ist $f : X' \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Nach Voraussetzung sind $f : X' \setminus U' \rightarrow X \setminus U$ und $f : \partial U' \rightarrow \partial U$ Faserbündel mit kontrahierbarer Faser und $X' \setminus U', X \setminus U, \partial U', \partial U \in \mathcal{W}$. Wegen der langen exakten Sequenzen dieser Faserbündel, 4.1.3 und 4.1.4 sind damit aber $f : X' \setminus U' \xrightarrow{\cong} X \setminus U$ und $f : \partial U' \xrightarrow{\cong} \partial U$ Homotopieäquivalenzen. Zudem ist mit (3) und (1) auch $f : \bar{U}' \rightarrow \bar{U}$ eine Homotopieäquivalenz. Mit $X' \setminus U' \cap \bar{U}' = \partial U', X \setminus U \cap \bar{U} = \partial U$ sind nun wegen (3) $(X'; X' \setminus U', \bar{U}')$, $(X; X \setminus U, \bar{U})$ Mayer-Vietoris Triaden und folglich insgesamt alle Voraussetzungen von 4.2.22 erfüllt, womit $f : X' \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz ist. □

Anwendung Das soeben gezeigte abstrakte Lemma soll nun auf den hier betrachteten Fall mit

$$\begin{aligned} X' &= \hat{F}_*(n), X = \tilde{U}(n), f = \exp(\pi i(\cdot + id)) \\ A' &= \hat{F}_*(n-1), A = \tilde{U}(n-1) \end{aligned}$$

angewendet werden. Hierzu ist (1) aus 4.2.23 die Induktionsvoraussetzung und (2) ist die Aussage des Lemmas 4.2.13. Es genügt also eine respektable Umgebung U zu konstruieren, die den Eigenschaften (3) genügt.

Man betrachte nun die Funktion

$$\kappa : \tilde{U}(n) \rightarrow [-1, 1], \quad \kappa(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } A \in \tilde{U}(n-1) \\ \max_{\lambda \in \sigma(A) \setminus \{1\}} \operatorname{Re}(\lambda) & \text{falls } A \in \tilde{U}(n) \setminus \tilde{U}(n-1) \end{cases}$$

4.2.24 Lemma. $\kappa : \tilde{U}(n) \rightarrow [-1, 1]$ ist stetig.

Beweis. Es sei zunächst $A_0 \in \tilde{U}(n-1)$ und $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(1) \cap \sigma(A_0) = \{1\}$ beliebig gewählt. Man wähle nun ein C^1 -Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ mit $B_\varepsilon(1) \cap \Omega = \emptyset$ und $\sigma(A_0) \setminus \{1\} \subset \Omega$. Wegen 1.2.14 und 1.2.15 existiert ein $\delta > 0$, so dass $\sigma(B) \subset \Omega \cup B_\varepsilon(1)$ für alle $B \in \mathcal{L}(H)$ mit $\|A - B\| < \delta$ und $|\sigma(B) \cap \Omega| = |\sigma(A_0) \cap \Omega|$. Ist nun $B \in \tilde{U}(n)$ mit $\|B - A_0\| < \delta$, so ist entweder $B \in \tilde{U}(n-1)$ und folglich $\kappa(B) = \kappa(A_0)$ oder B besitzt genau einen von 1 verschiedenen Eigenwert in $B_\varepsilon(1)$ und in diesem Fall ist

$$|\kappa(B) - \kappa(A_0)| \leq \left| \max_{\lambda \in \sigma(B) \setminus \{1\}} \operatorname{Re}(\lambda) - 1 \right| < \varepsilon$$

Folglich ist insgesamt $|\kappa(B) - \kappa(A_0)| < \varepsilon$ für alle $B \in \tilde{U}(n)$ mit $\|B - A_0\| < \delta$ und damit κ bei A_0 stetig.

Es sei nun $A_0 \in \tilde{U}(n) \setminus \tilde{U}(n-1)$ und $\varepsilon > 0$ mit $0 < \varepsilon < \frac{1}{3} \min\{|\lambda_i - \lambda_j| : \lambda_i, \lambda_j \in \sigma(A_0), \lambda_i \neq \lambda_j\}$ beliebig gewählt. Es bezeichne $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in S^1$ die von 1 verschiedenen Eigenwerte von A_0 . Mit 1.2.14 und 1.2.15 existiert ein $\delta > 0$, so dass für $B \in \tilde{U}(n)$ mit $\|B - A_0\| < \delta$

$$\sigma(B) \subset B_\varepsilon(1) \cup \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(\lambda_i), \quad |\sigma(B) \cap \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(\lambda_i)| = |\sigma(A_0) \cap \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(\lambda_i)| = n$$

Damit besitzt aber jedes solche B keinen von 1 verschiedenen Eigenwert in $B_\varepsilon(1)$ und man erhält $|\kappa(B) - \kappa(A_0)| < \varepsilon$ für alle $B \in \tilde{U}(n)$ mit $\|B - A_0\| < \delta$. Somit ist κ bei $A_0 \in \tilde{U}(n) \setminus \tilde{U}(n-1)$ stetig. \square

Die Abbildung κ soll nun zum Nachweis der Eigenschaft (3) aus 4.2.23 verwendet werden. Hierzu betrachte man mit $f = \exp(\pi i(\cdot + id)) : \hat{\mathcal{F}}(n) \rightarrow \tilde{U}(n)$ die folgenden Mengen:

$$U = \kappa^{-1}((0, 1]) = \tilde{U}(n-1) \cup \{U \in \tilde{U}(n) \setminus \tilde{U}(n-1) : \max_{\lambda \in \sigma(A) \setminus \{1\}} \operatorname{Re}(\lambda) > 0\}$$

$$U' = f^{-1}(U) = \hat{\mathcal{F}}(n-1) \cup \{T \in \hat{\mathcal{F}}(n) \setminus \hat{\mathcal{F}}(n-1) : \min_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{-1, 1\}} |\lambda| > \frac{1}{2}\}$$

Mit der Stetigkeit von κ ist $U \subset X$ eine offene Umgebung von $A = \tilde{U}(n-1)$ und $U' \subset X'$ eine offene Umgebung von $\hat{\mathcal{F}}(n-1)$. Das Ziel ist nun zu zeigen, dass diese Umgebungen den Bedingungen aus 4.2.23 (3) genügen. Bevor der Nachweis der einzelnen Eigenschaften geführt wird, ist noch folgende einfache, aber durchaus nützliche Bemerkung angebracht.

4.2.25 *Bemerkung.* Es sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ ein Unterraum und $H : I \times X \rightarrow X$ eine Homotopie mit $H(t, A) \subset A$ für alle $t \in I$ und $H(1, X) \subset A$. Dann ist die Inklusion $\iota : A \hookrightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz.

- Es soll zunächst gezeigt werden, dass **die Paare** $(\bar{U}, \partial U)$, $(X \setminus U, \partial U)$ **und** $(\bar{U}', \partial U')$, $(X' \setminus U', \partial U')$ **die allgemeine Homotopiefortsetzungseigenschaft** besitzen. Hierbei wird stets 4.2.19 Anwendung finden, wobei alle betrachteten Räume metrisierbar und folglich stets normal und parakompakt sind.

Betrachte $(\bar{U}, \partial U)$. Nun ist

$$V_1 = \kappa^{-1}([0, \frac{1}{2})) = \{A \in \tilde{U}(n) \setminus \tilde{U}(n-1) : \max_{\lambda \in \sigma(A) \setminus \{1\}} \operatorname{Re}(\lambda) \in [0, \frac{1}{2})\}$$

eine offene Umgebung von $\partial U = \kappa^{-1}(0)$ in $\bar{U} = \kappa^{-1}([0, 1])$. Man wähle nun eine Homotopie $H : I \times S^1 \rightarrow S^1$ mit

$$H(0, \cdot) = \operatorname{id}, \quad H(t, e^{i\Theta}) = e^{i\Theta}, \quad \Theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi], \quad t \in I$$

$$H(1, e^{i\Theta}) = \begin{cases} i, & \Theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \\ -i, & \Theta \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}] \end{cases}$$

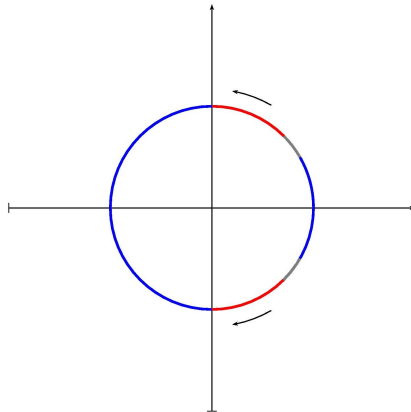


Abbildung 4.2: Zur Definition der Homotopie $H : I \times S^1 \rightarrow S^1$. Die blau markierten Regionen der S^1 bleiben unter der Homotopie fest, die rot markierten werden auf i und $-i$ deformiert. Der grau gekennzeichnete Zwischenraum erlaubt die Wahl von H als stetige Funktion.

Die hiervon induzierte Homotopie $H : I \times V_1 \rightarrow V_1$ ist aber offenbar eine Deformationsretraktion auf ∂U womit aus 4.2.19 die Behauptung folgt.

Für das Raumpaars $(X \setminus U, \partial U)$ ist die Argumentation mit der offenen Umgebung

$$V_2 = \kappa^{-1}((-\frac{1}{2}, 0]) = \{A \in \tilde{U}(n) \setminus \tilde{U}(n-1) : \max_{\lambda \in \sigma(A) \setminus \{1\}} \operatorname{Re}(\lambda) \in (-\frac{1}{2}, 0]\}$$

von ∂U in $X \setminus U = \{A \in \tilde{U}(n) \setminus \tilde{U}(n-1) : \max_{\lambda \in \sigma(A) \setminus \{1\}} \operatorname{Re}(\lambda) \in [-1, 0]\}$ recht analog.
 Man betrachte nun $(\bar{U}', \partial U')$ wobei

$$\begin{aligned}\bar{U}' &= \hat{\mathcal{F}}(n-1) \cup \{T \in \hat{\mathcal{F}}(n) \setminus \hat{\mathcal{F}}(n-1) : \min_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{-1, 1\}} |\lambda| \geq \frac{1}{2}\} \\ \partial U' &= \{T \in \hat{\mathcal{F}}(n) \setminus \hat{\mathcal{F}}(n-1) : \min_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{-1, 1\}} |\lambda| = \frac{1}{2}\}\end{aligned}$$

Mit

$$V'_1 = \{T \in \hat{\mathcal{F}}(n) \setminus \hat{\mathcal{F}}(n-1) : \min_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{-1, 1\}} |\lambda| \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]\}$$

ist eine offene Umgebung von $\partial U'$ in \bar{U}' gegeben. Man wähle eine Homotopie $H : I \times [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ mit

$$\begin{aligned}H(0, \cdot) &= \operatorname{id}, \quad H(t, x) = x, \quad x \in [-1, -\frac{3}{4}] \cup [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup (\frac{3}{4}, 1], \quad t \in I \\ H(1, x) &= \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x \in (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2}, & x \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) \end{cases}\end{aligned}$$

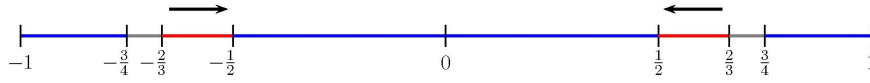


Abbildung 4.3: Zur Definition der Homotopie $H : I \times [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$

Die hiervon induzierte Homotopie $H : I \times V'_1 \rightarrow V'_1$ liefert nun eine Deformationsretraktion von V'_1 auf $\partial U'$ und das gewünschte Resultat folgt wieder aus 4.2.19.
 Abschließend werde $(X' \setminus U', \partial U')$ betrachtet. Hierbei ist

$$X' \setminus U' = \{T \in \hat{\mathcal{F}}(n) \setminus \hat{\mathcal{F}}(n-1) : \min_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{-1, 1\}} |\lambda| \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$$

Eine offene Umgebung von $\partial U'$ in $X' \setminus U'$ erhält man durch

$$V'_2 = \{T \in \hat{\mathcal{F}}(n) \setminus \hat{\mathcal{F}}(n-1) : \min_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{-1, 1\}} |\lambda| \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}] \cup (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]\}$$

mit der die Argumentation recht analog zum eben betrachteten Fall verläuft.

- Es ist nun $\partial U, X \setminus U, \partial U', X' \setminus U' \in \mathcal{W}$ nachzuweisen.

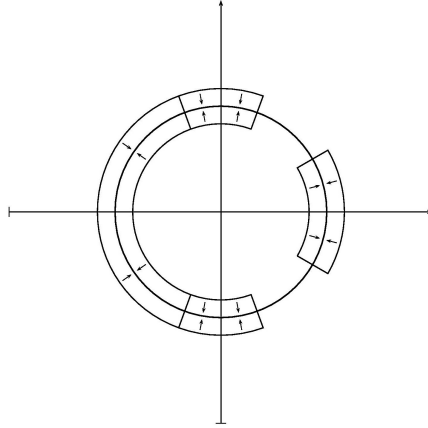


Abbildung 4.4: Bewegung des Spektrums unter Deformation auf die unitären Elemente

Man betrachte zunächst ∂U und definiere

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \{re^{i\theta} : \theta \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}), r \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})\} \\
 S_2 &= \{re^{i\theta} : \theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi) \cup (\frac{4\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi), r \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})\} \\
 S_3 &= \{re^{i\theta} : \theta \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi], r \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})\}
 \end{aligned}$$

Mit 1.2.14 und 1.2.15 ist die Menge

$$\{A \in \mathcal{L}(H) : \sigma(A) \subset S_1 \cup S_2 \cup S_3, |\sigma(A) \cap (S_2 \cup S_3)| = n, \sigma(A) \cap S_2 \neq \emptyset\} \subset \mathcal{L}(H)$$

offen. Durch Anwenden der Deformationsretraktion (4.1.1) erhält man hieraus zunächst eine Teilmenge unitärer Operatoren, wobei wegen des Spektralsatzes die Spektren der einzelnen Operatoren radial auf den Einheitskreis verschoben werden (siehe Abbildung (4.4)). Ist nun $H_1 : I \times S^1 \rightarrow S^1$ eine Deformationsretraktion mit

$$H_1(t, e^{i\theta}) = \begin{cases} e^{i\theta}, & \text{für } \theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi] \\ 1, & \text{für } \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \end{cases}$$

so erhält man durch Anwendung der hiervon induzierten Deformationsretraktion schließlich einen Unterraum \mathcal{A} unitärer Operatoren, die jeweils n von 1 verschiedene Eigenwerte besitzen, die sämtlich in $(S_2 \cup S_3) \cap S^1$ liegen, und deren essentielles Spektrum aus 1 besteht. Mit 4.1.3 und den bisherigen Deformationen ist zudem jedes Element aus \mathcal{A} vom Homotopietyp eines CW-Komplexes und $\partial U \subset \mathcal{A}$. Mit 4.2.10 ist nun aber jedes $U \in \mathcal{A}$ von der Form $id + K$ mit einem normalen Operator $K \in \mathcal{K}(H)$ und wegen des Spektralsatz für

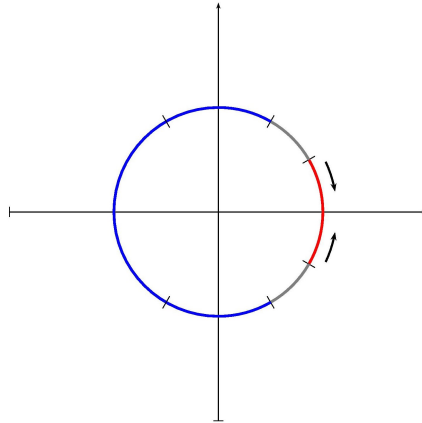


Abbildung 4.5: Zur Definition der Homotopie $H_1 : I \times S^1 \rightarrow S^1$

kompakte normale Operatoren ist damit $\mathcal{A} \subset \tilde{U}(n)$. Mit einer Homotopie $H_2 : I \times S^1 \rightarrow S^1$ mit

$$H_2(0, \cdot) = id, \quad H_2(t, e^{i\Theta}) = e^{i\Theta}, \quad \Theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \quad t \in I$$

$$H_2(1, e^{i\Theta}) = \begin{cases} i, & \Theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right] \\ -i, & \Theta \in \left[\frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right] \end{cases}$$

erhält man nun eine Homotopie $H_2 : I \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, die bezüglich des Unterraums ∂U die

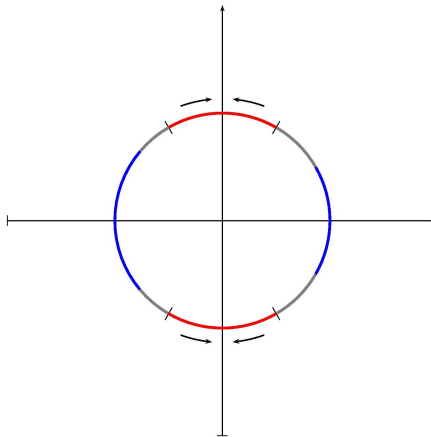


Abbildung 4.6: Zur Definition der Homotopie $H_2 : I \times S^1 \rightarrow S^1$

Bedingungen aus 4.2.25 erfüllt. Damit gehört aber schließlich ∂U zur Klasse \mathcal{W} .

Man betrachte nun $X \setminus U$. Mit

$$S_1 = \{re^{i\theta} : \theta \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\pi), r \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})\}$$

$$S_2 = \{re^{i\theta} : \theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi), r \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})\}$$

erhält man eine in $\mathcal{L}(H)$ offene Umgebung von $X \setminus U$ durch

$$\{A \in \mathcal{L}(H) : \sigma(A) \subset S_1 \cup S_2, |\sigma(A) \cap S_2| = n\}$$

Mit zu denen im zuvor betrachteten Fall ganz analogen Deformationen erhält man nun einen der Klasse \mathcal{W} angehörenden Teilraum von $\tilde{U}(n)$, so dass jedes Element dieses Raumes genau n Eigenwerte in $S_2 \cap S^1$ besitzt und dessen Spektrum zudem nur noch 1 beinhaltet. Mit einer nun offensichtlichen Deformationsretraktion ist schließlich $X \setminus U$ sogar ein Deformationsretrakt dieses Raumes und folglich der Klasse \mathcal{W} angehörend.

Die beiden verbleibenden Fälle gestalten sich als einfacher, da nun offene Teilmengen des Raumes aller selbstadjungierter Operatoren bereits zu \mathcal{W} gehören⁴ und somit zur Definition von Umgebungen und Homotopien einfache Teilmengen der reellen Achse gewählt werden können. Hierbei wird in einem Fall wieder 4.2.25 benötigt.

- Es bleibt abschließend zu zeigen, dass die Inklusionen $\iota : A \hookrightarrow \bar{U}$ und $\iota : A' \hookrightarrow \bar{U}'$ Homotopieäquivalenzen sind.

Man betrachte hierzu die Inklusion $\iota : A \hookrightarrow \bar{U}$ und wähle eine Deformation $H : I \times S^1 \rightarrow S^1$, die den Halbkreis $\{e^{i\Theta} \in S^1 : \Theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$ auf $1 \in S^1$ deformiert. Diese Abbildung induziert nun eine Homotopie $H : I \times \bar{U} \rightarrow \bar{U}$, die alle Voraussetzungen aus 4.2.25 erfüllt. Im Fall $\iota : A' \hookrightarrow \bar{U}'$ wähle man dementsprechend eine Homotopie $H : I \times [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, die $[-1, -\frac{1}{2}]$ auf -1 und $[\frac{1}{2}, 1]$ auf 1 deformiert. Die Behauptung folgt jetzt ebenfalls aus 4.2.25.

Damit ist abschließend das Resultat 4.2.12 bewiesen. Für den Spektralfluss von besonderer Bedeutung ist nun die Fundamentalgruppe des Raumes $\hat{\mathcal{F}}_*$, die sich nun aus den am Anfang des Kapitels betrachteten Homotopien, 4.2.12 und 4.2.8 unmittelbar ergibt.

4.2.26 Folgerung. *Es ist $\pi_k(\hat{\mathcal{F}}_*) \cong \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \mathbb{Z}, & k \text{ ungerade} \end{cases}$*

Zur Berechnung von $\pi_k(\hat{\mathcal{F}}_*)$ im reellen Fall

Für einen separablen reellen Hilbertraum findet man in [AS69, S. 7] die folgende Aussage.

4.2.27 Satz. *$\hat{\mathcal{F}}_*$ ist ein klassifizierender Raum für den Funktor KO^{-7} .*

⁴Dies wurde im Beweis zu 4.2.15 begründet

Diese Aussage wird letztlich durch weitere Fortführung der bisherigen Betrachtungen dieses Abschnittes gewonnen. Zwar ist das zentrale Resultat aus [AS69] hier bewiesen, für das obige Ergebnis ist aber die Kenntnis des gesamten Artikels notwendig. Daher wird dieses ohne Beweis zitiert. Als unmittelbare Konsequenz erhält man die Homotopiegruppen von $\hat{\mathcal{F}}_*$.

$$\pi_k(\hat{\mathcal{F}}_*) = [(S^k, *), (\hat{\mathcal{F}}_*, *)] \cong KO^{-7}(S^k) \cong KO(S^{k+7}) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } k \equiv 0 \pmod{8} \\ \mathbb{Z} & \text{für } k \equiv 1 \pmod{8} \\ \mathbb{Z}/2 & \text{für } k \equiv 2 \pmod{8} \\ \mathbb{Z}/2 & \text{für } k \equiv 3 \pmod{8} \\ 0 & \text{für } k \equiv 4 \pmod{8} \\ \mathbb{Z} & \text{für } k \equiv 5 \pmod{8} \\ 0 & \text{für } k \equiv 6 \pmod{8} \\ 0 & \text{für } k \equiv 7 \pmod{8} \end{cases}$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit ist lediglich die unendliche Zyklizität der Fundamentalgruppe dieses Raumes von Bedeutung.

4.3 Konstruktion des Spektralflusses

In diesem Abschnitt wird die Definition des Spektralflusses aus dem Artikel [FPR99] dargestellt, der eine entscheidende Rolle im Morse Index Theorem in [MPP05] spielen wird. Demnach sind die hier präsentierten Resultate im Wesentlichen aus [FPR99] übernommen und nur geringfügigen Modifikationen unterzogen. Zunächst wird statt des komplexifizierten Dunford-Kalküls (vgl. 1.2.12) stets der hier dargelegte Funktionalkalkül und seine Stetigkeit aus 1.2.17, 1.2.18 verwendet. Desweiteren werden einige Resultate zur Anwendung in [MPP05] in etwas allgemeinerer Form als in [FPR99] benötigt, die dort lediglich mit Verweis auf [FPR99] verwendet werden.

Es sei von nun an wieder H ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Wie im vorigen Abschnitt erläutert besteht $\hat{\mathcal{F}}$ aus den drei Zusammenhangskomponenten $\hat{\mathcal{F}}_+$, $\hat{\mathcal{F}}_-$ und $\hat{\mathcal{F}}_*$. Für $T \in \hat{\mathcal{F}}$ und $M \in GL(H)$ ist auch $M^*TM \in \hat{\mathcal{F}}$ und man erhält eine Gruppenwirkung

$$\hat{\mathcal{F}} \times GL(H) \rightarrow \hat{\mathcal{F}}, (T, M) \mapsto M^*TM$$

die als **kogrediente Wirkung** bezeichnet werde. Wegen Kuipers Theorem 4.1.7 kann jedes M^*TM durch einen Weg in $\hat{\mathcal{F}}$ mit T verbunden werden und folglich schränkt sich die kogrediente Wirkung auf jeder Komponente von $\hat{\mathcal{F}}$ zu einer Gruppenwirkung ein.

Es sei an dieser Stelle an die Definition des Raumes der Basispunkte

$$\mathcal{J} = \{2P - id \in \mathcal{L}(H) : P \text{ Orthogonalprojektion, } \dim \ker P = \dim \operatorname{im} P = \infty\}$$

von $\hat{\mathcal{F}}_*$ erinnert, dessen Elemente bei der folgenden Definition des Spektralflusses eine entscheidende Rolle spielen. Desweiteren wurde in 4.2.17 die Kontrahierbarkeit dieses Raumes festgestellt.

4.3.1 Der relative Morse Index

4.3.1 Definition. Für Orthogonalprojektoren $P, Q \in \mathcal{L}(H)$ heißt das Paar (P, Q) **Fredholm**, falls

$$\dim(\operatorname{im} P \cap \ker Q), \dim(\operatorname{im} Q \cap \ker P) < \infty$$

Der **Index eines Fredholmpaares** ist definiert als

$$\operatorname{ind}(P, Q) = \dim(\operatorname{im} P \cap \ker Q) - \dim(\operatorname{im} Q \cap \ker P)$$

4.3.2 Bemerkung. Sind $P, Q \in \mathcal{L}(H)$ orthogonale Projektionen und $P - Q \in \mathcal{K}(H)$, so ist (P, Q) ein Fredholmpaar. Denn wegen der Abgeschlossenheit von $\operatorname{im} P \cap \ker Q$ und $\operatorname{im} Q \cap \ker P$ und $P - Q \upharpoonright_{\operatorname{im} P \cap \ker Q} = id_{\operatorname{im} P \cap \ker Q}$, $P - Q \upharpoonright_{\operatorname{im} Q \cap \ker P} = -id_{\operatorname{im} Q \cap \ker P}$ sind dies nach Voraussetzung kompakte Operatoren zwischen Banachräumen. Damit ist aber

$$\dim \operatorname{im} P \cap \ker Q, \dim \operatorname{im} Q \cap \ker P < \infty$$

4.3.3 Lemma. (P, Q) ist genau dann ein Fredholmpaar orthogonaler Projektionen, wenn

$$QP|_{\text{im } P} = Q|_{\text{im } P}: \text{im } P \rightarrow \text{im } Q$$

ein Fredholmoperator ist. Zudem ist $\text{ind}(P, Q) = \text{ind}(Q|_{\text{im } P})$.

Beweis. Es genügt die Identität $(Q(\text{im } P))^{\perp_{\text{im } Q}} = \text{im } Q \cap \ker P$ nachzuweisen.

Ist nun $x \in \text{im } Q$ mit $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in Q(\text{im } P)$, so ist

$$\langle Px, z \rangle = \langle PQx, z \rangle = \langle x, QPz \rangle = 0 \quad \forall z \in H$$

und folglich $x \in \ker P$.

Ist umgekehrt $x \in \text{im } Q \cap \ker P$ so ist $\langle x, QPz \rangle = \langle PQx, z \rangle = 0$ für alle $z \in H$ und somit $x \in (Q(\text{im } P))^{\perp_{\text{im } Q}}$. \square

4.3.4 Lemma. Ist (P, Q) ein Fredholmpaar orthogonaler Projektionen und $R \in \mathcal{L}(H)$ orthogonal, so gilt $\text{ind}(P, Q) = \text{ind}(R^{-1}PR, R^{-1}QR)$.

Beweis. Definiere die Orthogonalprojektionen $P' = R^{-1}PR, Q' = R^{-1}QR$. Es ist $R: H \rightarrow H$ ein Isomorphismus mit $R(\ker P') = \ker P, R(\ker Q') = \ker Q, R(\text{im } P') = \text{im } P$ und $R(\text{im } Q') = \text{im } Q$. Da folglich

$$\begin{aligned} R(\text{im } P' \cap \ker Q') &= R(\text{im } P') \cap R(\ker Q') = \text{im } P \cap \ker Q \\ R(\text{im } Q' \cap \ker P') &= R(\text{im } Q') \cap R(\ker P') = \text{im } Q \cap \ker P \end{aligned}$$

ist $\text{ind}(P', Q') = \text{ind}(P, Q)$. \square

4.3.5 Lemma. Für einen Weg $\{(P_t, Q_t)\}_{t \in I}$ von Fredholmpaaren orthogonaler Projektionen ist $\text{ind}(P_t, Q_t)$ konstant.

Beweis. Wegen 4.3.3 ist für jedes Fredholmpaar orthogonaler Projektionen $\text{ind}(P, Q) = \text{ind}(Q|_{\text{im } P}: \text{im } P \rightarrow \text{im } Q)$. Für ein fest gewähltes $t_0 \in I$ betrachte man nun die Wege

$$A_t = (id - P_t) + P_{t_0}, \quad B_t = (id - Q_t) + Q_{t_0}, \quad t \in I$$

Da $A_{t_0}, B_{t_0} \in GL(H)$ existiert eine zusammenhängende Umgebung $N \subset I$ um t_0 , so dass $A_t, B_t \in GL(H)$ für alle $t \in N$. Damit sind aber

$$A_t|_{\text{im } P_t}: \text{im } P_t \rightarrow \text{im } P_{t_0} \quad \text{und} \quad B_t|_{\text{im } Q_t}: \text{im } Q_t \rightarrow \text{im } Q_{t_0}, \quad t \in I$$

Isomorphismen und folglich ist der Operator

$$B_t \circ Q_t \circ (A_t)^{-1}|_{\text{im } P_{t_0}}: \text{im } P_{t_0} \rightarrow \text{im } Q_{t_0}$$

ein Fredholmoperator mit

$$\text{ind}(B_t \circ Q_t \circ (A_t)^{-1}|_{\text{im } P_{t_0}}) = \text{ind}(Q_t|_{\text{im } P_t}) \quad \text{für alle } t \in N \quad (4.3.1)$$

Nun ist aber $B_t \circ Q_t \circ (A_t)^{-1} |_{\text{im } P_{t_0}} : \text{im } P_{t_0} \rightarrow \text{im } Q_{t_0}$ ein Weg von Fredholmoperatoren in $\mathcal{L}(\text{im } P_{t_0}, \text{im } Q_{t_0})$ und folglich ist der Fredholmindex dieses Weges konstant. Wegen (4.3.1) ist damit aber auch $\text{ind}(Q_t |_{\text{im } P_t}) = \text{ind}(P_t, Q_t)$ konstant für alle $t \in N$.

Insgesamt erhält man somit die lokale Konstanz von $\text{ind}(P_t, Q_t)$ auf $[a, b]$ und folglich ist $\text{ind}(P_t, Q_t)$ als konstant auf $[a, b]$ nachgewiesen. \square

Im nächsten Schritt soll nun der Begriff des Fredholm-paares auf eine Teilmenge der selbstadjungierten Operatoren übertragen werden. Hierzu sei für einen selbstadjungierten Operator $T \in \mathcal{S}(H)$ im Folgenden

$$E_-(T) = \chi_{(-\infty, 0)}(T), \quad E_+(T) = \chi_{(0, \infty)}(T)$$

4.3.6 Definition. Zwei Operatoren $S, T \in \mathcal{L}(H)$ heißen **Calkin-äquivalent**, falls

$$S - T \in \mathcal{K}(H)$$

4.3.7 Lemma. *Es seien $S, T \in GL(H)$ selbstadjungiert und Calkin-äquivalent. Dann sind auch die Projektionen $E_-(S)$ und $E_-(T)$ Calkin-Äquivalent.*

Beweis. Zunächst ist für jedes Polynom p der Operator $p(S) - p(T)$ kompakt, da er zu dem zweiseitigen von $S - T$ aufgespannten Ideal gehört⁵. Wegen der Dichtheit der Polynome in den stetigen Funktionen auf kompakten Intervallen und der Abgeschlossenheit der kompakten Operatoren ist damit $h(S) - h(T)$ für jede auf $\Sigma = \sigma(S) \cup \sigma(T)$ stetige Funktion kompakt.

Da nun 0 kein Häufungspunkt von Σ ist und $0 \notin \Sigma$, ist die Funktion $\chi_{(-\infty, 0)}$ stetig auf Σ und folglich

$$E_-(S) - E_-(T) = \chi_{(-\infty, 0)}(S) - \chi_{(-\infty, 0)}(T)$$

kompakt. \square

Es ist damit $(E_-(S), E_-(T))$ ein Fredholm-paar orthogonaler Projektionen und ermöglicht die folgende Definition.

4.3.8 Definition. Für ein Paar (S, T) Calkin-äquivalenter selbstadjungierter Isomorphismen ist der **relative Morse Index** definiert durch

$$\mu_{rel}(S, T) = \text{ind}(E_-(S), E_-(T))$$

Für einen selbstadjungierten Operator $T \in \mathcal{S}(H)$ ist der **Morse Index** des Operators als Morse Index der zugehörigen Bilinearform $B = \langle T \cdot, \cdot \rangle$ definiert. Damit ist $i_{Morse}(T) = \text{rk}(E_-(T))$.

4.3.9 Lemma. *Ist $K \in \mathcal{L}(H)$ kompakt und selbstadjungiert, sowie $S \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und positiv definit mit $S + K \in GL(H)$, so ist $\mu_{rel}(S + K, S) = i_{Morse}(S + K)$*

⁵Man überzeugt sich hierzu mühelos von der Beziehung $S^n - T^n = (S - T)S^{n-1} + T^{n-1}(S - T) - T(T^{n-2} - S^{n-2})S$, $n \geq 2$.

Beweis.

$$\begin{aligned}\mu_{rel}(S + K, S) &= \dim(\text{im}(E_-(S + K)) \cap \ker(E_-(S))) - \dim(\ker(E_-(S + K)) \cap \text{im}(E_-(S))) \\ &= \text{rk}(E_-(S + K)) = i_{Morse}(S + K)\end{aligned}$$

□

4.3.10 Lemma. *Die Abbildung*

$$\mathcal{S}(H) \cap GL(H) \ni T \mapsto E_-(T) \in \mathcal{L}(H)$$

ist stetig.

Beweis. Es sei $T_0 \in \mathcal{S}(H) \cap GL(H)$ und $\varepsilon > 0$ mit $\sigma(T_0) \cap [-\varepsilon, \varepsilon] = \emptyset$. Wegen 1.2.14 existiert ein $\delta > 0$, so dass $\sigma(T) \cap [-\varepsilon, \varepsilon] = \emptyset$ für alle $T \in U(T_0) = \{T \in \mathcal{S}(H): \|T - T_0\| < \delta\}$.

Man wähle nun eine stetige Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mit } f(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-\infty, -\varepsilon] \\ 0, & t \in [\varepsilon, \infty) \end{cases}$$

Wegen 1.2.17 ist die Abbildung $\mathcal{S}(H) \ni T \mapsto f(T)$ stetig. Da aber $f(T) = E_-(T)$ für alle $T \in U(T_0)$ ist $T \mapsto E_-(T)$ auf $U(T_0)$ stetig. □

4.3.11 Folgerung. *Für einen Weg $\{(T_t, S_t)\}_{t \in I}$ Calkin-äquivalenter selbstadjungierter Isomorphismen ist $\mu_{rel}(T_t, S_t)$ konstant.*

Beweis. Mit 4.3.10 ist $\{(E_-(T_t), E_-(S_t))\}_{t \in I}$ ein Weg von Fredholmpaaren orthogonaler Projektionen und daher wegen 4.3.5

$$\mu_{rel}(T_t, S_t) = \text{ind}(E_-(T_t), E_-(S_t))$$

konstant. □

Für einen selbstadjungierten Isomorphismus $T \in GL(H)$ und $U \in \mathcal{O}(H_1, H)$ orthogonal lässt sich leicht zeigen, dass $E_-(U^{-1}TU) = U^{-1}E_-(T)U$. Damit ist der relative Morse Index eines Paares Calkin-äquivalenter selbstadjungierter Isomorphismen wie zu erwarten eine orthogonale Invariante. Die für den später zu definierenden Spektralfluss wichtige Beobachtung ist nun aber, dass der relative Morse Index sogar invariant unter der kogredienten Wirkung ist.

4.3.12 Satz. *Es seien S, T Calkin-äquivalente selbstadjungierte Isomorphismen und H_1 ein weiterer Hilbertraum. Dann ist für jedes $R \in GL(H_1, H)$*

$$\mu_{rel}(S, T) = \mu_{rel}(R^*SR, R^*TR)$$

Beweis. Für ein beliebiges $R \in GL(H_1, H)$ ist R^*R selbstadjungiert und positiv definit. Damit existiert $\sqrt{R^*R}$ und ist ebenfalls selbstadjungiert und positiv definit, also insbesondere ein Isomorphismus. Man definiere nun $U = R(\sqrt{R^*R})^{-1} \in GL(H_1, H)$. Dann ist $U \in \mathcal{O}(H)$ orthogonal und man hat eine Polarzerlegung $R = U\sqrt{R^*R}$ von R als Produkt eines orthogonalen und eines selbstadjungierten Operators.

Der Operator $(1-t)\sqrt{R^*R} + t \cdot id$ ist für jedes $t \in [0, 1]$ selbstadjungiert und zudem positiv definit, also insbesondere ein Isomorphismus. Definiert man nun $R_t = U(1-t)\sqrt{R^*R} + t \cdot id$ für $t \in [0, 1]$, so ist $R_0 = R, R_1 = U$ und $(R_t^*SR_t, R_t^*TR_t)$ ein Weg von Paaren Calkin-äquivalenter selbstadjungierter Isomorphismen. Man erhält nun mit der oben erwähnten orthogonalen Invarianz und 4.3.5

$$\begin{aligned} \mu_{rel}(R^*SR, R^*TR) &= \mu_{rel}(R_0^*SR_0, R_0^*TR_0) = \mu_{rel}(R_1^*SR_1, R_1^*TR_1) \\ &= \mu_{rel}(U^*SU, U^*TU) = \mu_{rel}(S, T) \end{aligned}$$

□

4.3.13 Lemma. *Für Calkin-äquivalente selbstadjungierte Isomorphismen S, T, R ist*

$$\mu_{rel}(S, T) = \mu_{rel}(S, R) + \mu_{rel}(R, T)$$

Beweis. Zunächst ist wegen 4.3.3

$$\begin{aligned} \mu_{rel}(S, T) &= \text{ind}(E_-(T) |_{\text{im}(E_-(S))}: \text{im}(E_-(S)) \rightarrow \text{im}(E_-(T))) \\ \mu_{rel}(S, R) &= \text{ind}(E_-(R) |_{\text{im}(E_-(S))}: \text{im}(E_-(S)) \rightarrow \text{im}(E_-(R))) \\ \mu_{rel}(R, T) &= \text{ind}(E_-(T) |_{\text{im}(E_-(R))}: \text{im}(E_-(R)) \rightarrow \text{im}(E_-(T))) \end{aligned}$$

Nun ist

$$E_-(T) |_{\text{im}(E_-(S))} - E_-(T) |_{\text{im}(E_-(R))} E_-(R) |_{\text{im}(E_-(S))} = E_-(T)(id - E_-(R)) |_{\text{im}(E_-(S))}$$

und da nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} E_-(T)(id - E_-(R)) &= E_-(T)(E_-(T) + (id - E_-(T)) - E_-(R)) \\ &= E_-(T)(E_-(T) - E_-(R)) \in \mathcal{K}(H) \end{aligned}$$

haben die Fredholmoperatoren

$$\begin{aligned} E_-(T) |_{\text{im}(E_-(S))} &\in \mathcal{L}(\text{im}(E_-(S)), \text{im}(E_-(T))) \text{ und} \\ E_-(T) |_{\text{im}(E_-(R))} E_-(R) |_{\text{im}(E_-(S))} &\in \mathcal{L}(\text{im}(E_-(S)), \text{im}(E_-(T))) \end{aligned}$$

den gleichen Index. Damit ist

$$\begin{aligned} \mu_{rel}(S, T) &= \text{ind}(E_-(T) |_{\text{im}(E_-(S))}) = \text{ind}(E_-(T) |_{\text{im}(E_-(R))} E_-(R) |_{\text{im}(E_-(S))}) \\ &= \text{ind}(E_-(T) |_{\text{im}(E_-(R))}) + \text{ind}(E_-(R) |_{\text{im}(E_-(S))}) \\ &= \mu_{rel}(R, T) + \mu_{rel}(S, R) \end{aligned}$$

□

4.3.2 Kogrediente Parametrix

4.3.14 Definition. Es sei Λ ein topologischer Raum, $L : \Lambda \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ stetig und $J \in \mathcal{J}$. Eine **kogrediente Parametrix** für L relativ zu J ist eine stetige Abbildung $M : \Lambda \rightarrow GL(H)$, so dass für jedes $\lambda \in \Lambda$

$$M_\lambda^* L_\lambda M_\lambda = J + K_\lambda$$

wobei $K_\lambda \in \mathcal{K}(H)$ für alle $\lambda \in \Lambda$.

Das Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des folgenden Satzes.

4.3.15 Satz. Für einen parakompakten, kontrahierbaren Raum Λ und $J \in \mathcal{J}$ besitzt jeder Weg $L : \Lambda \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ eine kogrediente Parametrix relativ J .

Der Beweis des Resultates erfolgt in mehreren Schritten. Zunächst sollen einige Begriffe definiert und die Beweisidee erläutert werden.

Es bezeichne $\mathcal{K}_S(H) \subset \mathcal{L}(H)$ die Menge aller kompakten, selbstadjungierten Operatoren auf H . Man betrachte $\mathcal{G} = GL(H) \times \mathcal{K}_S(H)$ mit der Unterraumtopologie von $\mathcal{L}(H) \times \mathcal{L}(H)$ und definiere eine stetige Abbildung

$$\pi : \mathcal{G} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*, \quad \pi(M, K) = MJM^* + K$$

Hiermit ist die Aussage 4.3.15 bewiesen, sofern gezeigt werden kann, dass zu jeder Abbildung $L : \Lambda \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ ein Lift $\alpha : \Lambda \rightarrow \mathcal{G}$ existiert, man also stets ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{G} \\ & \nearrow \alpha & \downarrow \pi \\ \Lambda & \xrightarrow{L} & \hat{\mathcal{F}}_* \end{array}$$

erhält. Mit dem folgenden allgemeinen Resultat erhält man nun die Idee des Beweises.

4.3.16 Lemma. Es sei $p : E \rightarrow B$ ein Faserbündel und Λ ein parakompakter und kontrahierbarer topologischer Raum. Dann besitzt jede Abbildung $f : \Lambda \rightarrow B$ einen Lift $\tilde{f} : \Lambda \rightarrow E$.

Beweis. Man betrachte das Pullbackbündel

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\pi_2} & E \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow p \\ \Lambda & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Mit der Definition von π_2 als faserweise Identität erhält man aus jedem globalen Schnitt $s : \Lambda \rightarrow f^*E$ des Pullbackbündels mit $\tilde{f} = \pi_2 \circ s$ einen Lift⁶ der Abbildung $f : \Lambda \rightarrow B$. Nun ist aber

⁶Ebenso erhält man aus einem Lift auch stets einen globalen Schnitt des Pullbackbündels. Dies ist hier aber unbedeutend.

unter den vorausgesetzten Eigenschaften der Topologie von Λ jedes Bündel über Λ trivial und folglich existiert für jedes f ein globaler Schnitt $s : \Lambda \rightarrow f^*E$. \square

Der Beweis von 4.3.15 reduziert sich nun auf den Nachweis, dass $\pi : \mathcal{G} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ ein Faserbündel definiert.

Zunächst soll hierfür \mathcal{G} genauer betrachtet werden.

4.3.17 Lemma. *Mit*

$$g \cdot \bar{g} = (M\bar{M}, K + M\bar{K}M^*), \quad g = (M, K), \bar{g} = (\bar{M}, \bar{K}) \in \mathcal{G}$$

ist \mathcal{G} eine topologische Gruppe.

Beweis. Definiere $e = (id, 0)$ und $g^{-1} = (M^{-1}, -M^{-1}K(M^{-1})^*)$ für $g = (M, K)$. \square

Zudem wirkt diese Gruppe auf $\hat{\mathcal{F}}_*$.

4.3.18 Lemma. *Durch*

$$\tau : \mathcal{G} \times \hat{\mathcal{F}}_* \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*, \quad \tau(g, L) = \tau_g(L) = MLM^* + K, \quad g = (M, K) \in \mathcal{G}$$

ist eine Gruppenwirkung gegeben.

Beweis. Die Stetigkeit der Abbildung ist unmittelbar einsichtig.

Es ist offenbar $\tau_e(L) = L$ für alle $L \in \hat{\mathcal{F}}_*$. Sind $g = (M, K), \bar{g} = (\bar{M}, \bar{K}) \in \mathcal{G}$ und $L \in \hat{\mathcal{F}}_*$, so ist

$$\begin{aligned} \tau_{g\bar{g}}(L) &= M\bar{M}L\bar{M}^*M^* + K + M\bar{K}M^* \\ &= \tau_g(\bar{M}L\bar{M}^* + \bar{K}) = \tau_g(\tau_{\bar{g}}(L)) \end{aligned}$$

\square

Aus den Definitionen erhält man $\pi(g) = \tau_g(J)$ für jedes $g \in \mathcal{G}$. Damit ist

$$\tau_g(\pi(h)) = \tau_g(\tau_h(J)) = \tau_{gh}(J) = \pi(gh), \quad g, h \in \mathcal{G}$$

und folglich ist $\pi : \mathcal{G} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ eine äquivariante Abbildung zwischen \mathcal{G} -Räumen, wobei \mathcal{G} mit der natürlichen Wirkung auf sich selbst versehen sein möge.

Mit diesen weiteren Strukturen soll jetzt der Nachweis der definierenden Eigenschaften eines Faserbündels für $\pi : \mathcal{G} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ angegangen werden. Neben der lokalen Trivialität ist insbesondere auch zu zeigen, dass die Abbildung π überhaupt surjektiv ist. Aus der Methodik des Beweises erweist es sich allerdings als nützlich zunächst die lokale Trivialität um J nachzuweisen.

4.3.19 Lemma. *Es existiert eine Umgebung $U \subset \hat{\mathcal{F}}_*$ um J und ein Schnitt $\sigma : U \rightarrow \mathcal{G}$ von π .*

Beweis. Es sei $U \subset \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)$ eine offene Umgebung von J in $\hat{\mathcal{F}}_*$. Wegen 4.3.10 sind die Abbildungen $U \ni T \mapsto E_-(T) \in \mathcal{L}(H)$ und $U \ni T \mapsto E_+(T) \in \mathcal{L}(H)$ stetig. Es sei zudem U so klein gewählt, dass für alle $T \in U$ die Abbildung

$$E_+(T) \circ E_+(J) + E_-(T) \circ E_-(J) : H \rightarrow H$$

ein Isomorphismus ist⁷. Damit sind aber auch für jedes $T \in U$ die Abbildungen

$$\begin{aligned} E_+(T) \big|_{\text{im } E_+(J)} : \text{im } E_+(J) &\rightarrow \text{im } E_+(T) \\ E_-(T) \big|_{\text{im } E_-(J)} : \text{im } E_-(J) &\rightarrow \text{im } E_-(T) \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Isomorphismen.

Man betrachte nun für ein festes $T \in U$ die Bilinearform

$$B(T) : \text{im } E_+(J) \times \text{im } E_+(J) \rightarrow \mathbb{R}, \quad B(T)(u, v) = \langle TE_+(T)u, E_+(T)v \rangle$$

Diese ist offenbar stetig, symmetrisch und wegen $\sigma(T \big|_{\text{im } E_+(T)}) \in (0, \infty)$ positiv definit. Mit dem Rieszschen Darstellungssatz existiert folglich ein selbstadjungierter und positiv definierter Operator $A_+(T) \in GL(\text{im } E_+(J))$, so dass

$$B(T)(u, v) = \langle A_+(T)u, v \rangle \quad \forall u, v \in \text{im } E_+(J)$$

Mit $S_+(T) := A_+(T)^{-\frac{1}{2}}$ ist

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle A_+(T)^{-1}A_+(T)u, v \rangle = \langle S_+(T)A_+(T)u, S_+(T)v \rangle \\ &= \langle A_+(T)S_+(T)u, S_+(T)v \rangle = \langle TE_+(T)S_+(T)u, E_+(T)S_+(T)v \rangle \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

für alle $u, v \in \text{im } E_+(J)$. Insbesondere liefert diese Konstruktion eine stetige Abbildung⁸ $S_+ : U \rightarrow GL(\text{im } E_+(J))$. Wendet man dieselbe Konstruktion auf die stetige Bilinearform

$$B(T)(u, v) = \langle -TE_-(T)u, E_-(T)v \rangle, \quad u, v \in \text{im } E_-(J)$$

an, so erhält man analog eine stetige Abbildung $S_- : U \rightarrow GL(\text{im } E_-(J))$ mit

$$-\langle u, v \rangle = \langle TE_-(T)S_-(T)u, E_-(T)S_-(T)v \rangle \quad (4.3.4)$$

für alle $u, v \in \text{im } E_-(J)$.

Durch

$$S(T) = P_+(T) \circ S_+(T) \circ P_+(J) - P_-(T) \circ S_-(T) \circ P_-(J), \quad T \in U$$

⁷Man beachte $E_+(J) \circ E_+(J) + E_-(J) \circ E_-(J) = id \in GL(H)$

⁸Eine Begründung für die sogar vorliegende Glattheit dieser Abbildung ist im Beweis von 2.3.18 zu finden.

ist insgesamt eine stetige Abbildung $S : U \rightarrow GL(H)$ gegeben. Unter Verwendung von (4.3.3) und (4.3.4) erhält man

$$\begin{aligned}
\langle S(T)^*TS(T)u, v \rangle &= \langle TS(T)u, S(T)v \rangle \\
&= \langle TE_+(T)S_+(T)E_+(J)u, E_+(T)S_+(T)E_+(J)v \rangle \\
&\quad - \langle TE_+(T)S_+(T)E_+(J)u, E_-(T)S_-(T)E_-(J)v \rangle \\
&\quad - \langle TE_-(T)S_-(T)E_-(J)u, E_+(T)S_+(T)E_+(J)v \rangle \\
&\quad + \langle TE_-(T)S_-(T)E_-(J)u, E_-(T)S_-(T)E_-(J)v \rangle \\
&= \langle E_+(J)u, E_+(J)v \rangle - \langle E_-(J)u, E_-(J)v \rangle \\
&= \langle E_+(J)u, v \rangle - \langle E_-(J)u, v \rangle \\
&= \langle (E_+(J) - E_-(J))u, v \rangle = \langle Ju, v \rangle
\end{aligned}$$

für alle $u, v \in H$ und folglich ist

$$J = S(T)^*TS(T), \quad T \in U \quad (4.3.5)$$

Man definiere nun eine stetige Abbildung $\sigma : U \rightarrow \mathcal{G}$ durch

$$\sigma(T) = ((S(T)^{-1})^*, 0)$$

Damit ist für $T \in U$ mit (4.3.5)

$$(\pi \circ \sigma)(T) = (S(T)^{-1})^*JS(T)^{-1} = (S(T)^{-1})^*S(T)^*TS(T)S(T)^{-1} = T$$

und damit $\sigma : U \rightarrow \mathcal{G}$ ein Schnitt der Abbildung π . □

4.3.20 Lemma. $\pi : \mathcal{G} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ ist surjektiv.

Beweis. Es sei $S \in \hat{\mathcal{F}}_*$. Zu zeigen ist die Existenz eines $g = (M, K) \in \mathcal{G}$ mit $M^*JM + K = S$. Es sei hierfür $K \in \mathcal{K}_S(H)$ die Orthogonalprojektion auf $\ker S$. Damit ist $T = S + K \in GL(H)$ und mit $T \in \mathcal{S}(H) \cap GL(H)$ besteht gemäß 2.3.5 eine Zerlegung $H = \text{im } E_+(T) \oplus \text{im } E_-(T)$. Da je zwei separable unendlichdimensionale Hilberträume isometrisch isomorph sind, existiert nun ein topologischer Isomorphismus

$$A = A_+ \oplus A_- : \text{im } E_+(J) \oplus \text{im } E_-(J) \rightarrow \text{im } E_+(T) \oplus \text{im } E_-(T)$$

mit $A_+(\text{im } E_+(J)) = \text{im } E_+(T)$, $A_-(\text{im } E_-(J)) = \text{im } E_-(T)$. Der Beweis verläuft nun analog zu 4.3.19. Man ersetzt in (4.3.2) $E_+(T) |_{\text{im } E_+(J)}$ durch A_+ und $E_-(T) |_{\text{im } E_-(J)}$ durch A_- und erhält damit ein $M \in GL(H)$ mit $J = M^*TM$. Damit ist aber $S = (M^{-1})^*JM^{-1} - K$. □

Als unmittelbare Konsequenz aus den Definitionen der Wirkung τ und der Abbildung π erhält man nachstehendes Resultat.

4.3.21 Folgerung. Die Wirkung τ von \mathcal{G} auf $\hat{\mathcal{F}}_*$ ist transitiv.

Der Beweis von 4.3.15 kann nun durch folgende Aussage beendet werden.

4.3.22 Lemma. $\pi : \mathcal{G} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ ist die Projektion eines Faserbündels, wobei die Standardfaser durch die Isotropieuntergruppe von J in \mathcal{G} gegeben ist.

Beweis. Die Methode des Beweises ist mit den bisherigen Erkenntnissen wenig überraschend. Es bereitet wenig Schwierigkeiten eine lokale Trivialisierung in einer Umgebung von J anzugeben und die lokale Trivialität um einen beliebigen Punkt erhält man nun mittels Transport dieser Trivialisierung unter Verwendung der bereits als transitiv erkannten Wirkung τ .

Wegen 4.3.19 existiert zunächst eine offene Umgebung $U \subset \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)$ von J und ein lokaler Schnitt $\sigma : U \rightarrow \mathcal{G}$ von π . Man definiere nun eine stetige Abbildung $\eta : U \times \pi^{-1}(J) \rightarrow \pi^{-1}(U)$ durch

$$\eta(L, g) = \sigma(L) \cdot g$$

Es ist

$$\pi(\eta(L, G)) = \pi(\sigma(L) \cdot g) = \tau_{\sigma(L)}(\pi(g)) = \tau_{\sigma(L)}(J) = \pi(\sigma(L)) = L \quad \forall (L, g) \in U \times \pi^{-1}(J)$$

und somit $\pi \circ \eta = pr_1$. Desweiteren ist $\eta^{-1} : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \pi^{-1}(J)$ gegeben durch

$$\eta^{-1}(g) = (\pi(g), \sigma(\pi(g))^{-1} \cdot g)$$

da

$$\begin{aligned} (\eta \circ \eta^{-1})(g) &= \sigma(\pi(g))\sigma(\pi(g))^{-1} \cdot g = g \quad \forall g \in \pi^{-1}(U) \\ (\eta^{-1} \circ \eta)(L, g) &= (\pi(\sigma(L) \cdot g), ((\sigma \circ \pi)(\sigma(L) \cdot g))^{-1} \sigma(L) \cdot g) \\ &= (L, \sigma(L)^{-1} \sigma(L) \cdot g) = (L, g) \quad \forall (L, g) \in U \times \pi^{-1}(J) \end{aligned}$$

Damit ist aber η eine Trivialisierung über einer Umgebung von J .

Für den allgemeinen Fall transportiert man diese Trivialisierung mittels der transitiven Wirkung zu beliebigen Punkten.

Sei also $L_0 \in \hat{\mathcal{F}}_*$ beliebig gegeben. Mit 4.3.20 existiert ein $g_0 \in \mathcal{G}$ mit $\pi(g_0) = \tau_{g_0}(J) = L_0$. Damit ist $U' = \tau_{g_0}(U)$ eine Umgebung von L_0 und $\tau_{g_0} : U \rightarrow U'$ ist ein Homöomorphismus. Man definiere nun

$$\eta' : U' \times \pi^{-1}(J) \rightarrow \pi^{-1}(U'), \quad \eta'(L', g) = g_0 \cdot \sigma(\tau_{g_0}^{-1}(L')) \cdot g$$

Dann ist η' stetig und wegen

$$\pi(g_0 \sigma(\tau_{g_0}^{-1}(L')) \cdot g) = \tau_{g_0} \pi(\sigma(\tau_{g_0}^{-1}(L')) \cdot g) = g_0 \tau_{g_0}^{-1}(L') = L'$$

ist $\pi \circ \eta' = pr_1$. Nun ist $\eta'^{-1} : \pi^{-1}(U') \rightarrow U' \times \pi^{-1}(J)$ gegeben durch

$$\eta'^{-1}(g) = (\pi(g), (g_0 \sigma(\tau_{g_0}^{-1}(\pi(g))))^{-1} g)$$

denn es ist

$$\begin{aligned}
(\eta' \circ \eta'^{-1})(g) &= \eta'(\pi(g), (g_0 \sigma(\tau_{g_0^{-1}}(\pi(g))))^{-1} g) \\
&= g_0 \sigma(\tau_{g_0^{-1}}(\pi(g))) (g_0 \sigma(\tau_{g_0^{-1}}(\pi(g))))^{-1} g = g \quad \forall g \in \pi^{-1}(U') \\
(\eta'^{-1} \circ \eta')(L', g) &= \eta'^{-1}(g_0 \sigma(\tau_{g_0^{-1}}(L')) g) \\
&= (\pi(g_0 \sigma(\tau_{g_0^{-1}}(L')) g), (g_0 \sigma(\tau_{g_0^{-1}}(\pi(g_0 \sigma(\tau_{g_0^{-1}}(L')) g))))^{-1} g_0 \sigma(\tau_{g_0^{-1}}(L')) g) \\
&= (L', (g_0 \sigma(\tau_{g_0^{-1}}(L')))^{-1} g_0 \sigma(\tau_{g_0^{-1}}(L')) g) = (L', g) \quad \forall (L', g) \in U' \times \pi^{-1}(J)
\end{aligned}$$

□

4.3.23 Bemerkung. Ist in der Aussage von 4.3.15 der Raum Λ eine C^k -Mannigfaltigkeit und $L : \Lambda \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ ebenfalls C^k , so kann der Beweis dieser Aussage ohne große Mühe dahingehend verallgemeinert werden, dass auch die kogrediente Parametrix $M : \Lambda \rightarrow GL(H)$ als C^k -Abbildung erkannt werden kann. Denn zunächst ist \mathcal{G} eine unendlichdimensionale Liegruppe und das hier konstruierte Faserbündel $\pi : \mathcal{G} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ wird hiermit zu einem Hauptfaserbündel. Desweiteren stellt man bei einem Blick in die Beweise fest, dass alle konstruierten Abbildungen mit diesen Strukturen bereits glatt sind. Abschließend erhält man das Resultat, da unter den Voraussetzungen an Λ der Schnitt in 4.3.16 als C^k gewählt werden kann.

4.3.3 Definition des Spektralflusses und Eigenschaften

4.3.24 Definition. Es sei $L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ ein Weg mit invertierbaren Endpunkten. Dann ist der Spektralfluss von L definiert durch

$$\text{sf}(L, I) = \mu_{\text{rel}}(J + K(a), J + K(b))$$

wobei $J \in \mathcal{J}$ und $\{J + K_\lambda\}_{\lambda \in I}$ ein beliebiger Weg von kompakten Perturbationen von J ist, der kogredient zu L ist.

Wegen des letzten Abschnittes ist gesichert, dass stets eine solche Darstellung existiert. Es bleibt hingegen nachzuweisen, dass $\text{sf}(L)$ unabhängig von den getroffenen Wahlen ist. Hierzu soll nun eine Überlegung gemacht werden, die etwas allgemeiner als notwendig ist, hierfür aber im Folgenden hilfreich sein wird.

Es sei $J \in \mathcal{J}$ und $M : I \rightarrow GL(H)$ mit $M_\lambda^* L_\lambda M_\lambda = J + K_\lambda$. Desweiteren sei H_1 ein beliebiger weiterer Hilbertraum und $J' \in \mathcal{L}(H_1)$ mit $J' \in \mathcal{J}$, sowie $M' : I \rightarrow GL(H_1, H)$ mit $(M'_\lambda)^* L_\lambda M'_\lambda = J' + K'_\lambda$. Mit $N_\lambda = M_\lambda^{-1} M'_\lambda \in GL(H_1, H)$ ist nun

$$\begin{aligned}
N_\lambda^*(J + K_\lambda)N_\lambda &= (M'_\lambda)^*(M_\lambda^{-1})^* J M_\lambda^{-1} M'_\lambda + (M'_\lambda)^*(M_\lambda^{-1})^* K_\lambda M_\lambda^{-1} M'_\lambda \\
&= (M'_\lambda)^*(M_\lambda^{-1})^*(M_\lambda^* L_\lambda M_\lambda - K_\lambda) M_\lambda^{-1} M'_\lambda + (M'_\lambda)^*(M_\lambda^{-1})^* K_\lambda M_\lambda^{-1} M'_\lambda \\
&= (M'_\lambda)^* L_\lambda M'_\lambda = J' + K'_\lambda
\end{aligned}$$

Insbesondere ist $N_\lambda^* J N_\lambda = J' + \underbrace{K'_\lambda - N_\lambda^* K_\lambda N_\lambda}_{\in \mathcal{K}(H)}$ und damit

$$N_a^*(J + K_a)N_a - N_\lambda^*(J + K_b)N_\lambda \in \mathcal{K}(H) \text{ f\"ur jedes } \lambda \in I$$

also beide Operatoren stets Calkin-äquivalent.

Damit ist insbesondere

$$\{(N_a^*(J + K_a)N_a, N_\lambda^*(J + K_b)N_\lambda)\}_{\lambda \in I}$$

ein Weg von Paaren Calkin-äquivalenter selbstadjungierter Isomorphismen und man erhält mit 4.3.11

$$\begin{aligned} \mu_{rel}(J + K_a, J + K_b) &= \mu_{rel}(N_a^*(J + K_a)N_a, N_a^*(J + K_b)N_a) \\ &= \mu_{rel}(N_a^*(J + K_a)N_a, N_b^*(J + K_b)N_b) \\ &= \mu_{rel}(J' + K'_a, J' + K'_b) \end{aligned}$$

Betrachtet man nun lediglich den Fall $H = H_1$, so erhält man die Wohldefiniertheit der obigen Konstruktion.

Im Folgenden werden einige Eigenschaften des Spektralflusses bewiesen. Bevor hiermit begonnen wird sei zunächst auf das unmittelbar aus der Definition folgende Verhalten des Spektralflusses unter orientierungserhaltenden und orientierungsumkehrenden Umparametrisierungen des betrachteten Weges hingewiesen.

4.3.25 Lemma. *Ist $L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)$, so ist $\text{sf}(L, I) = 0$.*

Beweis. Sei $M : I \rightarrow GL(H)$ mit $M_\lambda^* L_\lambda M_\lambda = J + K_\lambda$ für alle $\lambda \in I$. Dann ist

$$\{(J + K_a, J + K_\lambda)\}_{\lambda \in I}$$

ein Weg von Paaren Calkin-äquivalenter selbstadjungierter Isomorphismen und folglich ist mit 4.3.11

$$\text{sf}(L, I) = \mu_{rel}(J + K_a, J + K_b) = \mu_{rel}(J + K_a, J + K_a) = 0$$

□

Die Allgemeinheit der Aussage des folgenden Lemmas ist für die später zu behandelnden Geodäten von entscheidender Bedeutung.

4.3.26 Lemma. *Sei $L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ mit $L_a, L_b \in GL(H)$ und $M : I \rightarrow GL(H_1, H)$. Dann ist*

$$\text{sf}(L, I) = \text{sf}(M^* L M, I)$$

Beweis. Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus den Überlegungen zur Wohldefiniertheit des Spektralflusses: Ist $\tilde{M} : I \rightarrow GL(H_1)$ mit

$$(M'_\lambda)^* M'_\lambda L_\lambda M'_\lambda = J' + K'_\lambda$$

Dann ist $W : I \rightarrow GL(H_1, H)$ definiert durch $W_\lambda = M_\lambda \tilde{M}_\lambda$ ein Weg mit $W_\lambda^* L_\lambda W_\lambda = J' + K'_\lambda$ und aus den Überlegungen zur Wohldefiniertheit des Spektralflusses folgt $\text{sf}(L, I) = \text{sf}(M^* L M, I)$. \square

4.3.27 Lemma. *Es sei $L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ mit $L_a, L_b \in GL(H)$, so dass $L_\lambda - L_a \in \mathcal{K}(H)$ für alle $\lambda \in I$. Dann ist*

$$\text{sf}(L, I) = \mu_{\text{rel}}(L_a, L_b) = \dim(\text{im}(E_-(L_a)) \cap \ker(E_-(L_b))) - \dim(\text{im}(E_-(L_b)) \cap \ker(E_-(L_a)))$$

Beweis. Es ist $L_\lambda = A + K_\lambda$, wobei $A \in \hat{\mathcal{F}}_*$ und $K_\lambda \in \mathcal{K}(H)$ für alle $\lambda \in I$. Für den konstanten Weg A existiert nun eine konstante kogrediente Parametrix $M \in GL(H)$. Damit ist aber der konstante Weg $M_\lambda = M$ eine kogrediente Parametrix für $L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}$ und man erhält mit 4.3.12

$$\text{sf}(L, I) = \mu_{\text{rel}}(M^* L_a M, M^* L_b M) = \mu_{\text{rel}}(L_a, L_b)$$

\square

4.3.28 Lemma. *Für $L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ mit $L_a, L_b, L_c \in GL(H)$ ist*

$$\text{sf}(L, [a, b]) = \text{sf}(L, [a, c]) + \text{sf}(L, [c, b])$$

Beweis. Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus 4.3.13. \square

4.3.29 Lemma. *Es sei $H : [0, 1] \times I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ eine Homotopie mit $H(s, a), H(s, b) \in GL(H)$ für alle $s \in [0, 1]$. Dann ist $\text{sf}(H(s, \cdot))$ konstant.*

Beweis. Es sei $J \in \mathcal{J}$ gewählt. Wegen 4.3.15 und $\Lambda = [0, 1] \times I$ parakompakt und zusammenziehbar existiert nun ein Weg $M : [0, 1] \times I \rightarrow GL(H)$ mit

$$M_{(s,\lambda)}^* H_{(s,\lambda)} M_{(s,\lambda)} = J + K_{(s,\lambda)} \quad \text{für alle } (s, \lambda) \in \Lambda$$

Damit ist für jedes $s \in [0, 1]$

$$\text{sf}(H_s, I) = \mu_{\text{rel}}(M_{(s,a)}^* H_{(s,a)} M_{(s,a)}, M_{(s,b)}^* H_{(s,b)} M_{(s,b)})$$

Die Behauptung folgt mit 4.3.11, da unter der Voraussetzung $H(s, a), H(s, b) \in GL(H)$

$$\{(M_{(s,a)}^* H_{(s,a)} M_{(s,a)}, M_{(s,b)}^* H_{(s,b)} M_{(s,b)})\}_{s \in [0,1]}$$

ein Weg von Paaren Calkin-äquivalenter selbstadjungierter Isomorphismen ist. \square

4.3.30 Lemma. *Es sei $H : [0, 1] \times I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ mit $H(0, a), H(0, b), H(1, a), H(1, b) \in GL(H)$ und $H(\cdot, a), H(\cdot, b)$ kogredient. Dann ist $\text{sf}(H_0, I) = \text{sf}(H_1, I)$.*

Beweis. Wie in dem Beweis von 4.3.29 wähle man $J \in \mathcal{J}$ und $M : [0, 1] \times I \rightarrow GL(H)$ mit $M_{(s,\lambda)}^* H_{(s,\lambda)} M_{(s,\lambda)} = J + K_{(s,\lambda)}$. Da nach Voraussetzung die Wege $H(\cdot, a)$ und $H(\cdot, b)$ kogredient sind und Kogredienz eine Äquivalenzrelation ist, sind die Wege $M_{(s,a)}^* H_{(s,a)} M_{(s,a)} = J + K_{(s,a)}$ und $M_{(s,b)}^* H_{(s,b)} M_{(s,b)} = J + K_{(s,b)}$ kogrediente kompakte Perturbationen von J parametrisiert durch $[0, 1]$ und beide haben nach Voraussetzung invertierbare Endpunkte. Mit 4.3.26 erhält man

$$\text{sf}(M_{(\cdot,a)}^* H_{(\cdot,a)} M_{(\cdot,a)}, [0, 1]) = \text{sf}(M_{(\cdot,b)}^* H_{(\cdot,b)} M_{(\cdot,b)}, [0, 1])$$

und damit

$$\mu_{\text{rel}}(J + K_{(0,a)}, J + K_{(1,a)}) = \mu_{\text{rel}}(J + K_{(0,b)}, J + K_{(1,b)})$$

Mit 4.3.13 erhält man daraus

$$\begin{aligned} & \mu_{\text{rel}}(J + K_{(0,a)}, J + K_{(0,b)}) + \mu_{\text{rel}}(J + K_{(0,b)}, J + K_{(1,a)}) \\ &= \mu_{\text{rel}}(J + K_{(0,b)}, J + K_{(1,a)}) + \mu_{\text{rel}}(J + K_{(1,a)}, J + K_{(1,b)}) \end{aligned}$$

und folglich

$$\mu_{\text{rel}}(J + K_{(0,a)}, J + K_{(0,b)}) = \mu_{\text{rel}}(J + K_{(1,a)}, J + K_{(1,b)})$$

also $\text{sf}(H(0, \cdot), I) = \text{sf}(H(1, \cdot), I)$. □

Von besonderer Bedeutung ist die Möglichkeit des Verzichts auf invertierbare Endpunkte bei geschlossenen Wegen. Ist $L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ mit $L_a = L_b$, so existiert zunächst mit der Orthogonalprojektion auf $\ker L_a$ ein kompakter selbstadjungierter Operator K mit $L_a + K = L_b + K \in GL(H)$ und folglich kann für $L_\lambda + K$ der Spektralfluss berechnet werden. Dieses Vorgehen ist zudem unabhängig von der Wahl des Operators K . Sind nämlich $K, K' \in \mathcal{K}(H)$ zwei selbstadjungierte Operatoren mit $L_a + K, L_a + K' \in GL(H)$, so betrachte man die Homotopie $H : [0, 1] \times I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ mit $H(s, \lambda) = L_\lambda + sK' + (1 - s)K$. Dann ist $H(0, \lambda) = L_\lambda + K$, $H(1, \lambda) = L_\lambda + K'$ und beide Wege haben invertierbare Endpunkte. Da zudem $H(s, a) = H(s, b)$ für alle $s \in [0, 1]$ ist $\text{sf}(L + K, I) = \text{sf}(L + K', I)$ wegen des vorhergehenden Lemmas. Es ist also folgende Definition sinnvoll.

4.3.31 Definition. Sei $L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ mit $L_a = L_b$. Man definiert $\text{sf}(L, I) = \text{sf}(L + K, I)$, wobei $K \in \mathcal{K}_S(H)$ mit $L_a + K = L_b + K \in GL(H)$.

Der Spektralfluss erweist sich nun als invariant unter freien Homotopien geschlossener Wege.

4.3.32 Lemma. *Es sei $H : [0, 1] \times I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ eine Homotopie mit $H(s, a) = H(s, b)$ für alle $s \in [0, 1]$. Dann ist*

$$\text{sf}(H(0, \cdot), I) = \text{sf}(H(1, \cdot), I)$$

Beweis. Der entscheidende Schritt des Beweises ist der Nachweis der Existenz eines selbstadjungierten Operators $K' \in \mathcal{K}(H)$ mit

$$H(0, a) + K', H(1, a) + K' \in GL(H)$$

Hierfür sei P die Orthogonalprojektion auf $\ker H(0, a)$ und Q die Orthogonalprojektion auf $\ker(H(1, a) + P)$, so dass insbesondere $H(0, a) + P \in GL(H)$. Man definiere $K' = P + \varepsilon Q \in \mathcal{K}_S(H)$. Dann ist $\ker(H(1, a) + P + \varepsilon Q) = \{0\}$ und da $H(1, a) + P + \varepsilon Q$ ein Fredholmoperator vom Index 0 ist, erhält man aus der Fredholm-Alternative $H(1, a) + K' = H(1, a) + P + \varepsilon Q \in GL(H)$. Desweiteren ist

$$\|H(0, a) + K' - \underbrace{(H(0, a) + P)}_{\in GL(H)}\| = |\varepsilon| \|Q\|$$

und wegen der Offenheit von $GL(H) \subset \mathcal{L}(H)$ ist insgesamt für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein

$$H(1, a) + K', H(0, a) + K' \in GL(H)$$

Man betrachte nun die Homotopie $H(s, \lambda) + K'$. Dann sind $H(0, \lambda) + K', H(1, \lambda) + K'$ Wege in $\hat{\mathcal{F}}_*$ mit invertierbaren Endpunkten und es ist $H(s, a) + K' = H(s, b) + K'$ für alle $s \in [0, 1]$. Damit erhält man aus 4.3.30

$$\text{sf}(H(0, \cdot), I) = \text{sf}(H(0, \cdot) + K', I) = \text{sf}(H(1, \cdot) + K', I) = \text{sf}(H(1, \cdot), I)$$

□

4.3.33 Folgerung. Ist $L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ mit $L_a = L_b$ und K_λ ein Weg kompakter selbstadjungierter Operatoren mit $K_a = K_b$, so ist $\text{sf}(L + K, I) = \text{sf}(L, I)$.

Beweis. Die Aussage folgt mit der Homotopie $H(s, \lambda) = L_\lambda + sK_\lambda$ direkt aus 4.3.32. □

Bisher wurde lediglich der Spektralfluss für Wege in $\hat{\mathcal{F}}_*$ betrachtet. Es soll nun kurz erläutert werden, wie diese Definition auf Wege in $\hat{\mathcal{F}}_\pm$ übertragen werden kann.

Es sei hierfür $L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}(H)$ ein allgemeiner Weg selbstadjungierter Fredholmoperatoren. Man wähle einen unendlichdimensionalen separablen Hilbertraum H_0 und versehe

$$\hat{H} = H_0 \oplus H \oplus H_0$$

mit dem kanonischen Skalarprodukt das diese Summe orthogonal macht. Man betrachte nun den Operator

$$\hat{L} : \hat{H} \rightarrow \hat{H}, \hat{L}(u, v, w) = (u, Lv, -w)$$

Dieser Operator ist in $\hat{\mathcal{F}}_*$ und entsprechend erhält man zu jedem Weg $L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}$ einen zugehörigen Weg \hat{L} in $\hat{\mathcal{F}}_*$. Hat der ursprüngliche Weg L invertierbare Endpunkte, so gilt dies auch für \hat{L} und man kann

$$\text{sf}(L) = \text{sf}(\hat{L})$$

definieren. Zu dieser Definition sind nun zwei wichtige Beobachtungen zu machen.

- Im Fall eines Weges $L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ stimmt diese Definition mit der ursprünglichen überein.
- Alle bewiesenen Rechenregeln gelten auch für den allgemeinen Spektralfluss auf $\hat{\mathcal{F}}$.

Die Beweise dieser Aussagen erhält man ohne große Mühe aus der Definition des allgemeinen Spektralflusses, da die Operatoren auf den hinzugenommenen Komponenten konstant sind. Bedeutend ist nun, dass diese Definition des Spektralflusses sich gerade mit dem heuristischen Zugang deckt, der in der Einleitung dieses Kapitels gegeben wurde.

4.3.34 Lemma. *Es sei $L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_{\pm}$ mit $L_a, L_b \in GL(H)$. Dann ist*

$$\begin{aligned} \text{sf}(L, I) &= i_{\text{Morse}}(L_a) - i_{\text{Morse}}(L_b), \quad \text{falls } L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_+ \\ \text{sf}(L, I) &= i_{\text{Morse}}(-L_b) - i_{\text{Morse}}(-L_a), \quad \text{falls } L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_- \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis wird in drei Fällen behandelt:

Fall 1 $L(I)$ sei in einer einzelnen Calkin-Äquivalenzklasse enthalten.

Mit einem hinreichend kleinen $\varepsilon \in \rho(L_a) \cap (0, \infty)$ und einem hinreichend großen $s > 0$ ist der Operator $T = L_a + sE_{(-\infty, \varepsilon]}(L_a)$ positiv definit und Calkin-äquivalent zu L_a und folglich auch zu L_b . Mit 4.3.27, 4.3.13 und 4.3.9 erhält man hieraus

$$\begin{aligned} \text{sf}(L, I) &= \mu_{\text{rel}}(L_a, L_b) = \mu_{\text{rel}}(L_a, T) + \mu_{\text{rel}}(T, L_b) \\ &= \mu_{\text{rel}}(L_a, T) - \mu_{\text{rel}}(L_b, T) = i_{\text{Morse}}(L_a) - i_{\text{Morse}}(L_b) \end{aligned}$$

Fall 2 Es seien L_a, L_b positiv definit.

Da sowohl $\hat{\mathcal{F}}_+$ als auch die Menge der positiv definiten selbstadjungierten Operatoren konvex ist, definiert die Homotopie

$$sL_\lambda + (1-s)\text{id}, \quad 0 \leq s \leq 1, a \leq \lambda \leq b$$

eine Deformation von L auf einen konstanten Weg, wobei $H(s, a), H(s, b) \in GL(H)$ für alle $s \in [0, 1]$. Damit ist wegen 4.3.29 und 4.3.25 $\text{sf}(L, I) = 0$.

Fall 3 Für den allgemeinen Fall seien K_a, K_b kompakte, selbstadjungierte Operatoren, so dass $L_a + K_a$ und $L_b + K_b$ positiv definit sind. Man definiere

$$A_t = L_a + (1-t)K_a, \quad B_t = L_b + tK_b \quad \text{für } t \in [0, 1]$$

Dann ist der Weg $C = A * L * B$ in $\hat{\mathcal{F}}_+$ mit selbstadjungierten Endpunkten und man erhält aus dem zweiten Fall und 4.3.28

$$\text{sf}(A, [0, 1]) + \text{sf}(L, [a, b]) + \text{sf}(B, [0, 1]) = 0$$

Wegen des ersten Falles und der positiven Definitheit von $L_a + K_a, L_b + K_b$ erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \text{sf}(L, I) &= -\text{sf}(A, [0, 1]) - \text{sf}(B, [0, 1]) \\ &= -(i_{\text{Morse}}(L_a + K_a) - i_{\text{Morse}}(L_a)) - (i_{\text{Morse}}(L_b) - i_{\text{Morse}}(L_b + K_b)) \\ &= i_{\text{Morse}}(L_a) - i_{\text{Morse}}(L_b) \end{aligned}$$

Der Beweis der zweiten Aussage verläuft analog.

□

4.4 Eindeutigkeit des Spektralflusses

In diesem Abschnitt wird der soeben definierte Spektralfluss als Homomorphismus

$$\pi_1(\hat{\mathcal{F}}_*) \rightarrow \mathbb{Z}$$

betrachtet. Insbesondere wird sich diese Abbildung unter der in Abschnitt 4.2.2 zitierten unendlichen Zyklizität der betrachteten Fundamentalgruppe als bijektiv erweisen und hiermit zusätzlich den Beweis einer Aussage ermöglichen, die jede dem Spektralfluss "ähnliche" Abbildung als bereits mit diesem identisch nachweist. Die hier gegebene Darstellung ist überwiegend an [Les05, Chapter 5.2] angelehnt.

Für einen topologischen Raum X und einen Unterraum $Y \subset X$ bezeichne $\Omega(X, Y)$ die Menge aller Wege $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ mit $\gamma(a), \gamma(b) \in Y$. Zudem bezeichne $\tilde{\pi}_1(X, Y)$ die Menge aller Homotopieklassen in $\Omega(X, Y)$.

Für eine Abbildung $\mu : \Omega(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}$ betrachte man die folgenden Eigenschaften

(K) Ist für $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(X, Y)$ der Weg $\gamma_1 * \gamma_2$ definiert, so ist

$$\mu(\gamma_1 * \gamma_2) = \mu(\gamma_1) + \mu(\gamma_2)$$

(H) μ induziert eine wohldefinierte Abbildung $\mu : \tilde{\pi}_1(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}$.

4.4.1 Bemerkung. Erfüllt $\mu : \Omega(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}$ die Eigenschaften (K) und (H), so ist für jedes $x_0 \in Y$ die Einschränkung von μ auf $\Omega(X, x_0)$ ein Homomorphismus $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}$.

4.4.2 Bemerkung. Mit Erfüllung der Eigenschaft (H) folgt unmittelbar das Verhalten von μ unter Umparametrisierungen eines Weges in $\Omega(X, Y)$.

4.4.3 Lemma. *Eine Abbildung $\mu : \Omega(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}$ die der Bedingung (K) genügt erfüllt genau dann (H), wenn μ invariant unter Homotopien mit festen Endpunkten ist und $\mu(\gamma) = 0$ für jedes $\gamma \in \Omega(Y)$.*

Beweis. Existiert $\mu : \tilde{\pi}_1(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}$, so ist die Invarianz unter Homotopien mit festen Endpunkten trivial. Für die zweite Behauptung ist zunächst für jeden konstanten Weg $\mu(\gamma) = \mu(\gamma * \gamma) = \mu(\gamma) + \mu(\gamma)$, also $\mu(\gamma) = 0$. Ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ mit $\gamma([a, b]) \subset Y$ ist nun aber mit der Homotopie $\gamma_s(t) = \gamma(st)$ in $\Omega(X, Y)$ homotop zu dem konstanten Weg $\gamma(0)$.

Für die Umkehrung sei $H : I \times [a, b] \rightarrow X$ eine Homotopie mit $H(s, a), H(s, b) \in Y$ für alle $s \in [0, 1]$. Damit sind aber $H(\cdot, a), H(\cdot, b)$ Wege in Y und $H(0, \cdot)$ ist homotop zu

$$H(\cdot, a) * H(1, \cdot) * H(\cdot, b)^{-1}$$

mit festen Endpunkten. Man erhält damit unter den gegebenen Voraussetzungen

$$\mu(H(0, \cdot)) = \mu(H(\cdot, a)) + \mu(H(1, \cdot)) - \mu(H(\cdot, b)) = \mu(H(1, \cdot))$$

□

4.4.4 Lemma. $\hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)$ ist wegzusammenhängend.

Beweis. Es sei $J \in \mathcal{J}$ fest gewählt. Ist nun $T \in \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)$, so lehrt ein Blick in den Beweis von 4.3.20 die Existenz eines $M \in GL(H)$ mit $MTM^* = J$. Mit Kuipers Theorem 4.1.7 sei nun $\gamma : [0, 1] \rightarrow GL(H)$ ein Weg mit $\gamma(0) = M, \gamma(1) = id$. Dann ist

$$[0, 1] \ni t \mapsto \gamma(t)T\gamma(t)^* \in \hat{\mathcal{F}}_*$$

ein Weg in $\hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)$ der J und T verbindet. \square

Das folgende Resultat wird im Beweis der Eindeutigkeit des Spektralflusses benötigt, ist aber offenbar auch unabhängig hiervon bedeutsam.

4.4.5 Satz. Für jedes $J \in \mathcal{J}$ definiert der Spektralfluss einen Isomorphismus

$$sf : \pi_1(\hat{\mathcal{F}}_*, J) \rightarrow \mathbb{Z}$$

Beweis. Mit 4.3.28 und 4.3.29 ist $sf : \pi_1(\hat{\mathcal{F}}_*, J) \rightarrow \mathbb{Z}$ ein Homomorphismus. Zudem wurde im Abschnitt 4.2.2 auf die Isomorphie $\pi_1(\hat{\mathcal{F}}_*) \cong \mathbb{Z}$ hingewiesen. Folglich genügt es einen Weg $L : [a, b] \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ mit $L(a) = L(b) = J$ und Spektralfluss 1 anzugeben.

Nach Definition von \mathcal{J} ist

$$J = P_+ - P_- - P_0$$

wobei P_+, P_-, P_0 Orthogonalprojektionen sind mit $P_+ + P_- + P_0 = id$, $\dim \ker P_+ = \dim \ker P_- = \infty$ und $\dim \operatorname{im} P_0 = 1$. Man betrachte hiermit den Weg

$$L : [-1, 1] \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*, t \mapsto P_+ - P_- + tP_0$$

Damit ist $L_{-1} = J$ und man erhält aus 4.3.27

$$\begin{aligned} sf(L, [-1, 1]) &= \mu_{rel}(L_{-1}, L_1) \\ &= \dim(\operatorname{im}(E_-(L_{-1})) \cap \ker(E_-(L_1))) - \dim(\operatorname{im}(E_-(L_1)) \cap \ker(E_-(L_{-1}))) = 1 \end{aligned}$$

Mit $L_{-1}, L_1 \in GL(H)$ existiert wegen 4.4.4 ein Weg in $\hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)$ von L_1 nach L_{-1} . Dieser Weg hat wegen 4.3.25 Spektralfluss 0 und man erhält mit 4.3.28 durch Aneinanderhängen beider Wege einen geschlossenen Weg mit Spektralfluss 1 und Basispunkt J . \square

4.4.6 Satz. Es sei H ein unendlichdimensionaler separabler Hilbertraum und

$$\mu : \Omega(\hat{\mathcal{F}}_*, \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)) \rightarrow \mathbb{Z}$$

eine Abbildung, die (K) und (H) erfüllt. Zudem existiere ein $\gamma \in \Omega(\hat{\mathcal{F}}_*, \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H))$ mit $\mu(\gamma) = sf(\gamma) = 1$. Dann ist

$$\mu = sf : \Omega(\hat{\mathcal{F}}_*, \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)) \rightarrow \mathbb{Z}$$

Beweis. Es sei $J \in \mathcal{J}$ gewählt. Da wegen 4.4.4 $\hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)$ wegzusammenhängend ist, existieren Wege $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)$ mit $\tilde{\gamma}_1(0) = J$, $\tilde{\gamma}_1(1) = \gamma(a)$, $\tilde{\gamma}_2(0) = \gamma(b)$ und $\tilde{\gamma}_2(1) = J$. Damit ist unter Verwendung von 4.4.3

$$\mu(\tilde{\gamma}_1 * \gamma * \tilde{\gamma}_2) = \mu(\tilde{\gamma}_1) + \mu(\gamma) + \mu(\tilde{\gamma}_2) = 1 = \text{sf}(\tilde{\gamma}_1) + \text{sf}(\gamma) + \text{sf}(\tilde{\gamma}_2) = \text{sf}(\tilde{\gamma}_1 * \gamma * \tilde{\gamma}_2)$$

und folglich definiert $\tilde{\gamma}_1 * \gamma * \tilde{\gamma}_2$ einen Erzeuger von $\pi_1(\hat{\mathcal{F}}_*, J)$, auf dem μ und sf übereinstimmen. Damit ist wegen 4.4.5

$$\mu = \text{sf} : \pi_1(\hat{\mathcal{F}}_*, J) \rightarrow \mathbb{Z} \tag{4.4.1}$$

Es sei nun $\eta \in \Omega(\hat{\mathcal{F}}_*, \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H))$ beliebig gegeben. Wähle $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)$ mit $\gamma_1(0) = J$, $\gamma_1(1) = \eta(0)$, $\gamma_2(0) = \eta(1)$ und $\gamma_2(1) = J$. Damit ist $\gamma_1 * \eta * \gamma_2$ ein geschlossener Weg mit Basispunkt J und man erhält aus (4.4.1)

$$\begin{aligned} \mu(\eta) &= \mu(\gamma_1) + \mu(\eta) + \mu(\gamma_2) = \mu(\gamma_1 * \eta * \gamma_2) = \text{sf}(\gamma_1 * \eta * \gamma_2) \\ &= \text{sf}(\gamma_1) + \text{sf}(\eta) + \text{sf}(\gamma_2) = \text{sf}(\eta) \end{aligned}$$

□

4.5 Alternative Konstruktion des Spektralflusses

Es soll nun eine weitere Möglichkeit der Definition des Spektralflusses aus dem Artikel [Phi96] dargelegt werden und unter Ausnutzung des Resultates 4.4.6 ihre Gleichheit mit der obigen Definition gezeigt werden. Dass nun zwei Definition des Spektralflusses bereitstehen wird im letzten Teil dieser Arbeit gewinnbringend Verwendung finden.

4.5.1 Lemma. *Für $B \in \hat{\mathcal{F}}_*$ existiert $a > 0$ und eine offene Umgebung $N \subset \hat{\mathcal{F}}_*$ von B , so dass $N \ni S \mapsto \chi_{[-a,a]}(S) \in \mathcal{L}(H)$ stetig und für jedes $S \in N$ von endlichem Rang ist.*

Beweis. Da B ein selbstadjungierter Fredholmoperator ist existiert ein $a > 0$, so dass $\pm a \notin \sigma(B)$ und $\chi_{[-a,a]}(S)$ eine Projektion von endlichem Rang ist. Wegen der Abgeschlossenheit von $\sigma(B)$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $([-a - \varepsilon, -a + \varepsilon] \cup [a - \varepsilon, a + \varepsilon]) \cap \sigma(B) = \emptyset$. Nun ist die Menge

$$N_1 = \{S \in \hat{\mathcal{F}}_* : ([-a - \varepsilon, -a + \varepsilon] \cup [a - \varepsilon, a + \varepsilon]) \cap \sigma(S) = \emptyset\} \subset \hat{\mathcal{F}}_*$$

wegen 1.2.14 offen und auf dieser Menge ist die Abbildung $S \mapsto \chi_{[-a,a]}(S)$ stetig⁹. Man definiere nun die wegen der Stetigkeit von $S \mapsto \chi_{[-a,a]}(S)$ offene Teilmenge

$$N = \{S \in N_1 : \|\chi_{[-a,a]}(S) - \chi_{[-a,a]}(B)\| < 1\}$$

Aus 1.2.13 erhält man damit abschließend

$$\dim(\chi_{[-a,a]}(S)) = \dim(\chi_{[-a,a]}(B)) < \infty$$

für alle $S \in N$. □

Es sei $B : [a, b] \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ ein stetiger Weg. Wegen der Kompaktheit von $[a, b]$ und dem vorigen Lemma kann man nun eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ von $[a, b]$ und positive Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n wählen, so dass für jedes $i = 1, 2, \dots, n$ die Funktion

$$[x_{i-1}, x_i] \ni t \mapsto \chi_{[-a_i, a_i]}(B_t) \in \mathcal{L}(H)$$

stetig und jedes Element des Bildes von endlichem Rang ist. Man betrachte nun die Summation

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^n (\text{rk}(\chi_{[0, a_k]}(B(x_k))) - \text{rk}(\chi_{[0, a_k]}(B(x_{k-1})))) \quad (4.5.1)$$

4.5.2 Lemma. *(4.5.1) ist unabhängig von den getroffenen Wahlen, hängt also nur von der Funktion $B : [a, b] \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ ab.*

Beweis. Offenbar genügt es hierfür die Invarianz von (4.5.1) unter folgenden Operationen nachzuweisen:

⁹Mit der Definition von N_1 kann mühelos eine auf \mathbb{R} stetige Funktion angegeben werden, die für jedes $S \in N_1$ auf $\sigma(S)$ mit $\chi_{[-a,a]}$ übereinstimmt. Die Stetigkeit folgt damit aus 1.2.17

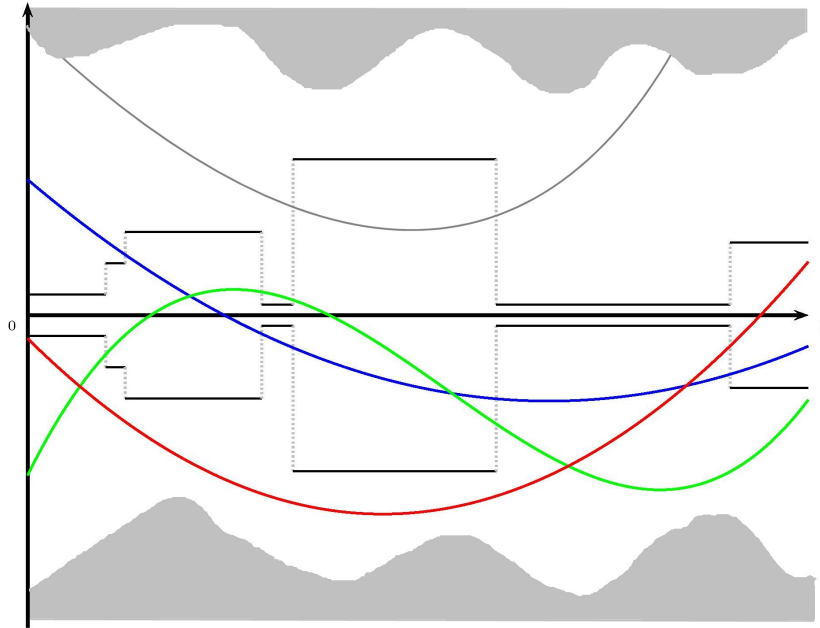


Abbildung 4.7: Zur Berechnung von μ : Darstellung des Spektrums von B_t in einer Umgebung von 0. Die horizontalen Linien markieren hierbei die Werte der a_i aus der Definition von μ .

1. Verfeinerung der Zerlegung von $[a, b]$ unter Beibehaltung der projektionswertigen Funktionen auf der feineren Zerlegung.
2. Veränderung der Wahl der a_i unter Beibehaltung der Zerlegung.

zu (1) Ist $x_* \in [x_{i-1}, x_i]$ ein zusätzlicher Punkt für ein $i = 1, \dots, n$, so wird in (4.5.1) der Term $\text{rk}(\chi_{[0, a_i]}(B(x_*)))$ sowohl hinzuaddiert als auch wieder subtrahiert.

zu (2) Es sei $[c, d] \subset [a, b]$ ein festes Teilintervall, $\chi_{[-a_1, a_1]}(B_t)$ und $\chi_{[-a_2, a_2]}(B_t)$ zwei stetige Funktionen auf $[c, d]$ wie in der Definition von (4.5.1) und o.B.d.A. $a_1 \geq a_2$. Da zudem $a_1, a_2 \notin \sigma(B_t)$ für alle $t \in [c, d]$ ist $t \mapsto \chi_{[0, a_1]}(B_t) - \chi_{[0, a_2]}(B_t) = \chi_{(a_2, a_1]}(B_t)$ eine stetige Funktion auf $[c, d]$ und damit $\text{rk}(\chi_{[0, a_1]}(B_t) - \chi_{[0, a_2]}(B_t)) =: n$ lokal konstant und folglich konstant auf $[c, d]$. Man erhält schließlich

$$\begin{aligned} \text{rk}(\chi_{[0, a_1]}(B_d)) - \text{rk}(\chi_{[0, a_1]}(B_c)) &= (\text{rk}(\chi_{[0, a_2]}(B_d)) + n) - (\text{rk}(\chi_{[0, a_2]}(B_c)) + n) \\ &= \text{rk}(\chi_{[0, a_2]}(B_d)) - \text{rk}(\chi_{[0, a_2]}(B_c)) \end{aligned}$$

□

Es ist aus der Definition klar, dass μ die Additivitätsbedingung (K) erfüllt.

4.5.3 Satz. μ ist invariant unter Homotopien mit festen Endpunkten.

Beweis. Zunächst kann eine wichtige Beobachtung gemacht werden: Sind $S, T \in \hat{\mathcal{F}}_*$ in einer Umgebung N wie in Lemma 4.5.1, so besitzt μ für alle ganz in N verlaufende Wege von S nach T den gleichen Wert.

Es seien nun $B : [a, b] \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ und $B' : [a, b] \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ zwei Wege und $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ eine Homotopie mit

$$H(0, t) = B_t, \quad H(1, t) = B'_t \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

$$H(s, a) = B_a = B'_a \quad \text{für alle } s \in [a, b]$$

$$H(s, b) = B_b = B'_b \quad \text{für alle } s \in [a, b]$$

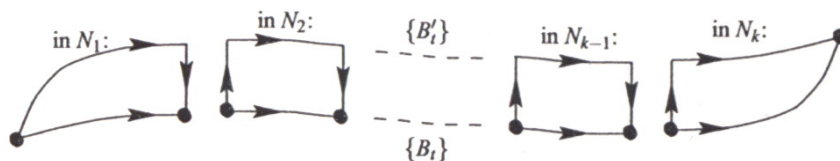
Wegen der Kompaktheit von $H([0, 1] \times [a, b]) \subset \hat{\mathcal{F}}_*$ kann man eine endliche offene Überdeckung

$$H([0, 1] \times [a, b]) = \bigcup_{i=1}^N N_i$$

wählen, die aus Umgebungen wie in Lemma 4.5.1 besteht. Bezeichnet nun $\varepsilon_0 > 0$ die Lebesgue-nummer der offenen Überdeckung

$$[0, 1] \times [a, b] = \bigcup_{i=1}^N H^{-1}(N_i)$$

so ist das Bild jeder Teilmenge von $[0, 1] \times [a, b]$ mit Durchmesser $< \varepsilon_0$ in einem der N_i enthalten. H kann nun in eine endliche Folge "kurzer" Homotopien zerlegt werden, indem man eine Zerlegung von $[0, 1]$ in abgeschlossene Intervalle J_k , $k = 1, \dots, M$ der Länge $< \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}$ wählt und die Einschränkungen $H|_{J_k \times [a, b]}$, $k = 1, \dots, M$ betrachtet. Für ein fest gewähltes $k \in \{1, \dots, M\}$ bezeichne nun zur Vereinfachung der Schreibweise B und B' Anfangs- und Endkurve der Homotopie $H|_{J_k \times [a, b]}$. Nun kann aber auch $[a, b]$ in eine endliche Anzahl von Intervallen \hat{J}_l , $l = 1, \dots, \hat{M}$ zerlegt werden, so dass $H(J_k \times \hat{J}_l)$ stets in einem der N_i enthalten ist. Man betrachte damit das folgende Bild



Mit der eingangs gemachten Bemerkung der Gleichheit von μ für Wege die ganz in einem N_i verlaufen, ist aber in jedem N_i der Wert von μ des oberen Weges und des unteren Weges gleich. Wegen der bereits nachgewiesenen Gültigkeit der Eigenschaft (K) ist nun die Summe über die μ der unteren Wege gleich $\mu(B)$. Da sich aber die μ der vertikalen Wege paarweise annullieren ist die Summe aller μ der oberen Wege gerade $\mu(B')$ und man erhält insgesamt $\mu(B) = \mu(B')$. \square

4.5.4 Folgerung. $\mu : \Omega(\hat{\mathcal{F}}_*, \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)) \rightarrow \mathbb{Z}$ erfüllt die Bedingung (H).

Beweis. Wegen 4.4.3 genügt es nachzuweisen, dass $\mu(B) = 0$ für jeden Weg

$$B : [a, b] \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)$$

Ist B ein solcher Weg, so existiert wegen der Offenheit von $\rho(B_t)$ für jedes $t \in [a, b]$, 1.2.14 und der Kompaktheit von $[a, b]$ ein $\delta > 0$, so dass $\sigma(B_t) \cap (-\delta, \delta) = \emptyset$ für alle $t \in [a, b]$. Mit der nun stetigen Funktion

$$[a, b] \ni t \mapsto \chi_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]}(B_t) \in \mathcal{L}(H)$$

erhält man aus (4.5.1) unmittelbar $\mu(B) = 0$. □

4.5.5 Satz. Es ist $\mu = \text{sf} : \Omega(\hat{\mathcal{F}}_*, \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Beweis. Wegen 4.5.4 und der bereits genannten Erfülltheit der Bedingung (K) genügt es mit 4.4.6 einen Weg $B \in \Omega(\hat{\mathcal{F}}_*, \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H))$ mit $\mu(B) = \text{sf}(B) = 1$ anzugeben. Hierfür seien $P_+, P_-, P_0 \in \mathcal{L}(H)$ Orthogonalprojektoren mit $P_+ + P_- + P_0 = id$ und

$$\begin{aligned} \dim \ker(P_+) &= \dim \ker(P_-) = \infty \\ \text{rk}(P_0) &= 1 \end{aligned}$$

Man betrachte hiermit den Weg

$$B : [-1, 1] \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*, \quad t \mapsto P_+ - P_- + tP_0$$

Dann ist $B_{-1}, B_1 \in GL(H)$ und mit 4.3.27

$$\begin{aligned} \text{sf}(B, [a, b]) &= \mu_{\text{rel}}(B_{-1}, B_1) \\ &= \dim(\text{im}(E_-(B_{-1})) \cap \ker(E_-(B_1))) - \dim(\text{im}(E_-(B_1)) \cap \ker(E_-(B_{-1}))) = 1 \end{aligned}$$

Desweiteren ist aber offenbar auch $\mu(B) = 1$ und folglich die Behauptung bewiesen. □

4.6 Bemerkungen

Nach diesen recht ausgiebigen Betrachtungen zum Spektralfluss sollen einige abschließende Bemerkungen gemacht werden.

- Die Definition des Spektralflusses aus [Phi96] ist für selbstadjungierte total indefinite Fredholmoperatoren auf reellen und komplexen Hilberträumen anwendbar und auch in beiden Varianten anzutreffen. In [Phi96] wird auch lediglich von einem Hilbertraum gesprochen ohne einen konkreten Skalarenkörper zu benennen, wobei ein Teil dieser Arbeit sich mit den im ersten Teil dieses Kapitels gegebene topologischen Betrachtungen beschäftigt, wobei der Inhalt von [AS69] in aller Kürze zusammengefasst wird um den Spektralfluss als Isomorphismus der Fundamentalgruppe wie in 4.4.5 nachzuweisen. Dieser Teil der Arbeit kann allerdings aus mehreren Gründen nur den komplexen Fall des Spektralflusses betreffen, da beispielsweise mit Verweis auf den Artikel [AS69] die Fundamentalgruppe des Raumes $\hat{\mathcal{F}}_*$ wegen einer Homotopieäquivalenz $\hat{\mathcal{F}}_* \simeq U(\infty)$ als unendlich zyklisch erkannt werden soll. Wegen 4.2.2 kann eine solche Homotopieäquivalenz allerdings im reellen Fall nicht bestehen..
- Mit der Definition des Spektralflusses nach Phillips erhält man aus der Invarianz des Spektrums unter Komplexifizierung und der Beziehung $E(T^{\mathbb{C}}, \lambda) = E(T, \lambda)^{\mathbb{C}}$ (vgl. hierzu 1.2.1) unmittelbar die Invarianz des Spektralflusses unter Komplexifizierung:

4.6.1 Lemma. *Für einen Weg $L : [a, b] \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*(H)$ mit invertierbaren Endpunkten ist*

$$\text{sf}(L, [a, b]) = \text{sf}(L^{\mathbb{C}}, [a, b])$$

- Bei Betrachtung von Artikeln zum Spektralfluss scheint eine wirklich wesentliche Erkenntnis der Darstellung des Spektralflusses aus [FPR99] die Invarianz unter der kogredienten Wirkung zu sein, die wegen des Eindeutigkeitsresultates 4.4.6 nun auch für die populäre Definition aus [Phi96] gilt. Beispielsweise findet man in [BF98, Theorem 4.2] in einer Auflistung der wesentlichen Eigenschaften des Spektralflusses lediglich die durchaus leicht einzusehende Invarianz unter der Einschränkung der kogredienten Wirkung auf die orthogonalen Operatoren.

Umso bemerkenswerter ist, dass bereits jede Abbildung

$$\mu : \Omega(\hat{\mathcal{F}}_*, \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)) \rightarrow \mathbb{Z}$$

die nur die Eigenschaft (H) erfüllt invariant unter der vollen kogredienten Wirkung ist. Der Beweis dieser Aussage ist eine geradlinige und einzeilige Anwendung des Theorems von Kuiper, die in [CFP00, Lemma 3] zu finden ist.

- In dem Artikel [PPT04] zur Morse Theorie semi-Riemannscher Geodäten werden beide hier beschriebene Definitionen des Spektralflusses verwendet. Zu den dort gemachten Aussagen

können nun zwei Bemerkungen gemacht werden. Zum Einen erweckt die dort gegebene Beschreibung des Spektralflusses aus [FPR99] den Eindruck, dass die Invarianz unter der kogredienten Wirkung eine Konsequenz aus dieser Konstruktion des Spektralflusses ist. Wie eben bemerkt ist dieses Resultat aber wesentlich elementarer. Zum Anderen wird ohne jegliche Begründung das Bestehen einer Homotopieäquivalenz $\hat{\mathcal{F}}_* \simeq U(\infty)$ im reellen Fall behauptet. Mit den Resultaten des Abschnittes 4.2.2 kann eine solche Abbildung jedoch nicht existieren.

- Der Artikel [FPR99] besitzt eine durchaus ausführliche Einleitung, in der insbesondere einige Referenzen zu weiteren Konstruktionen des Spektralflusses und deren Anwendungen im reellen und komplexen Fall genannt werden. Es bleibt hierbei rätselhaft, warum weder die offenbar so populäre Darstellung von [Phi96], noch die Isomorphismeigenschaft des Spektralflusses auf der Fundamentalgruppe Erwähnung finden.

Kapitel 5

Der Maslov Index

In diesem Kapitel wird mit dem Maslov Index das in der bisherigen Entwicklung entscheidende Werkzeug der Theorie konjugierter Punkte entlang semi-Riemannscher Geodäten präsentiert. Zum im letzten Kapitel behandelten Spektralfluss konnte mit 4.4.6 ein Resultat erzielt werden, dass es erlaubt unter dem Namen *Spektralfluss* auftretende Definitionen als identisch zu erkennen. Ebenfalls wird man an vielen Stellen der Literatur auf den Begriff des *Maslov Index* stossen. Es ist zunächst wichtig darauf hinzuweisen, dass trotz des identischen Namens diese verschiedenen Definitionen im Allgemeinen keinesfalls übereinzustimmen brauchen¹. Hier werden die Betrachtungen zum Maslov Index aus dem Artikel [MPT00] präsentiert, der zugleich einer der grundlegenden Arbeiten der Theorie semi-Riemannscher Geodäten ist. Unter Hinzunahme von [PT00a] wird dabei versucht die nicht immer einfach zu verstehende Darstellung aus [MPT00] in einer zugänglichen Form zu präsentieren.

¹Man vergleiche beispielsweise [Arn67] für die ursprüngliche Definition. Eine recht ausführliche Liste von Literatur zum Maslov Index ist im Vorwort von [PT00a] zu finden

5.1 Grundlagen zu symplektischen Räumen

Es sei stets V ein symplektischer Vektorraum der Dimension $2n$ mit symplektischer Form ω . Bekanntlich besitzt V eine Vektorraumbasis $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$, so dass

$$\begin{aligned}\omega(e_{n+j}, e_j) &= -\omega(e_j, e_{n+j}) = 1, \quad j = 1, \dots, n \\ \omega(e_i, e_j) &= 0, \quad \text{falls } |i - j| \neq n\end{aligned}$$

die im Folgenden eine **symplektische Basis** von V genannt wird. Eine **komplexe Struktur** für V ist eine lineare Abbildung $\mathcal{I} : V \rightarrow V$ mit $\mathcal{I}^2 = -id$. Hierdurch wird auf V die Struktur eines komplexen Vektorraums induziert, wobei \mathcal{I} gerade der Multiplikation mit der imaginären Einheit i entspricht². Eine komplexe Struktur \mathcal{I} wird **kompatibel** mit der symplektischen Form ω genannt, falls die Bilinearform $\omega(\mathcal{I}\cdot, \cdot)$ ein Skalarprodukt auf V ist.

Eine lineare Abbildung $T : V_1 \rightarrow V_2$ zwischen zwei symplektischen Vektorräumen $(V_1, \omega_1), (V_2, \omega_2)$ gleicher Dimension wird **Symplektomorphismus** genannt, falls $\omega_2(Tx, Ty) = \omega_1(x, y)$ für alle $x, y \in V_1$.

Es sei nun \mathbb{R}^{2n} durch $(x_1, \dots, x_{2n}) \mapsto (x_1, \dots, x_n) + i(x_{n+1}, \dots, x_{2n})$ mit \mathbb{C}^n identifiziert. Hiemit erhält man durch $\mathcal{I}_0(e_j) = e_{n+j}, \mathcal{I}_0(e_{n+j}) = -e_j$ für $j = 1, \dots, n$ eine komplexe Struktur \mathcal{I}_0 für \mathbb{R}^{2n} , wobei $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ die kanonische Basis dieses Raumes bezeichne. Im Folgenden werde mit $x \cdot y$ das gewöhnliche euklidische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^{2n} und mit $\langle x, y \rangle$ das gewöhnliche hermitesche Skalarprodukt auf \mathbb{C}^n bezeichnet. Damit ist für $x = (x_1, \dots, x_{2n}), y = (y_1, \dots, y_{2n})$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{2n} x_i y_i + i \sum_{i=1}^n (x_{i+n} y_i - x_i y_{i+n}) = x \cdot y + i\omega_0(x, y)$$

wobei ω_0 eine symplektische Form auf \mathbb{R}^{2n} ist, die als **kanonische symplektische Form** des \mathbb{R}^{2n} bezeichnet wird. Hiermit ist die kanonische Basis des \mathbb{R}^{2n} eine symplektische Basis für $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ und \mathcal{I}_0 eine kompatible komplexe Struktur. Zudem ist $\omega_0(x, y) = (Jx) \cdot y$ mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & id \\ -id & 0 \end{pmatrix}$$

Ein Unterraum $W \subset V$ heißt **isotrop**, falls $\omega|_W = 0$ und **lagrange**, falls zudem $\dim W = n$. Es ist nicht schwer zu sehen, dass sich dies gerade mit der offensichtlichen Bedeutung von maximal isotrop deckt.

Für eine Zerlegung $V = L_0 \oplus L_1$ in Lagrange-Unterräume $L_0, L_1 \subset V$ sei $\mathcal{D}_{L_0, L_1} : L_1 \rightarrow L_0^*$ gegeben durch

$$\mathcal{D}_{L_0, L_1}(v) = \omega(v, \cdot)|_{L_0}$$

Da die Form ω nicht entartet ist, erhält man unmittelbar die Injektivität dieser Abbildung, die sich folglich als eine Isomorphismus herausstellt³.

²Diese Prozedur ist grundlegend verschieden zu der im ersten Kapitel eingeführten Komplexifizierung eines beliebigen reellen Vektorraumes.

³Man möge sich diesen Isomorphismus gut einprägen. Er spielt eine fundamentale Rolle bei der Definition der Lagrange-Grassmannschen

5.1.1 Lemma. *Es sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum und $L_0 \subset V$ Lagrange.*

1. *V besitzt eine kompatible komplexe Struktur.*
2. *Es existiert $L_1 \subset V$ Lagrange mit $V = L_0 \oplus L_1$. Zudem existiert zu jeder Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von L_0 eine Basis $\{e_{n+1}, \dots, e_{2n}\}$ von L_1 , so dass $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ eine symplektische Basis von V ist.*
3. *Für jeden Isomorphismus $\psi : L_0 \oplus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \oplus \{0\}$ und $L_1 \subset V$ Lagrange mit $V = L_0 \oplus L_1$ existiert ein Symplektomorphismus $\tilde{\psi} : (V, \omega) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ mit $\tilde{\psi}|_{L_0 \oplus \{0\}} = \psi$ und $\psi(L_1) = \{0\} \oplus \mathbb{R}^n$.*

Beweis. 1. Mit der Wahl einer symplektischen Basis von V erhält man einen Symplektomorphismus $\varphi : (V, \omega) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Mit $\mathcal{I} = \varphi^{-1}\mathcal{I}_0\varphi$ ist $\mathcal{I}^2 = -id$ und

$$\omega(\mathcal{I}x, y) = \omega(\varphi^{-1}\mathcal{I}_0\varphi x, y) = \omega_0(\mathcal{I}_0\varphi x, \varphi y) \quad \forall x, y \in V$$

Folglich ist $\mathcal{I} : V \rightarrow V$ eine kompatible komplexe Struktur für V .

2. L_1 erhält man nach Wahl einer kompatiblen komplexen Struktur \mathcal{I} für V aus $L_1 = \mathcal{I}(L_0)$. Mit einer beliebigen Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von L_0 sei $f_i = (\mathcal{D}_{L_0, L_1})^{-1}(e^i) \in L_1$, wobei $\{e^1, \dots, e^n\}$ die duale Basis bezüglich $\{e_1, \dots, e_n\}$ bezeichne. Nun ist $\omega(e_i, e_j) = 0 = \omega(f_i, f_j)$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ und

$$\omega(e_i, f_j) = -\omega(f_j, e_i) = -e^j(e_i) = -\delta_{ij}$$

Damit ist $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ eine symplektische Basis von (V, ω) .

3. Mit der Basis $\{\psi^{-1}(e_1), \dots, \psi^{-1}(e_n)\}$ erhält man die Fortsetzung von ψ unmittelbar aus der vorhergehenden Aussage. □

Die **symplektische Gruppe** $Sp(V, \omega)$ ist die abgeschlossene Lie-Untergruppe von $Gl(V)$ bestehend aus allen Symplektomorphismen von (V, ω) . Ihre Liealgebra $sp(V, \omega)$ besteht aus allen linearen Abbildungen $H : V \rightarrow V$ mit

$$\omega(Hx, y) + \omega(x, Hy) = 0 \quad \forall x, y \in V$$

wobei diese Gleichheit äquivalent zur Symmetrie der Bilinearform $\omega(H\cdot, \cdot)$ auf V ist (vgl. hierzu [Abb01, S. 3-4]).

Im speziellen Fall $(V, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ werde die Untergruppe von $Gl(2n, \mathbb{R})$ bestehend aus den unitären Transformationen bezüglich des kanonischen hermiteschen Produktes auf $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ mit $U(n)$ bezeichnet. Da ω_0 der Imaginärteil des hermiteschen Produktes ist und somit invariant unter Anwendung von Elementen aus $U(n)$ ist, ist $U(n)$ eine Untergruppe von $Sp(n, \mathbb{R}) := Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Desweiteren bezeichne $O(n)$ die orthogonale Gruppe des \mathbb{R}^n und $SO(n)$ wie gewöhnlich die

Untergruppe von $O(n)$ bestehend aus den Matrizen mit Determinante 1. Für $\psi \in O(n)$ ist mit der im ersten Kapitel eingeführten Komplexifizierung stets $\psi^{\mathbb{C}} \in U(n)$, womit sich $O(n)$ als Untergruppe von $U(n) \subset Sp(n, \mathbb{R})$ auffassen lässt. Durch Betrachtung der darstellenden Matrizen als Abbildungen auf \mathbb{R}^{2n} erhält man, dass $O(n)$ unter dieser Identifizierung gerade aus den Elementen von $U(n)$ besteht, die den Unterraum $\mathbb{R}^n \oplus \{0\} \subset \mathbb{R}^{2n}$ invariant lassen. Bekanntlich sind $U(n), O(n), SO(n)$ kompakte Lie-Gruppen und $Sp(n, \mathbb{R})$ eine nicht kompakte Lie-Gruppe.

5.2 Die Lagrange-Grassmannsche

Für $k = 0, \dots, 2n$ bezeichne $G_k(V)$ die Grassmann-Mannigfaltigkeit bestehend aus allen k -dimensionalen Unterräumen von V . Von besonderer Bedeutung für die Definition des Maslov Index ist die Teilmenge

$$\Lambda = \Lambda(V, \omega) = \{L \subset V : L \text{ Lagrange-Unterraum}\} \subset G_n(V)$$

die sich als eingebettete Untermannigfaltigkeit von $G_n(V)$ herausstellen wird. Sowohl zur hier gewählten Definition des Maslov Index als auch für Anwendungen auf konjugierte Punkte semi-Riemannscher Geodäten ist der möglichst direkte Umgang mit diesem Objekt unverzichtbar, womit insbesondere ein möglichst gutes Verständnis der Karten wünschenswert ist. Eine ganz andere und wesentlich kürzer darzustellende, dafür aber in diesem Kontext wenig hilfreiche Definition findet man beispielsweise in [Arn67].

5.2.1 Die Grassmannsche

Bekanntlich besitzt $G_k(V)$ die Struktur einer glatten, kompakten Mannigfaltigkeit der Dimension $k(2n - k)$. Man vergleiche hierzu etwa [MiSta74, § 5] oder [Lee03, Example 1.24]. Dennoch soll hier explizit ein Atlas für $G_k(V)$ angegeben werden, da die Einschränkungen dieser Karten auf Λ im Fall $k = n$ einen Atlas für Λ definieren.

Für die Darlegung der Grundlagen zur Grassmannschen sei vorübergehend V ein beliebiger Vektorraum der Dimension n .

Für $V = W_0 \oplus W_1$ mit $\dim W_0 = k$ und $\dim W_1 = n - k$ bezeichne für $T \in \mathcal{L}(W_0, W_1)$

$$\text{graph}(T) = \{v + Tv : v \in W_0\} \in G_k(n)$$

den Graphen von T . Mit $G_k^0(W_1) = \{W \in G_k(n) : W \cap W_1 = \{0\}\}$ bestätigt man mühelos für jedes Paar (W_0, W_1) wie oben die Bijektivität der Abbildung

$$\Psi_{W_0, W_1} : G_k^0(W_1) \rightarrow \mathcal{L}(W_0, W_1), \quad \Psi_{W_0, W_1}(W) = T = (\pi_1|_W) \circ (\pi_0|_W)^{-1}$$

wobei $\pi_0 : W_0 \oplus W_1 \rightarrow W_0$ und $\pi_1 : W_0 \oplus W_1 \rightarrow W_1$ die Projektionen bezeichnen. Damit ist Ψ_{W_0, W_1}^{-1} die Abbildung, die jedem $T \in \mathcal{L}(W_0, W_1)$ ihren Graph $\text{graph}(T)$ zuordnet. Diese Abbildungen werden den glatten Atlas von $G_k(n)$ definieren.

Für einen weiteren k -dimensionalen Unterraum W'_0 mit $V = W'_0 \oplus W_1$ bezeichne im Folgenden $\eta_{W'_0, W_0}^{W_1} : W_0 \rightarrow W'_0$ den durch $(\pi'_0 : W'_0 \oplus W_1 \rightarrow W'_0)|_{W_0}$ gegebenen Isomorphismus.

5.2.1 Lemma. *Es seien $W_0, W'_0, W_1, W'_1 \subset V$ mit $\dim W_0 = \dim W'_0 = k$ und $W_0 \oplus W_1 = W'_0 \oplus W_1 = W_0 \oplus W'_1$.*

1. $\Psi_{W'_0, W_1} \circ (\Psi_{W_0, W_1})^{-1} : \mathcal{L}(W_0, W_1) \rightarrow \mathcal{L}(W'_0, W_1)$ ist gegeben durch

$$(\Psi_{W'_0, W_1} \circ (\Psi_{W_0, W_1})^{-1})(T) = (\pi'_1|_{W_0} + T) \circ \eta_{W'_0, W_0}^{W_1}$$

wobei $\pi'_1 : W'_0 \oplus W_1 \rightarrow W_1$ die Projektion bezeichne.

2. $T \in \mathcal{L}(W_0, W_1)$ ist genau dann im Definitionsbereich von $\Psi_{W_0, W_1} \circ (\Psi_{W_0, W_1})^{-1}$, wenn $id_{W_0} + (\pi'_0 |_{W_1}) \circ T \in GL(W_0)$ und es ist

$$(\Psi_{W_0, W_1} \circ (\Psi_{W_0, W_1})^{-1})(T) = \eta_{W_1, W_0}^{W_0} \circ T \circ (id_{W_0} + (\pi'_0 |_{W_1}) \circ T)^{-1}$$

wobei $\pi'_0 : W_0 \oplus W_1 \rightarrow W_0$ die Projektion bezeichne.

Beweis. Zum Beweis der ersten Behauptung sei $x \in W'_0$. Dann ist mit $\pi_1 + \pi'_1 \pi_0 = 0$

$$\begin{aligned} x + (\pi'_1 |_{W_0} + T) \circ \pi_0 |_{W'_0} x &= x + \pi'_1 \pi_0 x + T \pi_0 x = \pi_1 x + \pi_0 x + \pi'_1 \pi_0 x + T \pi_0 x \\ &= \pi_0 x + T \pi_0 x = \eta_{W'_0, W_0}^{W_1} x + T \eta_{W'_0, W_0}^{W_1} x \end{aligned}$$

und folglich $\text{graph}(T) = \text{graph}((\pi'_1 |_{W_0} + T) \circ \eta_{W'_0, W_0}^{W_1})$. Nach Definition der Abbildungen Ψ ist damit die Aussage gezeigt.

Für den Beweis des ersten Teils der zweiten Aussage beachte man zunächst, dass der Definitionsbereich von $\Psi_{W_0, W_1} \circ (\Psi_{W_0, W_1})^{-1}$ gerade durch $G_k^0(W'_1)$ gegeben ist. Es ist aber

$$\begin{aligned} \text{graph}(T) \in G_k^0(W'_1) &\iff x + Tx \notin W'_1 \quad \forall x \in W_0 \setminus \{0\} \\ &\iff \pi_0(x + Tx) = x + \pi'_0 T x = x + \pi'_0 |_{W_1} T x \neq 0 \quad \forall x \in W_0 \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Den zweiten Teil der Aussage erhält man, da die Gleichung

$$x + \pi'_1 |_{W_1} T (id_{W_0} + \pi'_0 |_{W_1} \circ T)^{-1} x = \tilde{x} + T \tilde{x}$$

stets durch $x = (id_{W_0} + \pi'_0 |_{W_1} T) \tilde{x}$ mit $id_{W_0} + \pi'_0 |_{W_1} T \in GL(W_0)$ gelöst wird, womit offenbar die Graphen beider Abbildungen übereinstimmen. \square

5.2.2 Satz. $\mathcal{A} = \{\Psi_{W_0, W_1} : V = W_0 \oplus W_1, \dim W_0 = k\}$ ist ein glatter Atlas für $G_k(n)$ mit dem $G_k(n)$ die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit der Dimension $k(n - k)$ erhält.

Beweis. Da zu jedem $W_0 \subset V$ ein komplementärer Teilraum existiert, überdecken die Karten $G_k(n)$. Zudem ist das Bild eines jeden Kartengebietes unter der Karte eine offene Teilmenge des Modells der Mannigfaltigkeit. Jegliche bisher betrachteten Kartenwechselabbildungen sind auf offenen Teilmengen von $\mathcal{L}(W_0, W_1)$ definiert und glatt. Da zu jeder Abbildung auch ihre Umkehrabbildung betrachtet wurde, sind diese Abbildungen Diffeomorphismen. Damit ist allerdings die allgemeine Verträglichkeit der Karten noch nicht bewiesen.

Sind nun $\Psi_{W_0, W_1}, \Psi_{W'_0, W'_1} \in \mathcal{A}$ mit $G_k^0(W'_1) \cap G_k^0(W_1) \neq \emptyset$, so sind aber $\Psi_{W'_0, W'_1}$ und Ψ_{W_0, W_1} sowie Ψ_{W_0, W'_1} und Ψ_{W_0, W_1} miteinander verträglich. Da aber die Definitionsbereiche von $\Psi_{W'_0, W'_1}$ und Ψ_{W_0, W'_1} übereinstimmen, erhält man die gewünschte Verträglichkeit von Ψ_{W_0, W_1} und $\Psi_{W'_0, W'_1}$ ⁴. Abschließend existiert nun zu je zwei Punkten aus $G_k(V)$ ein Element aus \mathcal{A} , so dass beide Punkte im Definitionsbereich dieser einen Karte enthalten sind und indem man in der Definition von \mathcal{A} nur Abbildungen Ψ_{W_0, W_1} betrachtet, bei denen W_0 und W_1 von der Standardbasis des \mathbb{R}^n

⁴Die hier verwendete Übereinstimmung der Definitionsbereiche ist natürlich notwendig für diese Schlußweise.

erzeugt sind, erhält man sogar eine endliche Teilmenge von \mathcal{A} , deren Definitionsbereiche $G_k(n)$ überdecken.

Unter diesen Voraussetzungen besitzt $G_k(n)$ eine eindeutige Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit, so dass \mathcal{A} ein glatter Atlas für $G_k(n)$ ist (vgl. z.B. [Lee03, Lemma 1.23]). \square

Man betrachte nun die Wirkung der Lie-Gruppe $GL(V)$ auf $G_k(n)$

5.2.3 Lemma. *Die Wirkung*

$$GL(V) \times G_k(n) \rightarrow G_k(n), (A, W) \mapsto A(W) \quad (5.2.1)$$

ist glatt und transitiv.

Beweis. Die Transitivität ist klar, Die Glattheit erhält man durch Darstellung der Abbildung in Karten oder alternativ mit [Lee03, Example 9.32]. \square

5.2.2 Definition der Lagrange-Grassmannschen

Das Ziel ist nun durch Einschränkung der Karten von $G_n(V)$ die Struktur einer glatten eingebetteten Untermannigfaltigkeit auf $\Lambda \subset G_n(V)$ zu erlangen. Für einen endlichdimensionalen Vektorraum V bezeichne im Folgenden $B(V)$ den Vektorraum aller Bilinearformen auf V und $B_{sym}(V) \subset B(V)$ den Unterraum der symmetrischen Bilinearformen.

5.2.4 Definition. Es sei $V = L_0 \oplus L_1$ eine Zerlegung in Lagrange-Unterräume. Man definiere $\varphi_{L_0, L_1} : G_n^0(L_1) \rightarrow B(L_0)$ durch

$$\varphi_{L_0, L_1}(W) = \mathcal{D}_{L_0, L_1} \circ \Psi_{L_0, L_1}(W)$$

wobei die übliche Identifikation $\mathcal{L}(L_0, L_0^*) \cong B(L_0)$ verwendet wird. Hiermit ist

$$\varphi_{L_0, L_1}(W) = \omega(T \cdot, \cdot) |_{L_0} \quad \text{mit} \quad T = \pi_1 |_W \circ (\pi_0 |_W)^{-1}$$

Diese Abbildung ist als Komposition einer Karte von $G_n(V)$ mit dem Isomorphismus \mathcal{D}_{L_0, L_1} offenbar ein Diffeomorphismus.

5.2.5 Lemma. *Die Menge Λ ist eine glatte eingebettete Untermannigfaltigkeit von $G_n(V)$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$. Mit $\Lambda_0(L_1) = \Lambda \cap G_n^0(L_1)$ schränkt sich jede der oben definierten Abbildungen φ_{L_0, L_1} zu einer Karte für Λ mit $\varphi_{L_0, L_1} : \Lambda_0(L_1) \rightarrow B_{sym}(L_0)$ ein.*

Beweis. Es sei $L \in G_n^0(L_1)$ und $T = \Psi_{L_0, L_1}(L) \in \mathcal{L}(L_0, L_1)$. Dann ist L genau dann ein Lagrange-Unterraum, wenn

$$\omega(v + Tv, w + Tw) = \omega(v, Tw) + \omega(Tv, w) = 0 \quad \forall v, w \in L_0$$

Dies bedeutet aber gerade die Symmetrie der Bilinearform $\varphi_{L_0, L_1}(L) = \mathcal{D}_{L_0, L_1} \circ T$. Da nun $B_{sym}(L_0) \subset B(L_0)$ ein Unterraum der Dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$ ist, folgt die Behauptung. \square

Mit den in 5.2.1 angegebenen Formeln für die Kartenwechsel in $G_n(V)$ können nun entsprechende Formeln für Kartenwechsel in Λ angegeben werden. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass für eine lineare Abbildung T zwischen Vektorräumen T^* sowohl den Pullback einer Bilinearform, als auch die duale Abbildung bezeichnen kann. Die jeweilige Bedeutung wird stets aus dem Kontext ersichtlich sein.

5.2.6 Lemma. *Es seien $L_0, L_1, L'_0, L'_1 \in \Lambda$ mit $V = L_0 \oplus L_1 = L'_0 \oplus L_1 = L_0 \oplus L'_1$. Dann ist*

$$\varphi_{L'_0, L_1} \circ (\varphi_{L_0, L_1})^{-1}(B) = \varphi_{L'_0, L_1}(L_0) + (\eta_{L'_0, L_0}^{L'_1})^*(B) \in B_{\text{sym}}(L'_0)$$

für alle $B \in B_{\text{sym}}(L_0)$ und

$$\varphi_{L_0, L'_1} \circ \varphi_{L_0, L_1}^{-1}(B) = B \circ (id_{L_0} + \eta_{L_0, L_1}^{L'_1} \circ \mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} \circ B)^{-1} \in B_{\text{sym}}(L_0)$$

für alle $B \in \varphi_{L_0, L_1}(\Lambda_0(L'_1) \cap \Lambda_0(L_1)) \subset B_{\text{sym}}(L_0)$.

Beweis. Zunächst ist wegen 5.2.1

$$\varphi_{L'_0, L_1} \circ (\varphi_{L_0, L_1})^{-1}(B) = \mathcal{D}_{L'_0, L_1} \circ (\pi'_1|_{L_0} + \mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} \circ B) \circ \eta_{L'_0, L_0}^{L'_1}$$

wobei $\pi'_1 : L'_0 \oplus L_1 \rightarrow L_1$ die Projektion bezeichne. Nun ist aber leicht einzusehen, dass

$$\mathcal{D}_{L'_0, L_1} \circ \mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} = (\eta_{L'_0, L_0}^{L'_1})^* : L_0^* \rightarrow L'_0^*$$

Damit erhält man

$$\varphi_{L'_0, L_1} \circ (\varphi_{L_0, L_1})^{-1}(B) = \mathcal{D}_{L'_0, L_1} \circ (\pi'_1|_{L_0}) \circ \eta_{L'_0, L_0}^{L'_1} + (\eta_{L'_0, L_0}^{L'_1})^*(B) \in B_{\text{sym}}(L'_0)$$

Durch Einsetzen von $B = 0$ ist insbesondere

$$\varphi_{L'_0, L_1}(L_0) = \mathcal{D}_{L'_0, L_1} \circ (\pi'_1|_{L_0}) \circ \eta_{L'_0, L_0}^{L'_1}$$

und die erste behauptete Beziehung gezeigt.

Die zweite Gleichung erhält man mit 5.2.1 und $\mathcal{D}_{L_0, L_2} \circ \eta_{L_1, L_2}^{L_0} \circ \mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} = id_{L_0^*}$ aus

$$\begin{aligned} \varphi_{L_0, L'_1} \circ \varphi_{L_0, L_1}^{-1}(B) &= \mathcal{D}_{L_0, L'_1} \circ \eta_{L_1, L'_1}^{L_0} \circ \mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} \circ B \circ (id_{L_0} + \eta_{L_1, L_0}^{L'_1} \circ \mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} \circ B)^{-1} \\ &= B \circ (id_{L_0} + \eta_{L_0, L_1}^{L'_1} \circ \mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} \circ B)^{-1} \in \mathcal{L}(L_0, L_0^*) \end{aligned}$$

□

5.2.7 Lemma. *Für jedes $L_0 \in \Lambda$ ist der Tangentialraum $T_{L_0}\Lambda$ an L_0 kanonisch isomorph zu $B_{\text{sym}}(L_0)$; genauer: $d_{L_0}\varphi_{L_0, L_1} : T_{L_0}\Lambda \xrightarrow{\cong} B_{\text{sym}}(L_0)$ ist unabhängig von der Wahl des komplementären Lagrange-Unterraums L_1 .*

Beweis. Mit $V = L_0 \oplus L_1 = L_0 \oplus L_2$ ist $\varphi_{L_0, L_1}(L_0) = \varphi_{L_0, L_2}(L_0) = 0 \in B_{\text{sym}}(L_0)$. Es genügt folglich $D_0(\varphi_{L_0, L_2} \circ \varphi_{L_0, L_1}^{-1}) = id_{B_{\text{sym}}(L_0)}$ zu zeigen. Mit 5.2.6 ist aber für $B \in \mathcal{L}(L_0, L_0^*)$

$$D_0(\varphi_{L_0, L_2} \circ \varphi_{L_0, L_1}^{-1})(B) = (id_{\mathcal{L}(L_0, L_0^*)} B) \circ id_{L_0} + 0D_0((id_{L_0} + \eta_{L_0, L_1}^{L'_1} \circ \mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} \circ \cdot)^{-1})(B) = B$$

□

Aus der Wirkung 5.2.3 von $GL(V)$ auf $G_n(V)$ wird eine glatte Wirkung $Sp(V, \omega) \times \Lambda \rightarrow \Lambda$ induziert. Diese liefert die Natürlichkeit der Abbildungen des vorhergehenden Lemmas.

5.2.8 Lemma. *Für jeden Symplektomorphismus $\psi \in Sp(V, \omega)$ besteht ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} T_{L_0} \Lambda & \xrightarrow{d_{L_0} \hat{\psi}} & T_{\psi(L_0)} \Lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_{sym}(L_0) & \xrightarrow{\psi_*} & B_{sym}(\psi(L_0)) \end{array}$$

wobei die vertikalen Abbildungen die kanonischen Isomorphismen aus 5.2.7, $\hat{\psi} : \Lambda \rightarrow \Lambda$ der Diffeomorphismus mit $L \mapsto \psi(L)$ und die Abbildung ψ_* der Pushforward $B \mapsto B(\psi^{-1}, \psi^{-1})$ ist.

Beweis. Es genügt offenbar die Kommutativität des Diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_0(L_1) & \xrightarrow{\hat{\psi}} & \Lambda_0(\psi(L_1)) \\ \varphi_{L_0, L_1} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\psi(L_0), \psi(L_1)} \\ B_{sym}(L_0) & \xrightarrow{\psi_*} & B_{sym}(\psi(L_0)) \end{array}$$

nachzuweisen.

Mit den Projektoren $\pi_i : L_0 \oplus L_1 \rightarrow L_i$, $\tilde{\pi}_i : \psi(L_0) \oplus \psi(L_1) \rightarrow \psi(L_i)$, $i = 0, 1$ erhält man

$$\psi \circ \pi_i \circ \psi^{-1} = \tilde{\pi}_i, \quad i = 0, 1$$

und folglich ist auf $\psi(L_0)$

$$\begin{aligned} \psi \circ \pi_1 |_L \circ (\pi_0 |_L)^{-1} \circ \psi^{-1} &= (\psi \circ \pi_1 |_L \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ (\pi_0 |_L)^{-1} \circ \psi^{-1}) \\ &= (\psi \circ \pi_1 |_L \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \pi_0 |_L \circ \psi^{-1})^{-1} \\ &= \tilde{\pi}_1 |_{\psi(L)} \circ (\tilde{\pi}_0 |_{\psi(L)})^{-1} \end{aligned}$$

Damit ist aber für $L \in \Lambda_0(L_1)$

$$\begin{aligned} \psi_*(\varphi_{L_0, L_1}(L)) &= \psi_*(\omega(\pi_1 |_L \circ (\pi_0 |_L)^{-1}, \cdot) |_{L_0}) \\ &= \omega((\pi_1 |_L \circ (\pi_0 |_L)^{-1}) \circ \psi^{-1}, \psi^{-1} \cdot) |_{\psi(L_0)} \\ &= \omega(\psi^{-1} \circ \tilde{\pi}_1 |_{\psi(L)} \circ (\tilde{\pi}_0 |_{\psi(L)})^{-1}, \psi^{-1} \cdot) |_{\psi(L_0)} \\ &= \omega(\tilde{\pi}_1 |_{\psi(L)} \circ (\tilde{\pi}_0 |_{\psi(L)})^{-1}, \cdot) |_{\psi(L_0)} \\ &= \varphi_{\psi(L_0), \psi(L_1)}(\psi(L)) = (\varphi_{\psi(L_0), \psi(L_1)} \circ \hat{\psi})(L) \end{aligned}$$

und die Kommutativität des Diagramms nachgewiesen. □

Mit diesem Ergebnis ist zugleich die Ableitung der Abbildung

$$\hat{\psi} : \Lambda \rightarrow \Lambda; \quad L \mapsto \Psi(L)$$

als Pushforward-Operation bestimmt.

Die Wirkung von $Sp(V, \omega)$ auf Λ induziert zudem für jedes feste $L_0 \in \Lambda$ eine Abbildung

$$\kappa_{L_0} : Sp(V, \omega) \rightarrow \Lambda, \quad \kappa_{L_0}(\psi) = \psi(L_0)$$

5.2.9 Lemma. *Es ist $d_{id}\kappa_{L_0}(H) = \omega(H \cdot, \cdot) |_{L_0}$, $H \in sp(V, \omega)$.*

Beweis. Es sei $L_1 \subset V$ ein Lagrange-Unterraum mit $V = L_0 \oplus L_1$ und φ_{L_0, L_1} die zugehörige Karte um L_0 . Die Komposition der betrachteten Abbildung mit der gewählten Karte ist nun in einer Umgebung von $id \in Sp(V, \omega)$ auf der $\pi_0 \circ (\psi |_{L_0})$ invertierbar ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \psi &\mapsto (\varphi_{L_0, L_1} \circ \kappa_{L_0})(\psi) = \varphi_{L_0, L_1}(\psi(L_0)) \\ &= \mathcal{D}_{L_0, L_1} \circ \pi_1 |_{\psi(L_0)} \circ (\pi_0 |_{\psi(L_0)})^{-1} \\ &= \mathcal{D}_{L_0, L_1} \circ (\pi_1 \circ (\psi |_{L_0})) \circ (\pi_0 \circ (\psi |_{L_0}))^{-1} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} d_{id}\kappa_{L_0}(H) &= \mathcal{D}_{L_0, L_1} \circ \pi_1 \circ (H |_{L_0}) \circ (\pi_0 \circ id_{L_0})^{-1} \\ &\quad + \mathcal{D}_{L_0, L_1} \circ \pi_1 \circ (id_{L_0}) \circ (\pi_0 \circ H |_{L_0})^{-1} \\ &= \mathcal{D}_{L_0, L_1} \circ \pi_1 \circ H_{L_0} = \omega((\pi_1 \circ H) \cdot, \cdot) |_{L_0} = \omega(H \cdot, \cdot) |_{L_0} \end{aligned}$$

□

Unter Verwendung von Lie-Gruppenwirkungen kann nun eine Darstellung von Λ als homogener Raum gewonnen werden.

5.2.10 Satz. *Λ ist diffeomorph zu $U(n)/O(n)$.*

Beweis. Durch Wahl einer symplektischen Basis für (V, ω) kann die Aussage zunächst auf den Fall $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ reduziert werden. Nun besteht eine glatte Wirkung der Lie-Gruppe $Sp(n, \mathbb{R})$ auf Λ . Sind nun $L_0, L_1 \in \Lambda$ fest gewählt, so betrachte man Basen $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ von L_0 und L_1 , die jeweils bezüglich des euklidischen Skalarproduktes auf \mathbb{R}^{2n} orthonormal sind. Da aber ω_0 der Imaginärteil des hermiteschen Produktes ist und ω_0 auf L_0 und L_1 verschwindet, sind \mathcal{B}_0 und \mathcal{B}_1 auch Orthonormalbasen von $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ bezüglich des Hermiteschen Produktes. Folglich existiert ein Element aus $U(n)$, das \mathcal{B}_0 in \mathcal{B}_1 überführt und man erhält die Transitivität der Wirkung von $U(n) \subset Sp(n, \mathbb{R})$ auf Λ . Da aber der Stabilisator von $L_0 = \mathbb{R}^n \oplus \{0\}$ gerade durch $O(n) \subset U(n)$ gegeben ist, erhält man unmittelbar die Behauptung. □

5.2.11 Folgerung. *Λ ist zusammenhängend und kompakt.*

5.2.3 Die Untermannigfaltigkeiten $\Lambda_k(L_0) \subset \Lambda$

5.2.12 Definition. Es sei $L_0 \in \Lambda$ und $k \in \{0, \dots, n\}$ fest gewählt. Damit bezeichne

$$\Lambda_k(L_0) = \{L \in \Lambda : \dim(L \cap L_0) = k\} \subset \Lambda$$

sowie

$$\Lambda_{\leq k}(L_0) = \bigcup_{i=0}^k \Lambda_i(L_0), \quad \Lambda_{\geq k}(L_0) = \bigcup_{i=k}^n \Lambda_i(L_0)$$

Zunächst ist $\Lambda_0(L_0) \subset \Lambda$ als Kartengebiet offen und diffeomorph zum Vektorraum $B_{sym}(L_0)$. Das folgende Lemma liefert eine erste weitere topologische Beobachtung zu den gemachten Definitionen.

5.2.13 Lemma. Für jedes $k = 0, \dots, n$ ist $\Lambda_{\leq k}(L_0) \subset \Lambda$ offen und $\Lambda_{\geq k}(L_0) \subset \Lambda$ abgeschlossen.

Beweis. Für $L \in \Lambda_{\leq k}(L_0)$ wähle man einen Unterraum $W \in G_n(V)$ mit $V = L_0 \oplus W = L \oplus W$. Für eine lineare Abbildung $T \in \mathcal{L}(L_0, W)$ ist nun $\text{graph}(T) \cap L_0 = \ker(T)$. Da

$$U = \{T \in \mathcal{L}(L_0, W) : \dim(\ker(T)) \leq k\} \subset \mathcal{L}(L_0, W)$$

offen ist, erhält man mit $\Psi_{L_0, W}^{-1}(U)$ wegen $\dim(L \cap L_0) \leq k$ eine offene Umgebung von L in $G_n(V)$ die aus Unterräumen $W \in G_n(V)$ mit $\dim(W \cap L_0) \leq k$ besteht.

Da $\Lambda \subset G_n(V)$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit ist, ist folglich auch $\Lambda_{\leq k}(L_0) \subset \Lambda$ offen.

Die Aussage für $\Lambda_{\geq k}(L_0)$ ist für $k = 0$ klar und folgt für $k \geq 1$ aus $\Lambda_{\geq k}(L_0) = \Lambda \setminus \Lambda_{\leq k-1}(L_0)$. \square

Für $L_0 \in \Lambda$ bezeichne $Sp(V, \omega, L_0)$ die abgeschlossene Untergruppe von $Sp(V, \omega)$ die aus allen Elementen ψ mit $\psi(L_0) = L_0$ besteht und $Sp_+(V, \omega, L_0)$ die Untergruppe und Zusammenhangskomponente von $Sp(V, \omega, L_0)$ bestehend aus den ψ , deren Einschränkung auf L_0 orientierungserhaltend ist. Die Lie-Algebra $sp(V, \omega, L_0)$ beider Gruppen ist die Unter algebra von $sp(V, \omega)$ bestehend aus den Elementen $H \in sp(V, \omega)$ mit $H(L_0) \subset L_0$ ⁵. Die Motivation zur Einführung dieser Lie-Gruppen besteht in ihrer offensichtlichen Wirkung auf sämtlichen in letzterer Definition eingeführten Teilmengen von Λ .

5.2.14 Lemma. Für jedes $k \in \{0, \dots, n\}$ wirkt $Sp_+(V, \omega, L_0)$ transitiv auf $\Lambda_k(L_0)$.

Beweis. Mit 5.1.1 kann der Beweis zunächst nach geeigneter Wahl einer symplektischen Basis von (V, ω) auf den Fall $V = \mathbb{R}^{2n}$, $\omega = \omega_0$ und $L_0 = \mathbb{R}^n \oplus \{0\}$ reduziert werden. Es bezeichne hierbei $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ die kanonische Basis des \mathbb{R}^{2n} .

Für ein $L \in \Lambda$ mit $\dim(L \cap L_0) = k$ existiert eine Isometrie $\psi \in SO(n)$ des \mathbb{R}^n mit $\psi(L \cap L_0) = \mathbb{R}^k \oplus \{0\}$. Damit definiert die Komplexifizierung von ψ ein Element $\psi^{\mathbb{C}} \in Sp_+(V, \omega, L_0)$ mit $\psi^{\mathbb{C}}(L) \cap L_0 = \mathbb{R}^k \oplus \{0\}$.

Betrachte nun $L_1 = \text{span}\{e_1, \dots, e_k, e_{n+k+1}, \dots, e_{2n}\} \in \Lambda$. Mit $L_1 \cap L_0 = \mathbb{R}^k \oplus \{0\}$ genügt es

⁵Man beachte hierzu, dass bekanntlich $sp(V, \omega, L_0) = \{H \in sp(V, \omega) : \exp(tH) \in Sp(V, \omega, L_0)\}$

nun zu zeigen, dass zu jedem gegebenen Lagrange-Unterraum L mit $L \cap L_0 = \mathbb{R}^k \oplus \{0\}$ ein $\psi \in Sp_+(V, \omega, L_0)$ mit $\psi(L) = L_1$ existiert.

Hierfür sei

$$\begin{aligned} V_1 &= \text{span}\{e_1, \dots, e_k, e_{n+1}, \dots, e_{n+k}\} \\ V_2 &= \text{span}\{e_{k+1}, \dots, e_n, e_{n+k+1}, \dots, e_{2n}\} \\ S &= \text{span}\{e_1, \dots, e_n, e_{n+k+1}, \dots, e_{2n}\} \end{aligned}$$

Es ist S das orthogonale Komplement von $\mathbb{R}^k \oplus \{0\}$ bezüglich ω_0 , $\mathbb{R}^{2n} = V_1 \oplus V_2$ und ω_0 schränkt sich zu der kanonischen symplektischen Form auf $V_1 \cong \mathbb{R}^{2k}$ und $V_2 \cong \mathbb{R}^{2(n-k)}$ ein. Diese Einschränkungen werden daher im Folgenden auch mit ω_0 bezeichnet. Es bezeichne nun $\pi : S \rightarrow V_2$ die Einschränkung der Projektion $\mathbb{R}^{2n} = V_1 \oplus V_2 \rightarrow V_2$ auf S . Damit ist

$$\omega_0(\pi(x), \pi(y)) = \omega_0(x, y), \quad x, y \in S \quad (5.2.2)$$

Ist nun $L \in \Lambda$ mit $L \cap L_0 = \mathbb{R}^k \oplus \{0\}$, so ist $\text{span}\{e_1, \dots, e_k\} \subset L$ und mit $L \in \Lambda$ ist folglich $L \subset S$. Damit ist $\pi(L) \subset \pi(S)$ und mit $L \in \Lambda$ und (5.2.2) ist $\pi(L)$ isotrop. Wegen

$$\dim \pi(L) = \dim L - \dim \ker(\pi|_L) = n - \dim(L \cap V_1) = n - k = \frac{1}{2} \dim V_2$$

ist schließlich $\pi(L) \subset V_2$ Lagrange. Aus $L \cap L_0 = \mathbb{R}^k \oplus \{0\}$ erhält man außerdem $\pi(L) \cap \pi(L_0) = \{0\}$ und es ist

$$\mathbb{R}^{n-k} \oplus \pi(L) = V_2 \cong \mathbb{R}^{n-k} \oplus \mathbb{R}^{n-k}$$

Wegen 5.1.1 existiert nun ein Symplektomorphismus $\varphi : (V_2, \omega_0) \rightarrow (V_2, \omega_0)$ mit $\varphi|_{\mathbb{R}^{n-k} \oplus \{0\}} = id$ und $\varphi(\pi(L)) = \{0\} \oplus \mathbb{R}^{n-k} = \pi(L_1)$.

Definiere nun $\psi \in Sp(V, \omega)$ durch

$$\psi|_{V_1} = id, \quad \psi|_{V_2} = \varphi$$

Damit ist $\psi|_{L_0} = id$ und folglich $\psi \in Sp_+(V, \omega, L_0)$.

Mit $L \subset S$ ist $\psi(L) \subset \psi(S) = S$ und damit sind $\psi(L)$ und L_1 Unterräume von S . Da nun

$$\pi(\psi(L)) = \pi(\psi(\pi(L))) = \pi(\varphi(\pi(L))) = \pi(\pi(L_1)) = \pi(L_1)$$

und

$$\ker(\pi|_S) = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\} \subset \psi(L), L_1$$

ist schließlich $\psi(L) = L_1$. □

5.2.15 Folgerung. *Zu $L_0, L \in \Lambda$ existiert stets ein $L_1 \in \Lambda$ mit $V = L_0 \oplus L_1 = L \oplus L_1$. Insbesondere sind damit L_0 und L im Kartengebiet von φ_{L_0, L_1} enthalten.*

Beweis. Wie im Beweis des vorigen Satzes genügt es den Fall $(V, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ und $L_0 = \mathbb{R}^n \oplus \{0\}$ zu betrachten.

Es bezeichne $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ die kanonische Basis des \mathbb{R}^{2n} und mit $k = \dim(L_0 \cap L)$ sei

$$L_2 = \text{span}\{e_1, \dots, e_k, e_{n+k+1}, \dots, e_{2n}\}$$

Die Diagonale

$$\Delta = \{(v, v) \in \mathbb{R}^{2n} : v \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{2n}$$

ist ein Lagrange-Unterraum von \mathbb{R}^{2n} mit $L_0 \oplus \Delta = L_2 \oplus \Delta = \mathbb{R}^{2n}$.

Mit $L_2, L \in \Lambda_k(L_0)$ erhält man nun aus 5.2.14 ein $\psi \in Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, L_0)$ mit $\psi(L_2) = L$. Mit $L_1 = \psi(\Delta)$ ist folglich

$$\mathbb{R}^{2n} = \psi(L_0) \oplus \psi(\Delta) = L_0 \oplus L_1$$

$$\mathbb{R}^{2n} = \psi(L_2) \oplus \psi(\Delta) = L \oplus L_1$$

□

5.2.16 Satz. *Für jedes $k \in \{0, \dots, n\}$ und jedes $L_0 \in \Lambda$ ist $\Lambda_k(L_0)$ eine zusammenhängende, eingebettete glatte Untermannigfaltigkeit der Kodimension $\frac{1}{2}k(k+1)$ von Λ . Für jedes $L \in \Lambda_k(L_0)$ ist*

$$T_L \Lambda_k(L_0) = \{B \in B_{sym}(L) : B|_{L \cap L_0} = 0\}$$

Beweis. Es soll zunächst gezeigt werden, dass $\Lambda_k(L_0)$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von Λ ist. Hierzu ist $\Lambda_k(L_0)$ als ein Orbit der Wirkung von $Sp(V, \omega, L_0)$ jedenfalls eine immersierte Untermannigfaltigkeit von Λ , trägt aber damit nicht notwendig die von Λ induzierte Relativtopologie. Wegen [Var84, Theorem 2.9.7] ist ein Orbit aber genau dann eingebettet, wenn er lokal abgeschlossen, also Durchschnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge von Λ ist. Daher folgt diese erste Behauptung mit 5.2.13 aus $\Lambda_k(L_0) = \Lambda_{\leq k}(L_0) \cap \Lambda_{\geq k}(L_0)$.

Das nächste Ziel ist die Berechnung der Kodimension. Für einen beliebigen zu L_0 komplementären Lagrange-Unterraum L_1 betrachte man die Abbildung

$$F : GL(L_0) \times B_{sym}(L_1) \rightarrow Sp(V, \omega, L_0)$$

mit

$$\Psi = F(\alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha \text{ auf } L_0 \\ \alpha \circ \mathcal{D}_{L_1, L_0}^{-1} \circ \beta + \mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} \circ (\alpha^*)^{-1} \circ \mathcal{D}_{L_0, L_1} \text{ auf } L_1 \end{cases}$$

Hierbei sei $\alpha^* \in GL(L_0^*, \mathbb{R})$ die zu α duale Abbildung und β werde als lineare Abbildung $L_1 \rightarrow L_1^*$ aufgefasst. Es ist zunächst die Wohldefiniertheit der Abbildung nachzuweisen. Offenbar ist stets $\Psi(L_0) = L_0$. Für $\Psi = F(\alpha, \beta)$ genügt es nun $\omega(\Psi x, \Psi y) = \omega(x, y)$ in den Fällen $x \in L_0, y \in L_0$,

$x \in L_0, y \in L_1$ und $x \in L_1, y \in L_1$ nachzuweisen.

Da $L_0 \in \Lambda$ und $\Psi(L_0) = L_0$ ist zunächst $\omega(\Psi x, \Psi y) = 0 = \omega(x, y)$ für alle $x, y \in L_0$.

Für $x \in L_0, y \in L_1$ ist

$$\begin{aligned}
\omega(\Psi x, \Psi y) &= \omega(\alpha x, (\alpha \circ \mathcal{D}_{L_1, L_0}^{-1} \circ \beta + \mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} \circ (\alpha^*)^{-1} \circ \mathcal{D}_{L_0, L_1})y) \\
&= \omega(\alpha x, (\alpha \circ \mathcal{D}_{L_1, L_0}^{-1} \circ \beta)y) + \omega(\alpha x, (\mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} \circ (\alpha^*)^{-1} \circ \mathcal{D}_{L_0, L_1})y) \\
&= \omega(\alpha x, (\mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} \circ (\alpha^*)^{-1} \circ \mathcal{D}_{L_0, L_1})y) \\
&= \omega(\alpha x, \mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1}(\omega(y, \alpha^{-1} \cdot) |_{L_0})) = -\omega(\mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1}(\omega(y, \alpha^{-1} \cdot) |_{L_0}), \alpha x) \\
&= -\omega(y, x) = \omega(x, y)
\end{aligned}$$

Für $x, y \in L_1$ ist

$$\begin{aligned}
\omega(\Psi x, \Psi y) &= \omega((\alpha \circ \mathcal{D}_{L_1, L_0}^{-1} \circ \beta)x, (\alpha \circ \mathcal{D}_{L_1, L_0}^{-1} \circ \beta)y) \\
&\quad + \omega((\alpha \circ \mathcal{D}_{L_1, L_0}^{-1} \circ \beta)x, (\mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} \circ (\alpha^*)^{-1} \circ \mathcal{D}_{L_0, L_1})y) \\
&\quad + \omega((\mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} \circ (\alpha^*)^{-1} \circ \mathcal{D}_{L_0, L_1})x, (\alpha \circ \mathcal{D}_{L_1, L_0}^{-1} \circ \beta)y) \\
&\quad + \omega((\mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} \circ (\alpha^*)^{-1} \circ \mathcal{D}_{L_0, L_1})x, (\mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} \circ (\alpha^*)^{-1} \circ \mathcal{D}_{L_0, L_1})y) \\
&= \omega((\alpha \circ \mathcal{D}_{L_1, L_0}^{-1} \circ \beta)x, (\mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} \circ (\alpha^*)^{-1} \circ \mathcal{D}_{L_0, L_1})y) \\
&\quad + \omega((\mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} \circ (\alpha^*)^{-1} \circ \mathcal{D}_{L_0, L_1})x, (\alpha \circ \mathcal{D}_{L_1, L_0}^{-1} \circ \beta)y) \\
&= \omega(\alpha(\mathcal{D}_{L_1, L_0}^{-1}(\beta(x))), \mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1}(\omega(y, \alpha^{-1} \cdot) |_{L_0})) \\
&\quad + \omega(\mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1}(\omega(x, \alpha^{-1} \cdot) |_{L_0}), \alpha(\mathcal{D}_{L_1, L_0}^{-1}(\beta(y)))) \\
&= -\omega(\mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1}(\omega(y, \alpha^{-1} \cdot) |_{L_0}), \alpha(\mathcal{D}_{L_1, L_0}^{-1}(\beta(x)))) \\
&\quad + \omega(\mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1}(\omega(x, \alpha^{-1} \cdot) |_{L_0}), \alpha(\mathcal{D}_{L_1, L_0}^{-1}(\beta(y)))) \\
&= -\omega(y, \mathcal{D}_{L_1, L_0}^{-1}(\beta(x))) + \omega(x, \mathcal{D}_{L_1, L_0}^{-1}(\beta(y))) \\
&= \omega(\mathcal{D}_{L_1, L_0}^{-1}(\beta(x)), y) - \omega(\mathcal{D}_{L_1, L_0}^{-1}(\beta(y)), x) \\
&= (\beta(x))(y) - (\beta(y))(x) = 0
\end{aligned}$$

wobei für die letzte Gleichheit $\beta \in B_{sym}(L_1)$ verwendet wurde.

Folglich ist die Abbildung F wohldefiniert. Zudem ist sie offensichtlich glatt, und durch

$$\begin{aligned}
Sp(V, \omega, L_0) &\rightarrow GL(L_0) \times B_{sym}(L_1) \\
\Psi &\mapsto (\Psi |_{L_0}, \mathcal{D}_{L_1, L_0} \circ (\Psi |_{L_0})^{-1} \circ (\Psi |_{L_1} - \mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1} \circ (\Psi |_{L_0}^*)^{-1} \circ \mathcal{D}_{L_0, L_1}))
\end{aligned}$$

erhält man eine ebenfalls glatte Umkehrabbildung. Damit ist schließlich

$$F : GL(L_0) \times B_{sym}(L_1) \rightarrow Sp(V, \omega, L_0)$$

ein Diffeomorphismus und man erhält

$$\dim Sp(V, \omega, L_0) = n^2 + \frac{1}{2}n(n+1) \tag{5.2.3}$$

Nun ist $F(GL_+(L_0) \times B_{sym}(L_1)) = Sp_+(V, \omega, L_0)$, wobei $GL_+(L_0)$ die Gruppe der orientierungserhaltenden Isomorphismen von L_0 bezeichne. Damit ist $Sp_+(V, \omega, L_0)$ und wegen 5.2.14 auch $\Lambda_k(L_0)$ zusammenhängend.

Zur Berechnung der Kodimension von $\Lambda_k(L_0)$ in Λ sei $S \subset L_0$ ein k -dimensionaler Unterraum und $S' = \mathcal{D}_{L_0, L_1}^{-1}(\text{Ann}(S, L_0^*)) \subset L_1$, wobei $\text{Ann}(S, L_0^*)$ den Annulator von $S \subset L_0$ in L_0^* bezeichne. Damit ist aber $L = S \oplus S' \subset V$ Lagrange und $L \in \Lambda_k(L_0)$. Der Stabilisator von L bezüglich der Wirkung von $Sp(V, \omega, L_0)$ ist nun

$$\text{Stab}(L) = F(\{(\alpha, \beta) \in GL(L_0) \times B_{sym}(L_1) : \alpha(S) \subset S, \beta|_{S'} = 0\})$$

Mit $\dim(\{\alpha \in GL(L_0) : \alpha(S) \subset S\}) = k^2 + n(n-k)$ ist

$$\dim(\text{Stab}(L)) = k^2 + n(n-k) + \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1) = n^2 + \frac{1}{2}k(k+1)$$

und man erhält aus (5.2.3)

$$\dim(\Lambda_k(L_0)) = \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}k(k+1) \quad (5.2.4)$$

und damit aus 5.2.5 den gewünschten Wert für die Kodimension von $\Lambda_k(L_0)$ in Λ .

Zur Berechnung des Tangentialraums sei $L \in \Lambda_k(L_0)$ fest gewählt. Mit 5.2.9 ist

$$T_L \Lambda_k(L_0) = d_{id} \kappa_L(sp(V, \omega, L_0)) = \{\omega(H \cdot, \cdot)|_L : H \in sp(V, \omega, L_0)\}$$

Wegen $H(L_0) \subset L_0$ für $H \in sp(V, \omega, L_0)$ und $L_0 \in \Lambda$ verschwinden aber die Elemente aus $T_L \Lambda_k(L_0)$ auf $L_0 \cap L$ und es ist $T_L \Lambda_k(L_0) \subset \{B \in B_{sym}(L) : B|_{L \cap L_0} = 0\}$. Mit (5.2.4) und $\dim(L \cap L_0) = k$ ist jedoch

$$\dim(T_L \Lambda_k(L_0)) = \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}k(k+1) = \dim\{B \in B_{sym}(L) : B|_{L \cap L_0} = 0\}$$

und folglich die Gleichheit beider Räume gezeigt. \square

Die nachstehende Bemerkung ist von besonderer Bedeutung für die Definition des Maslov Index.

5.2.17 Bemerkung. Für $L_0 \in \Lambda$ hat die Untermannigfaltigkeit $\Lambda_1(L_0)$ Kodimension 1 in Λ . Hiermit kann auf folgende Weise eine **transversale Orientierung** für $\Lambda_1(L_0)$ in Λ definiert werden: Für jedes $L \in \Lambda_1(L_0)$ ist wegen 5.2.16 $T_L \Lambda_1(L_0) = \{B \in B_{sym}(L) : B|_{L \cap L_0} = 0\}$. Ein Vektor $B \in B_{sym}(L) \cong T_L \Lambda$ sei nun positiv, falls B positiv definit auf dem eindimensionalen Raum $L \cap L_0$ ist.

Zudem ist diese transversale Orientierung natürlich in dem Sinne, dass für jedes $\psi \in Sp(V, \omega, L_0)$ der Diffeomorphismus $L \mapsto \psi(L)$ von Λ orientierungserhaltend ist. Dies erhält man unter Ver-

wendung von 5.2.7 unmittelbar aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
T_L \Lambda & \xrightarrow{d\hat{\psi}_L} & T_{\psi(L)} \Lambda \\
\cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
B_{sym}(L) & \xrightarrow{\psi_*} & B_{sym}(\psi(L)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
B_{sym}(L \cap L_0) & \xrightarrow{(\psi|_{L \cap L_0})_*} & B_{sym}(\psi(L) \cap L_0)
\end{array}$$

Gewöhnlicherweise ist für eine Untermannigfaltigkeit N einer Mannigfaltigkeit M eine transversale Orientierung als eine Orientierung des Normalenbündels $\iota^*(TM)/TN$ definiert. Die hier gegebene Definition kann nun mit dieser zusammengeführt werden. Die Abbildung

$$T_L \Lambda \cong B_{sym}(L) \ni B \mapsto B|_{L_0 \cap L} \in B_{sym}(L_0 \cap L)$$

ist linear und surjektiv. Zudem ist wegen 5.2.16 der Kern dieser Abbildung gerade durch $T_L \Lambda_k(L_0)$ gegeben. Folglich induziert sie einen kanonischen Isomorphismus

$$T_L \Lambda / T_L \Lambda_k(L_0) \xrightarrow{\cong} B_{sym}(L \cap L_0)$$

der mit der bereits definierten positiven Basis von $B_{sym}(L \cap L_0)$ zur Orientierung des Normalenbündels verwendet werden kann.

5.2.18 Bemerkung. In 5.2.16 wurde der Tangentialraum $T_L \Lambda_k(L_0)$ mit einem Unterraum von $B_{sym}(L)$ identifiziert, wobei $B_{sym}(L)$ mit $T_L \Lambda$ gemäß 5.2.7 durch das Differential einer Karte φ_{L,L_1} identifiziert ist. Bei der Beschäftigung mit Kurven $l(t)$ in Λ ist es nun bei der Betrachtung der Tangentialräume $T_{l(t)} \Lambda$ vorteilhaft mit einer festen Karte φ_{L_0,L_1} statt mit den variierenden Karten $\varphi_{l(t),L_1}$ zu arbeiten.

Aus 5.2.6 ist bekannt, dass für $L_0, L_1, L \in \Lambda$ mit $V = L_0 \oplus L_1 = L \oplus L_1$ die Kartenwechselabbildung durch

$$\begin{aligned}
B_{sym}(L_0) \ni B \mapsto \varphi_{L,L_1} \circ (\varphi_{L_0,L_1})^{-1}(B) &= \varphi_{L,L_1}(L_0) + (\eta_{L,L_0}^{L_1})^*(B) \\
&= \varphi_{L,L_1}(L_0) + ((\eta_{L_0,L}^{L_1})^{-1})^*(B) \\
&= \varphi_{L,L_1}(L_0) + (\eta_{L_0,L}^{L_1})^*(B) \in B_{sym}(L)
\end{aligned}$$

gegeben ist. Folglich ist

$$d_B(\varphi_{L,L_1} \circ (\varphi_{L_0,L_1})^{-1}) = (\eta_{L_0,L}^{L_1})^* \quad \text{für alle } B \in B_{sym}(L_0)$$

und damit

$$d_{L_2} \varphi_{L,L_1} = (\eta_{L_0,L}^{L_1})^* d_{L_2} \varphi_{L_0,L_1} \quad \text{für alle } L_2 \in \Lambda_0(L_1) \quad (5.2.5)$$

Dieses Ergebnis hat nun wichtige Konsequenzen, von denen insbesondere die Erste die eingangsmachte Bemerkung aufgreift und für die Definition des Maslov Index benötigt wird.

1. Es sei $t \mapsto l(t) \in \Lambda$ eine bei t_0 differenzierbare Kurve und $V = L_0 \oplus L_1$ eine Zerlegung von V in Lagrange-Unterräume, so dass $l(t_0) \in \Lambda_0(L_1)$. Da $\Lambda_0(L_1) \subset \Lambda$ offen ist, ist nun $l(t) \in \Lambda_0(L_1)$ in einer Umgebung von t_0 und man kann eine Kurve

$$\beta(t) = \varphi_{L_0, L_1}(l(t)) \in B_{sym}(L_0)$$

in dieser Umgebung definieren. Aus (5.2.5) erhält man

$$\beta'(t_0) = d_{l(t_0)}\varphi_{L_0, L_1} \cdot l'(t_0) = (\eta_{l(t_0), L_0}^{L_1})^*(d_{l(t_0)}\varphi_{l(t_0), L_1}(l'(t_0)))$$

Da aber $(\eta_{l(t_0), L_0}^{L_1})|_{L \cap L_0} = id$, stimmen die symmetrischen Bilinearformen $\beta'(t_0) \in B_{sym}(L_0)$ und unter der kanonischen Identifizierung $l'(t_0) \in B_{sym}(l(t_0))$ auf $L_0 \cap l(t_0)$ überein.

2. Mit (5.2.5) ist

$$d_L\varphi_{L, L_1} = (\eta_{L_0, L}^{L_1})^* \circ d_L\varphi_{L_0, L_1}$$

und unter Beachtung von $(\eta_{L_0, L}^{L_1})|_{L \cap L_0} = id$ erhält man nun mit 5.2.16

$$\begin{aligned} d_L\varphi_{L_0, L_1}(T_L\Lambda_k(L_0)) &= \eta^*(d_L\varphi_{L, L_1}(T_L\Lambda_k(L_0))) \\ &= \{B \in B_{sym}(L_0) : B|_{L \cap L_0} = 0\} \end{aligned}$$

Man vergleiche diese Darstellung mit 5.2.16.

3. Da der Pullback einer positiv definiten Bilinearform stets wieder positiv definit ist, ist mit (2) für ein $L \in \Lambda_1(L_0)$ und $B \in B_{sym}(L_0)$ das Element $(d_L\varphi_{L_0, L_1})^{-1}(B)$ genau dann positiv in der transversalen Orientierung von $\Lambda_1(L_0)$, wenn B positiv definit auf $L \cap L_0$ ist.

5.3 Definition des Maslov Index

In diesem Abschnitt soll schließlich der Maslov Index definiert und seine zentralen Eigenschaften präsentiert werden. Zuvor sind noch einige Grundlagen allgemeiner Natur bereitzustellen, die aus dem Bereich der Linearen Algebra und der Algebraischen Topologie kommen. Zu ersterem Thema werden wichtige Resultate zu Bilinearformen endlichdimensionaler Vektorräume zusammengestellt und abschließend ein entscheidender Satz über stetig differenzierbare Wege Solcher bewiesen. Bezüglich der Algebraischen Topologie wird eine elementare Betrachtung zu Wegen in topologischen Räumen X mit Endpunkten innerhalb eines Unterraumes $A \subset X$ und der ersten relativen singulären Homologiegruppe $H_1(X, A)$ vorgenommen. Die gesamte Darstellung dieses Kapitels ist überwiegend an [PT00a] statt wie bisher [MPT00] orientiert.

5.3.1 Vorbereitungen

Lineare Algebra

Zur Definition des Maslov Index sind weitere Eigenschaften des Raumes $B_{sym}(V)$ von Bedeutung. Hierzu sei für $B \in B_{sym}(V)$

$$n_-(B) = \sup\{\dim(W) : W \subset V, W \text{ Unterraum, } B|_W \text{ negativ definit}\} = i_{Morse}(B)$$

$$n_+(B) = n_-(-B)$$

$$\ker(B) = \{v \in V : B(v, w) = 0 \forall w \in V\}$$

$$\text{dgn}(B) = \dim \ker(B)$$

$$\text{sgn}(B) = n_+(B) - n_-(B)$$

Es sei zudem an den Sylvesterschen Trägheitssatz erinnert, wonach für jedes $B \in B_{sym}(V)$ stets eine Basis von V existiert bezüglich der die Matrixdarstellung von B durch

$$\begin{pmatrix} id_{p \times p} & 0_{p \times q} & 0_{p \times r} \\ 0_{q \times p} & -id_{q \times q} & 0_{q \times r} \\ 0_{r \times p} & 0_{r \times q} & 0_{r \times r} \end{pmatrix}$$

gegeben ist und die Zahlen p, q, r eindeutig durch B mit $p = n_+(B)$, $q = n_-(B)$ und $r = \text{dgn}(B)$ bestimmt sind. Insbesondere ist $n_+(B) + n_-(B) + \text{dgn}(B) = \dim V$.

Zur näheren Betrachtung topologischer Eigenschaften von $B_{sym}(V)$ betrachte man nun die Norm⁶

$$\|B\| = \sup_{\|v\| \leq 1, \|w\| \leq 1} |B(v, w)|$$

wobei eine beliebige Norm auf V verwendet werde.

⁶Bekanntlich ist im Hinblick auf topologische Fragestellungen die genaue Wahl der Norm belanglos.

5.3.1 Lemma. Für jedes $k \in \{0, \dots, \dim(V)\}$ sind

$$\begin{aligned} &\{B \in B_{sym}(V) : n_-(B) \geq k\} \subset B_{sym}(V) \text{ und} \\ &\{B \in B_{sym}(V) : \text{dgn}(B) = 0, n_-(B) = k\} \subset B_{sym}(V) \end{aligned}$$

offen.

Beweis. Zum Beweis der ersten Aussage sei $B \in B_{sym}(V)$ mit $n_-(B) \geq k$ gegeben. Nach Definition existiert ein k -dimensionaler Unterraum $W \subset V$, auf dem B negativ definit ist. Wegen der Kompaktheit der Einheitskugel von W ist

$$\sup_{v \in W, \|v\|=1} B(v, v) = c < 0$$

und folglich jedes $A \in B_{sym}(V)$ mit $\|A - B\| < \frac{|c|}{2}$ negativ definit auf W , also $n_-(A) \geq k$.

Zum Beweis der zweiten Aussage sei $B \in B_{sym}(V)$, $\text{dgn}(B) = 0$ und $n_-(B) = k$, also $n_+(B) = \dim(V) - k$. Wegen der ersten Aussage findet man nun eine Umgebung um B in $B_{sym}(V)$ mit $n_-(A) \geq k$ und $n_+(A) = n_-(-A) \geq \dim(V) - k$. Somit ist aber in dieser Umgebung $n_-(A) = k$ und $\text{dgn}(A) = 0$. \square

Die Pushforward-Operation liefert eine Wirkung der Gruppe $GL(V)$ auf $B_{sym}(V)$ durch

$$GL(V) \times B_{sym}(V) \ni (T, B) \mapsto T_*(B) = B(T^{-1}\cdot, T^{-1}\cdot) \in B_{sym}(V)$$

und wegen des Sylvesterschen Trägheitssatzes sind die Orbits dieser Wirkung

$$B_{sym}^{p,q}(V) = \{B \in B_{sym}(V) : n_+(B) = p, n_-(B) = q\}, \quad p + q = 0, 1, \dots, \dim(V)$$

Wählt man nun eine Orientierung für V , und ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis wie im Sylvesterschen Trägheitssatz, so kann man nach eventuellem Wechsel zu $\{-b_1, \dots, b_n\}$ stets eine solche Basis positiv in der gewählten Orientierung wählen. Damit hat aber die Einschränkung obiger Wirkung auf $GL_+(V) \times B_{sym}(V)$ ebenfalls die Mengen $B_{sym}^{p,q}$ als Orbits, und es ist jedes $B_{sym}^{p,q}$ zusammenhängend. Zusammen mit 5.3.1 erhält man

5.3.2 Lemma. Die Menge aller nicht entarteten symmetrischen Bilinearformen auf V ist eine offene Teilmenge von $B_{sym}(V)$, deren Zusammenhangskomponenten die Mengen

$$B_{sym}^{k, n-k}(V), \quad k = 0, \dots, n = \dim(V)$$

sind.

Abschließend ein im Folgenden sehr wichtiges Resultat über die Evolution von n_+, n_- entlang hinreichend gutartiger Wege in $B_{sym}(V)$.

5.3.3 Lemma. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $A \in C^1([0, r], B_{sym}(V))$. Zudem sei $\tilde{A} = A'(0)|_{\ker(A(0))}$ nicht entartet. Dann ist für jedes hinreichend kleine $t > 0$ auch $A(t)$ nicht entartet und es gilt

$$n_+(A(t)) = n_+(A(0)) + n_+(\tilde{A}), \quad n_-(A(t)) = n_-(A(0)) + n_-(\tilde{A}) \quad (5.3.1)$$

Beweis. Es bezeichne $N = \ker(A(0))$. Der Beweis wird zur besseren Lesbarkeit in drei Fälle gegliedert.

1.Fall: $N = V$, \tilde{A} **positiv definit** Unter der vorausgesetzten positiven Definitheit von $A'(0)$ und der Kompaktheit der Einheitskugel in V ist

$$c = \inf_{x \in V, \|x\|=1} A'(0)(x, x) > 0$$

Wegen der vorausgesetzten Differenzierbarkeit existiert nun ein $\varepsilon > 0$ und eine stetige Funktion $r : [0, \varepsilon) \rightarrow B_{sym}(V)$ mit

$$A(t) = tA'(0) + r(t), \quad \text{und } \|r(t)\| \leq \frac{c}{2}t, \quad t \in [0, \varepsilon)$$

Damit ist aber für $x \in V$ mit $\|x\| = 1$

$$A(t)(x, x) = tA'(0)(x, x) + r(t)(x, x) \geq ct - \frac{c}{2}t = \frac{c}{2}t, \quad t \in [0, \varepsilon)$$

und folglich $A(t)$ für alle $t \in (0, \varepsilon)$ positiv definit.

2.Fall: $N \neq V$, $A(0)$ **positiv semidefinit**, \tilde{A} **positiv definit** Es sei $\{0\} \neq S \subset V$ ein zu N komplementärer Unterraum, so dass $A(0)$ positiv definit auf S ist. Es ist zu zeigen, dass $A(t)$ für hinreichend kleines $t > 0$ positiv definit auf $V = N \oplus S$ ist. Da $A(0)$ positiv definit auf S ist, existiert mit 5.3.2 ein $\varepsilon > 0$, so dass $A(t)$ für alle $t \in [0, \varepsilon)$ auf S positiv definit ist. Man definiere nun unter Verwendung der Kompaktheit der Einheitssphären

$$c_0 = \inf_{x \in S, \|x\|=1} A(0)(x, x) > 0, \quad c_1 = \inf_{y \in N, \|y\|=1} A'(0)(y, y) > 0$$

Wegen der Stetigkeit von A existiert nun ein $\varepsilon > 0$, so dass $\|A(t) - A(0)\| \leq \frac{c_0}{2}$ für $t \in [0, \varepsilon)$ und folglich ist

$$\inf_{x \in S, \|x\|=1} A(t)(x, x) \geq \frac{c_0}{2} > 0, \quad \forall t \in [0, \varepsilon) \quad (5.3.2)$$

Nach eventueller Verkleinerung von $\varepsilon > 0$ existiert wegen der Differenzierbarkeit von A bei 0 eine stetige Abbildung $r : [0, \varepsilon) \rightarrow B_{sym}(V)$ mit

$$A(t) = A(0) + tA'(0) + r(t), \quad \text{und } \|r(t)\| \leq \frac{c_1}{2}t \quad \text{für } t \in [0, \varepsilon) \quad (5.3.3)$$

Damit ist für $y \in N$ mit $\|y\| = 1$

$$A(t)(y, y) = tA'(0)(y, y) + r(t)(y, y) \geq tc_1 - \frac{c_1}{2}t = \frac{c_1}{2}t, \quad t \in [0, \varepsilon) \quad (5.3.4)$$

Also ist $A(t)$ für $t \in (0, \varepsilon)$ auf N und auf S positiv definit.

Wegen $V = N \oplus S$ genügt es nun zu zeigen, dass für $x \in S, y \in N$ stets $A(t)$ auf $\text{span}\{x, y\}$

positiv definit ist. Hierfür seien $x \in S, y \in N$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$. Dann ist mit $c_2 = \|A'(0)\| + \frac{c_1}{2}$ wegen (5.3.3) für $t \in [0, \varepsilon)$

$$|A(t)(x, y)| \leq |A(0)(x, y)| + t|A'(0)(x, y)| + |r(t)(x, y)| \leq t\|A'(0)\| + \frac{c_1}{2}t = c_2t$$

und nach weiterer eventueller Verkleinerung von $\varepsilon > 0$ erhält man hieraus mit (5.3.2) und (5.3.4)

$$A(t)(x, y)^2 \leq c_2^2 t^2 < \frac{1}{4}c_0 c_1 t \leq A(t)(x, x)A(t)(y, y), \quad t \in (0, \varepsilon)$$

Damit ist aber für $0 \neq \alpha x + \beta y \in \text{span}\{x, y\}$ und $t \in (0, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} A(t)(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) &= \alpha^2 A(t)(x, x) + \beta^2 A(t)(y, y) + 2\alpha\beta A(t)(x, y) \\ &\geq \alpha^2 A(t)(x, x) + \beta^2 A(t)(y, y) - 2|\alpha||\beta||A(t)(x, y)| \\ &> \alpha^2 A(t)(x, x) + \beta^2 A(t)(y, y) - 2|\alpha||\beta|\sqrt{A(x, x)A(y, y)} \\ &= (|\alpha|\sqrt{A(x, x)} - |\beta|\sqrt{A(y, y)})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

und folglich $A(t)$ positiv definit auf $\text{span}\{x, y\}$.

Allgemeiner Fall Für den allgemeinen Fall betrachte man nun eine Zerlegung $V = S_+ \oplus S_- \oplus N$, wobei $N = N_+ \oplus N_-$, $A(0)$ positiv definit auf S_+ , negativ definit auf S_- und $A'(0)$ positiv definit auf N_+ und negativ definit auf N_- ist. Nun kann das Resultat der ersten Fälle sowohl auf die Einschränkung von $A(t)$ auf $S_+ \oplus N_+$ als auch auf die Einschränkung von $-A(t)$ auf $S_- \oplus N_-$ angewendet werden. Damit ist aber für $t > 0$ hinreichend klein $A(t)$ positiv definit auf $S_+ \oplus N_+$ und negativ definit auf $S_- \oplus N_-$, womit $n_+(A(t)) = \dim(S_+ \oplus N_+)$ und $n_-(A(t)) = \dim(S_- \oplus N_-)$. Also ist insbesondere auch $A(t)$ für diese $t > 0$ nicht entartet und es gelten die behaupteten Gleichungen (5.3.1). \square

5.3.4 Bemerkung. Der hier betrachtete erste Fall findet weder in [MPT00] noch in [PT00a] Erwähnung. Die Bedingung $S \neq \{0\}$ scheint aber im zweiten Fall unverzichtbar zu sein.

Wege in Homologie

Für ein Paar (X, A) topologischer Räume bezeichne $(S(X, A), \partial)$ den relativen singulären Kettenkomplex, $Z_p(X, A) = \ker(\partial_p)$ die q -te Zyklengruppe und $B_p(X, A) = \text{im}(\partial_{p+1})$ die $q - te$ Rändergruppe. Für die von der Identität auf X induzierte Abbildung $q : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ ist die zugehörige Kettenabbildung $q_\bullet : S(X) \rightarrow S(X, A)$ bekanntlich die Quotientenabbildung. Mit

$$Z_p(X, A) = q_\bullet^{-1}(Z_p(X, A)), \quad B_p(X, A) = q_\bullet^{-1}(B_p(X, A))$$

ist

$$\begin{aligned} Z_p(X, A) &= \{c \in S_p(X) : \partial c \in S_{p-1}(A)\} = \partial^{-1}(S_{p-1}(A)) \\ B_p(X, A) &= \{\partial c + d \in S_p(X) : c \in S_{p+1}(X), d \in S_p(A)\} = B_p(X) + S_p(A) \end{aligned}$$

und damit insbesondere

$$Z_p(X, A) = \mathcal{Z}_p(X, A)/S_p(A), \quad B_p(X, A) = \mathcal{B}_p(X, A)/S_p(A)$$

Somit erhält man aus elementarer Algebra einen kanonischen Isomorphismus

$$H_p(X, A) = H_p(S(X, A)) \cong \mathcal{Z}_p(X, A)/\mathcal{B}_p(X, A)$$

der im Folgenden die Argumentationen deutlich vereinfacht.

Es bezeichne nun Δ_1 das eindimensionale Standardsimplex und für $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $l(v_1, v_2)$ das singuläre Simplex definiert durch $l(v_1, v_2)(t_1 e_1 + t_2 e_2) = t_1 v_1 + t_2 v_2$. Ist speziell $l(v_1, v_2)(\Delta_1) = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so sei $l(a, b) := l(v_1, v_2)$.

Für einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ mit $\gamma(a), \gamma(b) \in A$ ist nun $\gamma \circ l(a, b) : \Delta_1 \rightarrow X$ ein singuläres 1-Simplex mit $\partial(\gamma \circ l(a, b)) \in S_0(A)$ und definiert folglich ein Element $[\gamma] \in H_1(X, A)$. Diese Zuweisung einer Homologiekategorie zu einem Weg soll in diesem Abschnitt in aller Kürze betrachtet werden.

5.3.5 Lemma. *Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ stetig mit $\gamma(a), \gamma(b) \in A$ und $\sigma : [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig mit $\sigma(\{c, d\}) = \{a, b\}$. Dann ist*

- $[\gamma \circ \sigma] = [\gamma] \in H_1(X, A)$ falls $\sigma(c) = a, \sigma(d) = b$ und
- $[\gamma \circ \sigma] = -[\gamma] \in H_1(X, A)$ falls $\sigma(d) = a, \sigma(c) = b$.

Beweis. Es sei $\sigma(a) = c, \sigma(b) = d$. Damit ist $\partial(l(a, b) - \sigma \circ l(c, d)) = 0$ und folglich

$$l(a, b) - \sigma \circ l(c, d) \in Z_1([a, b]) = B_1([a, b])$$

Damit ist aber

$$\gamma \circ l(a, b) - \gamma \circ \sigma \circ l(c, d) = \gamma \bullet (l(a, b) - \sigma \circ l(c, d)) \in B_1(X) \subset \mathcal{B}_1(X, A)$$

und somit $[\gamma \circ \sigma] = [\gamma] \in H_1(X, A)$.

Die zweite Behauptung kann mit $l(a, b) + \sigma \circ l(c, d) \in Z_1([a, b]) = B_1([a, b])$ vollkommen analog erhalten werden. \square

5.3.6 Lemma. *Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ mit Endpunkten in A .*

1. *Ist $\eta : [c, d] \rightarrow X$ mit Endpunkten in A und $\gamma(b) = \eta(c)$, so ist $[\gamma * \eta] = [\gamma] + [\eta]$*
2. $[\gamma^{-1}] = -[\gamma]$
3. *Ist $\gamma([a, b]) \subset A$, so ist $[\gamma] = 0 \in H_1(X, A)$.*

Beweis. Wegen 5.3.5 kann angenommen werden, dass $\gamma : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow X, \eta : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow X$. Nun ist $l(0, \frac{1}{2}) + l(\frac{1}{2}, 1) - l(0, 1) \in Z_1([0, 1]) = B_1([0, 1])$ und somit

$$\begin{aligned} & \gamma \circ l(0, \frac{1}{2}) + \eta \circ l(\frac{1}{2}, 1) - \gamma * \eta \circ l(0, 1) \\ &= (\gamma * \eta) \bullet (l(0, \frac{1}{2}) + l(\frac{1}{2}, 1) - l(0, 1)) \in B_1(X) \subset \mathcal{B}_1(X, A) \end{aligned}$$

Folglich ist aber $[\gamma * \eta] = [\gamma] + [\eta]$.

Die zweite Aussage ist eine unmittelbare Folgerung aus 5.3.5.

Die letzte Aussage folgt aus $\gamma \circ l(a, b) \in \mathcal{B}_1(X, A)$ □

5.3.7 Lemma. *Es sei $H : [0, 1] \times ([a, b], \{a, b\}) \rightarrow (X, A)$ eine Homotopie von Raumpaaren. Dann ist*

$$[H(0, \cdot)] = [H(1, \cdot)]$$

Beweis. Zunächst ist

$$\begin{aligned} & l((0, b), (0, a)) + l((0, a), (1, a)) + l((1, a), (1, b)) \\ & + l((1, b), (0, b)) \in Z_1([0, 1] \times [a, b]) = B_1([0, 1] \times [a, b]) \end{aligned}$$

und somit gilt

$$\begin{aligned} & H \circ l((0, b), (0, a)) + H \circ l((0, a), (1, a)) + H \circ l((1, a), (1, b)) \\ & + H \circ l((1, b), (0, b)) \in B_1(X) \end{aligned}$$

Damit ist aber unter Verwendung von 5.3.6

$$\begin{aligned} [H(1, \cdot)] - [H(0, \cdot)] &= [H \circ l((1, a), (1, b))] - [H \circ l((0, a), (0, b))] \\ &= [H \circ l((1, a), (1, b))] + [H \circ l((0, b), (0, a))] \\ &= [H \circ l((0, b), (0, a))] + [H \circ l((0, a), (1, a))] \\ &+ [H \circ l((1, a), (1, b))] + [H \circ l((1, b), (0, b))] = 0 \in H_1(X, A) \end{aligned}$$

□

5.3.2 Maslov Index

Man betrachte den Lie-Gruppenhomomorphismus

$$d = \det^2 : U(n) \rightarrow S^1$$

Da offenbar $O(n) \subset \ker d$ induziert dieser eine Abbildung

$$\bar{d} : U(n)/O(n) \rightarrow S^1 \tag{5.3.5}$$

durch $\bar{d}(A \cdot O(n)) = \det^2(A)$.

5.3.8 Lemma. *Die Abbildung (5.3.5) induziert einen Isomorphismus*

$$\bar{d}_* : \pi_1(U(n)/O(n)) \xrightarrow{\cong} \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

Beweis. Da $\bar{d} : U(n)/O(n) \rightarrow S^1$ ein Faserbündel mit Standardfaser $\ker(d)/O(n)$ ist, genügt es wegen der langen exakten Sequenz des Faserbündels zu zeigen, dass $\ker(d)/O(n)$ einfach zusammenhängend ist.

Zunächst besteht eine durch die Inklusion induzierte transitive Wirkung von $SU(n)$ auf $\ker(d)/O(n)$. Nun ist $\text{Stab}(Id \cdot O(n)) = SU(n) \cap O(n) = SO(n)$ und folglich hat man einen Diffeomorphismus

$$SU(n)/SO(n) \cong \ker(d)/O(n)$$

der von der Inklusion $SU(n) \hookrightarrow \ker(d)$ induziert wird.

Man betrachte jetzt das Faserbündel $SU(n) \rightarrow SU(n)/SO(n)$. Nun ist aber $SU(n)$ einfach zusammenhängend und $SO(n)$ zusammenhängend. Aus der langen exakten Sequenz des Faserbündels erhält man damit aber $\pi_1(SU(n)/SO(n)) = 0$. Es ist zudem mit $SU(n)$ auch $SU(n)/SO(n)$ zusammenhängend. Insgesamt ist damit $\ker(d)/O(n)$ einfach zusammenhängend. \square

Um die Definition des Maslov Index zu geben ist man zunächst an den singulären Homologiegruppen von Λ interessiert. Da Λ wegzusammenhängend ist (vgl. 5.2.10) und $\pi_1(\Lambda)$ wegen des letzten Lemmas abelsch, ist der Hurewicz-Homomorphismus bijektiv und man erhält zunächst $H_1(\Lambda) \cong \mathbb{Z}$.

Für einen festen Lagrange-Unterraum $L_0 \subset V$ betrachte man nun die relative Homologiegruppe $H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0))$. Da $\Lambda_0(L_0)$ gerade das Komplement von $\Lambda_{\geq 1}(L_0)$ in Λ ist, definiert nun jede Kurve $l : [a, b] \rightarrow \Lambda$ mit Endpunkten in $\Lambda_0(L_0)$ eine Homologieklass in $H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0))$. Wegen 5.2.5 bildet jede Karte φ_{L_1, L_0} das Kartengebiet $\Lambda_0(L_0)$ diffeomorph auf einen Vektorraum ab und demnach ist $\Lambda_0(L_0)$ kontrahierbar. Wegen der langen exakten Homologiesequenz induziert aber die Inklusion $(\Lambda, \emptyset) \rightarrow (\Lambda, \Lambda_0(L_0))$ einen Isomorphismus $H_1(\Lambda) \xrightarrow{\cong} H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0))$ und man erhält $H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0)) \cong \mathbb{Z}$. Das Ziel ist nun die Wahl eines kanonischen Erzeugers von $H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0))$, so dass schließlich jeder Kurve mit Endpunkten in $\Lambda_0(L_0)$ eine ganze Zahl zugewiesen werden kann, die dann als Maslov Index definiert wird.

Zur Wahl eines Erzeugers wird man sich nun der transversalen Orientierung von $\Lambda_1(L_0)$ bedienen.

5.3.9 Lemma. *Es seien $\psi_1 \in Sp(V, \omega), \psi_2 \in Sp(V, \omega, L_0)$ und es bezeichne $\hat{\psi} : \Lambda \rightarrow \Lambda$ den Diffeomorphismus mit $L \mapsto \psi(L)$, so dass insbesondere $\hat{\psi}_2(\Lambda_0(L_0)) = \Lambda_0(L_0)$. Dann ist*

- $(\hat{\psi}_1)_* = id : H_1(\Lambda) \rightarrow H_1(\Lambda)$
- $(\hat{\psi}_2)_* = id : H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0)) \rightarrow H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0))$

Beweis. Die erste Aussage folgt aus dem Zusammenhang von $Sp(V, \omega) \cong Sp(n, \mathbb{R})$, da folglich jedes $\psi \in \Lambda$ durch einen Weg mit der Identität verbunden werden kann und diese eine Homotopie zwischen $\hat{\psi}$ und der Identität auf Λ liefert.

Die zweite Aussage erhält man aus der wegen Funktorialität bestehenden Kommutativität des

Diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0)) & \xrightarrow{(\hat{\psi})_*} & H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0)) \\
\uparrow i_* & & \uparrow i_* \\
H_1(\Lambda) & \xrightarrow{Id=(\hat{\psi})_*} & H_1(\Lambda)
\end{array}$$

□

5.3.10 Bemerkung. Es sei $V = L_0 \oplus L_1$ eine Zerlegung in Lagrange-Unterräume und $L \in \Lambda_0(L_1)$. Aus der Definition von $\varphi_{L_0, L_1}(L) \in B_{sym}(L_0)$ ergibt sich

$$\ker(\varphi_{L_0, L_1}(L)) = L_0 \cap L$$

Damit ist genau dann $L \in \Lambda_k(L_0)$, wenn $\dim(\ker \varphi_{L_0, L_1}(L)) = k$, also

$$\varphi_{L_0, L_1}(\Lambda_0(L_1) \cap \Lambda_k(L_0)) = \{B \in B_{sym}(L_0) : \text{dgn}(B) = k\}, \quad k \in \{0, \dots, n\}$$

Insbesondere ist genau dann $L \in \Lambda_0(L_0)$, wenn $\varphi_{L_0, L_1}(L)$ nicht entartet ist.

5.3.11 Lemma. *Es seien $l_1, l_2 : [a, b] \rightarrow \Lambda$ stetig mit Endpunkten in $\Lambda_0(L_0)$ und $L_1 \in \Lambda$, so dass $l_1([a, b]), l_2([a, b])$ im Kartengebiet $\Lambda_0(L_1)$ von φ_{L_0, L_1} enthalten sind. Ist nun*

$$n_+(\varphi_{L_0, L_1} \circ l_1(t)) = n_+(\varphi_{L_0, L_1} \circ l_2(t)) \quad \text{für } t = a, b$$

so ist $[l_1] = [l_2] \in H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0))$.

Beweis. Zur Abkürzung der Schreibweise sei $\beta_i = \varphi_{L_0, L_1} \circ l_i$, $i = 1, 2$ und

$$i = n_+(\beta_1(a)) = n_+(\beta_2(a))$$

$$j = n_+(\beta_1(b)) = n_+(\beta_2(b))$$

Mit der Voraussetzung an die Endpunkte von l_1, l_2 und 5.3.10 sind $\beta_1(a), \beta_2(a) \in B_{sym}^{i, n-i}(L_0)$ sowie $\beta_1(b), \beta_2(b) \in B_{sym}^{j, n-j}(L_0)$. Mit 5.3.2 existieren damit stetige Kurven β_3 in $B_{sym}^{i, n-i}(L_0)$ von $\beta_2(a)$ nach $\beta_1(a)$ und β_4 in $B_{sym}^{j, n-j}(L_0)$ von $\beta_1(b)$ nach $\beta_2(b)$.

Definiere nun $l_i = \varphi_{L_0, L_1}^{-1} \circ \beta_i$ für $i = 3, 4$. Wegen 5.3.10 ist $l_3(I), l_4(I) \subset \Lambda_0(L_0)$ und folglich mit 5.3.6 $[l_3] = [l_4] = 0 \in H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0))$. Damit ist wegen 5.3.6 $[l_1] = [l] \in H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0))$ mit $l = l_3 * l_1 * l_4$.

Nun sind l und l_2 Kurven in $\Lambda_0(L_1)$ mit gleichen Endpunkten und da $\Lambda_0(L_1)$ diffeomorph zu dem Vektorraum $B_{sym}(L_0)$ ist, sind l und l_2 homotop mit festen Endpunkten. Damit ist aber wegen 5.3.7 $[l] = [l_2] \in H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0))$ und insgesamt die Aussage bewiesen. □

Zur gesuchten Möglichkeit der kanonischen Wahl eines Erzeugers von $H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0))$ sind zunächst weitere Definitionen notwendig. Es sei $l : [a, b] \rightarrow \Lambda$ eine C^1 -Kurve und $t_0 \in [a, b]$ mit $l(t_0) \in \Lambda_{\geq 1}(L_0)$. l **schneidet** $\Lambda_{\geq 1}(L_0)$ **transversal** bei t_0 , falls $l(t_0) \in \Lambda_1(L_0)$ und $l'(t_0) \notin T_{l(t_0)}\Lambda_1(L_0)$. Ein solcher transversaler Schnitt heie **positiv**, falls $l'(t_0)$ positiv bezüglich der in 5.2.17 definierten transversalen Orientierung von $\Lambda_1(L_0)$ ist.

5.3.12 Lemma. *Es seien $l_1, l_2 : [a, b] \rightarrow \Lambda$ glatte Kurven mit Endpunkten in $\Lambda_0(L_0)$. Beide Kurven mögen $\Lambda_{\geq 1}(L_0)$ lediglich einmal schneiden, und zwar so, dass beide Schnitte transversal und positiv sind. Dann ist $[l_1] = [l_2] \in H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0))$.*

Beweis. Nach eventueller Umparametrisierung kann mit 5.3.5 zunächst angenommen werden, dass beide Kurven $\Lambda_1(L_0)$ bei einem gemeinsamen $t_0 \in (a, b)$ schneiden. Wegen 5.2.14 existiert nun ein $\psi \in Sp(V, \omega, L_0)$ mit $\psi(l_2(t_0)) = l_1(t_0)$. Bezeichnet $\hat{\psi} : \Lambda \rightarrow \Lambda$ abermals den Diffeomorphismus mit $L \mapsto \psi(L)$, so hat auch die Kurve $\hat{\psi} \circ l_2$ einen eindeutigen Schnitt mit $\Lambda_{\geq 1}(L_0)$, der zudem wegen 5.2.17 transversal und positiv ist. Mit 5.3.9 ist zudem $[\hat{\psi} \circ l_2] = [l_2] \in H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0))$ und es kann nun ohne Einschränkung $l_1(t_0) = l_2(t_0)$ angenommen werden.

Unter Verwendung von 5.2.15 sei nun $L_1 \in \Lambda$ ein Lagrange-Unterraum, der komplementär zu L_0 und $l_1(t_0) = l_2(t_0)$ ist. Da l_1, l_2 einen eindeutigen Schnitt mit $\Lambda_{\geq 1}(L_0)$ bei t_0 haben, definiert wegen 5.3.6 die Einschränkung von $l_i, i = 1, 2$, auf jedes abgeschlossene Teilintervall mit t_0 im Inneren das jeweils gleiche Element wie l_i in $H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0))$. Somit kann zusätzlich angenommen werden, dass die Bilder von l_1 und l_2 ganz im Kartengebiet $\Lambda_0(L_1)$ der Karte φ_{L_0, L_1} enthalten sind.

Es sei nun wieder $\beta_i = \varphi_{L_0, L_1} \circ l_i, i = 1, 2$. Da mit 5.3.10 $\ker(\beta_i(t)) = l_i(t) \cap L_0$ und der Schnitt von l_i mit $\Lambda_{\geq 1}(L_0)$ eindeutig ist, erhält man $\text{dgn}(\beta_i(t)) = 0$ für alle $t \neq t_0$ und damit ist wegen 5.3.2 $n_+(\beta_i(t))$ konstant für $t \in [a, t_0)$ und $t \in (t_0, b]$.

Wegen der Positivität des Schnittes ist nach Definition die Einschränkung von $l_i(t_0)$ auf den eindimensionalen Unterraum $l_i(t_0) \cap L_0$ positiv definit und mit 5.2.18 ist damit auch $\beta_i'(t_0)$ positiv definit auf $l_i(t_0) \cap L_0 = \ker(\beta_i(t_0))$. Mit Anwendung von 5.3.3 um t_0 erhält man für $i = 1, 2$

$$n_+(\beta_i(b)) = n_+(\beta_i(t_0)) + 1, \quad n_+(\beta_i(a)) = n_+(\beta_i(t_0))$$

wobei für die zweite Gleichung (5.3.1) auf die umgekehrt parametrisierte Kurve $t \mapsto \beta_i(-t)$ angewendet wurde. Wegen $\beta_1(t_0) = \beta_2(t_0)$ ist damit aber $n_+(\beta_1(a)) = n_+(\beta_2(a))$ und $n_+(\beta_1(b)) = n_+(\beta_2(b))$ und man erhält die Behauptung aus 5.3.11. \square

Man betrachte nun die Kurve

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \ni t \mapsto A(t) = \begin{pmatrix} e^{i\pi t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & i \end{pmatrix} \in U(n)$$

Mit $A(-\frac{1}{2}) \text{diag}\{-1, 1, \dots, 1\} = A(\frac{1}{2})$ wird $A(t)$ auf eine geschlossene Kurve $\bar{A}(t) = A(t) \cdot O(n)$ in $U(n)/O(n)$ projiziert. Zudem ist

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \ni t \mapsto \det^2(A(t)) = (-1)^{n-1} e^{2i\pi t} \in S^1$$

bekanntlich ein Erzeuger von $\pi_1(S^1)$ und man erhält aus 5.3.8, dass \bar{A} ein Erzeuger von $\pi_1(U(n)/O(n))$ ist. Wegen 5.2.10 ist aber

$$U(n)/O(n) \ni A \cdot O(n) \mapsto A(\mathbb{R}^n \oplus \{0\}) \in \Lambda(\mathbb{R}^{2n})$$

ein Diffeomorphismus, mit dem nun ein Erzeuger von $\pi_1(\Lambda)$ bestimmt werden kann. Da unter der Identifikation $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos \pi t & 0 & \cdots & 0 & -\sin \pi t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ \sin \pi t & 0 & \cdots & 0 & \cos \pi t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$A(t)(\mathbb{R}^n \oplus \{0\}) = \mathbb{R}(\cos(\pi t)e_1 + \sin(\pi t)e_{n+1}) + \sum_{j=n+2}^{2n} \mathbb{R}e_j \in \Lambda(\mathbb{R}^{2n})$$

ein Erzeuger von $\pi_1(\Lambda, \{0\} \oplus \mathbb{R}^n)$. Ist nun (V, ω) ein symplektischer Vektorraum und $L_0, L_1 \in \Lambda$ mit $L_0 \oplus L_1 = V$, so erhält man nach Wahl einer symplektischen Basis $\{b_1, \dots, b_{2n}\}$ von V mit

$$\begin{aligned} L_0 &= \text{span}\{b_1, \dots, b_n\} \\ L_1 &= \text{span}\{b_{n+1}, \dots, b_{2n}\} \end{aligned}$$

einen offensichtlichen Diffeomorphismus $\Lambda(\mathbb{R}^{2n}) \cong \Lambda$ der $\mathbb{R}^n \oplus \{0\}$ auf L_0 und $\{0\} \oplus \mathbb{R}^n$ auf L_1 abbildet. Also ist die Kurve

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \ni t \mapsto l(t) = \mathbb{R}(b_1 \cos(\pi t) + b_{n+1} \sin(\pi t)) + \sum_{j=n+2}^{2n} \mathbb{R}b_j \in \Lambda \quad (5.3.6)$$

ein Erzeuger von $\pi_1(\Lambda, L_1)$. Aus der Definition des Hurewicz-Homomorphismus ist damit l aber auch ein Erzeuger von $H_1(\Lambda)$, und da der Isomorphismus $q_* : H_1(\Lambda) \rightarrow H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0))$ von der Inklusion induziert ist, definiert l ebenso einen Erzeuger von $H_1(\Lambda, \Lambda_1(L_0))$. Von diesem Erzeuger soll nun gezeigt werden, dass er $\Lambda_1(L_0)$ genau einmal schneidet und der Schnitt transversal und positiv ist.

Zunächst ist

$$l(t) \cap \Lambda_{\geq 1}(L_0) \neq \emptyset \Leftrightarrow t = 0 \quad \text{und} \quad l(0) \cap L_0 = \text{span}\{b_1\}$$

also $l(0) \in \Lambda_1(L_0)$. Um Positivität und Transversalität dieses Schnittes nachzuweisen, soll unter Verwendung von 5.2.18 in einer festen Karte gearbeitet werden. Es sei hierfür

$$L_1 = \text{span}\{b_1 + b_{n+1}, \dots, b_n + b_{2n}\} \in \Lambda$$

Offenbar ist $V = L_0 \oplus L_1$ und in einer Umgebung von 0 ist $l(t) \in \Lambda_0(L_1)$ und folglich $\beta = \varphi_{L_0, L_1} \circ l$ definiert. Nun ist

$$\beta(t) = \omega((\pi_1|_{l(t)} \circ (\pi_0|_{l(t)})^{-1}) \cdot, \cdot) |_{L_0}$$

mit den Projektionen $\pi_i : L_0 \oplus L_1 \rightarrow L_i, i = 0, 1$. Aus

$$\begin{aligned} \pi_0(b_1 \cos(\pi t) + b_{n+1} \sin(\pi t)) &= (\cos(\pi t) - \sin(\pi t))b_1, \\ \pi_1(b_1 \cos(\pi t) + b_{n+1} \sin(\pi t)) &= \sin(\pi t)(b_1 + b_{n+1}), \\ \pi_0(b_{n+i}) &= -b_i, \quad i = 2, \dots, n \\ \pi_1(b_{n+i}) &= b_i + b_{n+i}, \quad i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

erhält man nun

$$\begin{aligned} (\pi_1|_{l(t)} \circ (\pi_0|_{l(t)})^{-1})b_1 &= \frac{\sin(\pi t)}{\cos(\pi t) - \sin(\pi t)}(b_1 + b_{n+1}) \\ (\pi_1|_{l(t)} \circ (\pi_0|_{l(t)})^{-1})b_i &= -(b_i + b_{n+i}), \quad i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

und damit ist die darstellende Matrix von $\beta(t) \in B_{sym}(L_0)$ bezüglich der Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$

$$\begin{pmatrix} f(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit

$$f(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\cos(\pi t) - \sin(\pi t)}$$

Damit ist aber mit 5.2.18 und $l(0) \cap L_0 = \text{span}\{b_1\}$

$$\begin{aligned} l'(0)(b_1, b_1) &= \beta'(0)(b_1, b_1) = f'(0) \\ &= \frac{\pi \cos(\pi t)(\cos(\pi t) - \sin(\pi t)) - \sin(\pi t)(-\pi \sin(\pi t) - \pi \cos(\pi t))}{(\cos(\pi t) - \sin(\pi t))^2} \Big|_{t=0} \\ &= \pi \end{aligned}$$

und folglich schneidet $l(t) \Lambda_{\geq 1}(L_0)$ bei 0 transversal und positiv.

Die bisherigen Resultate können nun zusammengefasst werden.

5.3.13 Folgerung. Für jedes $L_0 \in \Lambda$ existiert eine Kurve $l : [a, b] \rightarrow \Lambda$ mit Endpunkten in $\Lambda_0(L_0)$, die $\Lambda_{\geq 1}(L_0)$ genau einmal schneidet und dieser Schnitt transversal und positiv ist. Je zwei solche Kurven definieren stets das gleiche Element in $H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0))$, das ein Erzeuger von $H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0)) \cong \mathbb{Z}$ ist.

Hiermit sei $\mu_{L_0} : H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0)) \rightarrow \mathbb{Z}$ der eindeutige Isomorphismus mit $\mu_{L_0}([E]) = 1 \in \mathbb{Z}$, wobei $[E]$ die Homologieklassse einer beliebigen Kurve wie in 5.3.13 bezeichne.

5.3.14 Definition. Es sei $l : [a, b] \rightarrow \Lambda$ stetig mit Endpunkten in $\Lambda_0(L_0)$. Der **Maslov Index** von l relativ L_0 ist $\mu_{L_0}([l]) \in \mathbb{Z}$, wobei $[l] \in H_1(\Lambda, \Lambda_0(L_0))$ die Homologieklassse von l bezeichne.

Mit den Eigenschaften für Wege in Homologie erhält man unmittelbar die folgenden wichtigen Eigenschaften des Maslov Index:

5.3.15 Lemma. Es sei $l : [a, b] \rightarrow \Lambda$ eine Kurve mit Endpunkten in $\Lambda_0(L_0)$. Dann gilt:

1. Ist $\sigma : [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig mit $\sigma(c) = a, \sigma(d) = b$, so ist $\mu_{L_0}(l \circ \sigma) = \mu_{L_0}(l)$.
2. Für $m : [c, d] \rightarrow \Lambda$ mit Endpunkten in $\Lambda_0(L_0)$ und $l(b) = m(c)$ ist

$$\mu_{L_0}(l * m) = \mu_{L_0}(l) + \mu_{L_0}(m)$$

3. $\mu_{L_0}(l^{-1}) = -\mu_{L_0}(l)$
4. Falls $\text{im}(l) \subset \Lambda_0(L_0)$, so ist $\mu_{L_0}(l) = 0$.
5. Für eine Homotopie $H : [0, 1] \times ([a, b], \{a, b\}) \rightarrow (\Lambda, \Lambda_0(L_0))$ ist

$$\mu_{L_0}(H(0, \cdot)) = \mu_{L_0}(H(1, \cdot))$$

Bevor nun Anwendungen des Maslov Index diskutiert werden, sollen zunächst wichtige Ergebnisse zur Berechnung präsentiert werden.

5.3.16 Satz. Es sei $L_0 \in \Lambda$ und $l : [a, b] \rightarrow \Lambda$ mit Endpunkten in $\Lambda_0(L_0)$. Ist $l([a, b]) \subset \Lambda_0(L_1)$ mit einem $L_1 \in \Lambda$, also $l([a, b])$ ganz im Kartengebiet von φ_{L_0, L_1} enthalten, so ist

$$\mu_{L_0}(l) = n_+(\varphi_{L_0, L_1}(l(b))) - n_+(\varphi_{L_0, L_1}(l(a)))$$

Beweis. Wegen 5.3.11 und 5.3.10 genügt es für jedes $i, j = 0, \dots, n$ einen Weg $\beta_{i,j} : [0, 1] \rightarrow B_{\text{sym}}(L_0)$ anzugeben mit

$$\begin{aligned} n_+(\beta_{i,j}(0)) &= i, \text{dgn}(\beta_{i,j}(0)) = 0 \\ n_+(\beta_{i,j}(1)) &= j, \text{dgn}(\beta_{i,j}(1)) = 0 \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

und so dass die Kurve $l_{ij} = \varphi_{L_0, L_1}^{-1} \circ \beta_{ij}$ den Maslov Index $\mu_{L_0}(l_{ij}) = j - i$ besitzt.

Für $i = j$ kann nun zunächst eine konstante Kurve gewählt werden, so dass $\text{dgn} \beta_{ii} = 0$ und $n_+(\beta_{ii}(0)) = i$.

Wegen der Eigenschaft (3) aus 5.3.15 kann zudem o.B.d.A. $i < j$ angenommen werden. Es soll nun zunächst der Fall $j = i + 1$ betrachtet werden. Hierfür sei eine beliebige Basis von L_0 gewählt und man definiere $\beta_{i, i+1}(t)$ als die Bilinearform, deren Matrixdarstellung in dieser Basis durch

$$\text{diag}\{\underbrace{1, \dots, 1}_{i\text{-mal}}, t - \frac{1}{2}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-i-1\text{-mal}}\}, t \in [0, 1]$$

gegeben ist. Damit ist

$$\begin{aligned} n_+(\beta_{i, i+1}(0)) &= i, \quad \text{dgn}(\beta_{i, i+1}(0)) = 0 \\ n_+(\beta_{i, i+1}(1)) &= i + 1, \quad \text{dgn}(\beta_{i, i+1}(1)) = 0 \end{aligned}$$

Zudem ist $\text{dgn}(\beta_{i, i+1}(t)) \neq 0$ genau für $t = \frac{1}{2}$ und die Ableitung $\beta'_{i, i+1}(\frac{1}{2})$ ist auf dem eindimensionalen Raum $\ker(\beta_{i, i+1}(\frac{1}{2}))$ positiv definit. Wegen 5.3.10 und 5.2.18 schneidet damit aber $l_{i, i+1}$ den Raum $\Lambda_{\geq 1}(L_0)$ nur bei $t = \frac{1}{2}$ und das mit einem transversalen und positiven Schnitt. Nach Definition des Maslov Index ist damit

$$\mu_{L_0}(l_{i, i+1}) = 1$$

und der Beweis im Fall $j = i + 1$ ist vollbracht.

Man wähle nun für jedes $i = 0, \dots, n$ eine Bilinearform $B_i \in B_{\text{sym}}(L_0)$ mit $n_+(B_i) = i$, $\text{dgn}(B_i) = 0$ und beliebige Kurven $\tilde{\beta}_{i, i+1} : [0, 1] \rightarrow B_{\text{sym}}(L_0)$ mit $\tilde{\beta}_{i, i+1}(0) = B_i$, $\tilde{\beta}_{i, i+1}(1) = B_{i+1}$ für $i = 0, \dots, n - 1$. Wegen 5.3.11 und des oben bereits bewiesenen Spezialfalls ist nun aber

$$\mu_{L_0}(\tilde{l}_{i, i+1}) = 1 \quad \text{für} \quad \tilde{l}_{i, i+1} = \varphi_{L_0, L_1}^{-1} \circ \tilde{\beta}_{i, i+1}$$

Für $j > i + 1$ sei damit

$$\beta_{ij} = \tilde{\beta}_{i, i+1} * \tilde{\beta}_{i+1, i+2} * \dots * \tilde{\beta}_{j-1, j}$$

Dann erfüllt β_{ij} aber (5.3.7) und mit der Eigenschaft (2) aus 5.3.15 ist wie gewünscht

$$\mu_{L_0}(l_{ij}) = \mu_{L_0}(\varphi_{L_0, L_1}^{-1} \circ \beta_{ij}) = j - i$$

□

5.3.17 Definition. Eine C^1 -Kurve l in Λ hat einen **nicht entarteten Schnitt** mit $\Lambda_{\geq 1}(L_0)$ bei $t = t_0$, falls $l(t_0) \in \Lambda_{\geq 1}(L_0)$ und $l'(t_0)|_{L_0 \cap l(t_0)}$ nicht entartet ist.

Hiermit ist insbesondere jeder transversale Schnitt nicht entartet.

Das nachstehende weitere Ergebnis ist von besonderer Bedeutung für die Anwendung und Interpretation des Maslov Index.

5.3.18 Lemma. *Es sei $l : [a, b] \rightarrow \Lambda$ eine C^1 -Kurve.*

1. *Hat l bei $t_0 \in (a, b)$ einen nicht entarteten Schnitt mit $\Lambda_{\geq 1}(L_0)$, so ist $l(t) \in \Lambda_0(L_0)$ für alle $t \neq t_0$ in einer Umgebung von t_0 .*
2. *Besitzt l ausschließlich nicht entartete Schnitte mit $\Lambda_{\geq 1}(L_0)$, so ist $l(t) \in \Lambda_{\geq 1}(L_0)$ für nur endlich viele $t \in (a, b)$ und es ist*

$$\mu_{L_0}(l) = \sum_{t \in (a, b)} \operatorname{sgn}(l'(t) |_{L_0 \cap l(t)}) \quad (5.3.8)$$

Beweis. Wegen 5.2.15 existiert $L_1 \in \Lambda$ mit $V = L_0 \oplus L_1 = l(t_0) \oplus L_1$. Damit ist nun für eine Umgebung von t_0 stets $l(t)$ im Kartengebiet von φ_{L_0, L_1} enthalten. Man betrachte hiermit die Kurve $\beta(t) = \varphi_{L_0, L_1} \circ l(t)$ auf dieser Umgebung. Mit 5.2.18 und 5.3.10 ist aber nach Voraussetzung

$$l'(t_0) |_{L_0 \cap l(t_0)} = \beta'(t_0) |_{L_0 \cap l(t_0)} = \beta'(t_0) |_{\ker(\beta(t_0))}$$

nicht entartet und man erhält mit 5.3.3

$$0 = \ker(\beta(t)) = L_0 \cap l(t)$$

für $t \neq t_0$ in einer Umgebung von t_0 . Also ist (1) bewiesen.

Mit 5.2.11 und 5.2.13 ist zunächst $\Lambda_{\geq 1}(L_0) \subset \Lambda$ kompakt. Damit ist aber auch $l([a, b]) \cap \Lambda_{\geq 1}(L_0)$ kompakt und wegen (1) zudem diskret, also endlich.

Wegen der Endlichkeit der Anzahl der Schnitte genügt es nun mit den Eigenschaften (2) und (4) aus 5.3.15 für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$

$$\mu_{L_0}(l |_{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}) = \operatorname{sgn}(l'(t_0) |_{L_0 \cap l(t_0)})$$

zu zeigen. Man wähle hierzu wieder $L_1 \in \Lambda$ mit $V = L_0 \oplus L_1 = l(t_0) \oplus L_1$, so dass die Kurve $\beta(t) = \varphi_{L_0, L_1}(l(t))$ in einer Umgebung von t_0 definiert ist. Durch Anwendung von 5.3.3 auf β und die umgekehrt parametrisierte Kurve $t \mapsto \beta(-t)$ erhält man für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} n_+(\beta(t_0 + \varepsilon)) &= n_+(\beta(t_0)) + n_+(\beta'(t_0) |_{\ker \beta(t_0)}) \\ n_+(\beta(t_0 - \varepsilon)) &= n_+(\beta(t_0)) + n_-(\beta'(t_0) |_{\ker \beta(t_0)}) \end{aligned}$$

und hieraus durch Subtraktion

$$n_+(\beta(t_0 + \varepsilon)) - n_+(\beta(t_0 - \varepsilon)) = \operatorname{sgn}(\beta'(t_0) |_{\ker \beta(t_0)})$$

Damit ist aber unter Verwendung von 5.3.16, 5.3.10 und 5.2.18

$$\begin{aligned} \mu_{L_0}(l |_{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}) &= n_+(\beta(t_0 + \varepsilon)) - n_+(\beta(t_0 - \varepsilon)) \\ &= \operatorname{sgn}(\beta'(t_0) |_{L_0 \cap l(t_0)}) = \operatorname{sgn}(l'(t_0) |_{L_0 \cap l(t_0)}) \end{aligned}$$

□

Mit diesem Resultat erhält man nun eine Interpretation des Maslov Index. Ist $l : [a, b] \rightarrow \Lambda$ eine C^1 -Kurve mit ausschließlich transversalen Schnitten mit $\Lambda_{\geq 1}(L_0)$, so erhält man mit den Eigenschaften des Maslov Index aus 5.3.15, dass $\mu_{L_0}(l)$ die Anzahl positiver Schnitte von l mit $\Lambda_{\geq 1}(L_0)$ minus die Anzahl negativer Schnitte von l mit $\Lambda_{\geq 1}(L_0)$ ist.

5.4 Symplektische Differentialgleichungssysteme

In diesem Abschnitt werden zunächst sogenannte Symplektische Differentialgleichungssysteme und der Begriff des konjugierten Punktes solcher Systeme definiert, der für die verwendete Definition des Maslov Index das grundlegende Anwendungsgebiet bildet. Für die hier im Vordergrund stehenden aus der Geometrie gegebenen Probleme ist lediglich ein gewisser Spezialfall des Symplektischen Differentialgleichungssystems bedeutsam, auf den die Betrachtungen recht zügig eingeschränkt werden, was zu einer deutlichen Vereinfachung der Argumentationen führt. Eine ausgiebige Diskussion des allgemeinen Falls ist in [PT00a] zu finden. Die hier gegebene Bearbeitung der sogenannten Morse-Sturm Systeme ist an eine dort in abstrakterem Kontext betrachtete Darstellung aus [MPT00] angelehnt.

5.4.1 Definitionen

Es wird nun zunächst \mathbb{R}^{2n} mit der kanonischen symplektischen Struktur betrachtet. Aus den Beschreibungen von $Sp(n, \mathbb{R})$ und $sp(n, \mathbb{R})$ aus Abschnitt 5.1 erhält man unmittelbar

- $A \in Sp(n, \mathbb{R}) \iff A^T J A = J$
- $A \in sp(n, \mathbb{R}) \iff J A + A^T J = 0$

Damit besteht insbesondere $sp(n, \mathbb{R})$ aus allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix}$$

wobei $A, B, C \in M(n, \mathbb{R})$ und $B^T = B, C^T = C$.

5.4.1 Definition. Ein **symplektisches Differentialgleichungssystem** ist ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem

$$w'(t) = X(t)w(t), \quad t \in [a, b]$$

wobei $X : [a, b] \rightarrow sp(n, \mathbb{R})$ eine glatte Kurve in der Lie-Algebra $sp(n, \mathbb{R})$ von $Sp(n, \mathbb{R})$ ist.

Für

$$X(t) = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & -A^*(t) \end{pmatrix}$$

wird das zugehörige symplektische Differentialgleichungssystem **nicht entartet** genannt, falls stets $\det B(t) \neq 0$.

Die **Fundamentallösung** des Systems ist die eindeutige Lösung $[a, b] \ni t \mapsto \Phi(t) \in Gl(2n, \mathbb{R})$ des Anfangswertproblems

$$\Phi' = X\Phi, \quad \Phi(a) = id$$

Für eine Lösung $w = (u, v)$ der Gleichung ist $\Phi(t)(u(a), v(a)) = (u(t), v(t))$ für alle $t \in [a, b]$. Mit

$$\begin{aligned} (\Phi^T(t)J\Phi(t))' &= (\Phi^T)'(t)J\Phi(t) + \Phi^T(t)J\Phi'(t) \\ &= \Phi(t)^T X(t)^T J\Phi(t) + \Phi(t)^T JX(t)\Phi(t) \\ &= \Phi(t)^T (X(t)^T J + JX(t))\Phi(t) = 0 \end{aligned}$$

verläuft $\Phi(t)$ offenbar ganz in der symplektischen Gruppe $Sp(n, \mathbb{R})$.

5.4.2 Definition. Ein nicht entartetes symplektisches Differentialgleichungssystem

$$w' = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & -A(t)^T \end{pmatrix} w$$

heißt ein **Morse-Sturm System**, falls B konstant ist und $A = 0$.

Offenbar kann jedes Morse-Sturm System dieser Form äquivalent in das System

$$B^{-1}u''(t) - C(t)u(t) = 0$$

transformiert werden.

5.4.2 Konjugierte Punkte symplektischer Differentialgleichungssysteme

Es sei $w' = Xw$ ein symplektisches Differentialgleichungssystem. Bekanntlich hat der Raum

$$\tilde{\mathbb{J}} = \{w = (u, v) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n : w' = Xw, u(0) = 0\}$$

die Dimension n . Ein $t_0 \in (a, b]$ heißt **konjugiert**, falls

$$\text{mult}(t_0) = \dim\{w = (u, v) \in \tilde{\mathbb{J}} : u(t_0) = 0\} \neq 0$$

und in diesem Fall wird $\text{mult}(t_0)$ die **Vielfachheit** des konjugierten Punktes genannt.

Mit $L_0 = \{0\} \oplus \mathbb{R}^n$ betrachte man die Kurve $l : [a, b] \rightarrow \Lambda$ mit $l(t) = \Phi(t)(L_0)$, wobei Φ die Fundamentallösung bezeichne. Von besonderer Bedeutung ist nun

5.4.3 Lemma. *Es ist genau dann $\text{mult}(t_0) = k$, wenn $l(t) \in \Lambda_k(L_0)$. Insbesondere ist $t_0 \in (a, b]$ genau dann konjugiert, wenn $l(t_0) \in \Lambda_{\geq 1}(L_0)$.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Beziehung $\Phi(t)(u(a), v(a)) = (u(t), v(t))$ □

Mit dieser Erkenntnis sind nun insbesondere Wege in der Lagrange-Grassmannschen für die Untersuchung konjugierter Punkte einer gewissen Klasse von Differentialgleichungssystemen von Bedeutung.

Mit der Interpretation des Maslov Index mag dies zu der Idee führen, die konjugierten Punkte eines symplektischen Differentialgleichungssystems mitsamt ihrer Vielfachheiten mittels des

Maslov Index zu zählen⁷. Allerdings steht man hierzu zunächst vor dem Problem, dass zur Definition des Maslov Index stets $l(a), l(b) \in \Lambda_0(L_0)$ benötigt wird, wobei diese Bedingung wegen $\Phi(0) = id$ für $l(a)$ grundsätzlich nie erfüllt sein kann. Dieses Problem kann umgangen werden. Da das Vorgehen im allgemeinen Fall durchaus schwieriger zu erörtern ist, soll es hier nur an dem im weiteren Verlauf der Arbeit einzig interessanten Fall eines Morse-Sturm Systems vollzogen werden.

Aus technischen Gründen empfiehlt es sich nun Morse-Sturm Systeme ausschließlich in der Form

$$w' = \begin{pmatrix} 0 & id \\ -B^{-1}C(t) & 0 \end{pmatrix} w$$

beziehungsweise in der hierzu äquivalenten Darstellung

$$u''(t) + B^{-1}C(t)u(t) = 0, \quad t \in [a, b] \quad (5.4.1)$$

zu betrachten. Hierdurch wird natürlich die Menge der Lösungen des Systems 2. Ordnung und folglich auch die Menge der konjugierten Punkte nicht verändert. Man betrachte nun zudem die Vektorräume

$$\begin{aligned} \mathbb{J} &= \{u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n : u''(t) + B^{-1}C(t)u(t) = 0, u(0) = 0\} \\ \mathbb{J}[t_0] &= \{u(t_0) : u \in \mathbb{J}\} \subset \mathbb{R}^n, \quad t_0 \in [a, b] \end{aligned}$$

Es ist analog zu obigem $\dim \mathbb{J} = n$ und zudem $\text{mult}(t_0) = \text{codim}(\mathbb{J}[t_0])$.

Das folgende Lemma liefert nun die Möglichkeit zur Definition des Maslov Index für Morse-Sturm Systeme.

5.4.4 Lemma. *Die konjugierten Punkte eines Morse-Sturm Systems (5.4.1) können sich bei a nicht häufen.*

Beweis. Es sei $J_1, \dots, J_n \in \mathbb{J}$ eine Basis von \mathbb{J} . Nun ist aber $J_1(a) = \dots = J_n(a) = 0$ und man erhält aus der Theorie linearer Differentialgleichungssysteme, dass $J'_1(a), \dots, J'_n(a)$ eine Basis des \mathbb{R}^n ist. Man definiere nun stetige Abbildungen durch

$$\tilde{J}_1, \dots, \tilde{J}_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \tilde{J}_i(t) = \begin{cases} \frac{J_i(t)}{t-a}, & t > a \\ J'_i(a), & t = a \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n$$

Es ist $\tilde{J}_1(a), \dots, \tilde{J}_n(a)$ eine Basis des \mathbb{R}^n und wegen der Stetigkeit der Determinante ist folglich $\tilde{J}_1(t), \dots, \tilde{J}_n(t)$ für t nahe a ebenfalls eine Basis des \mathbb{R}^n . Aus der Definition der \tilde{J}_i folgt nun, dass damit auch $J_1(t), \dots, J_n(t)$ für t nahe a eine Basis des \mathbb{R}^n sind. Damit existieren aber mit Ausnahme von a in einer Umgebung von a keine weiteren konjugierten Punkte. \square

⁷Die Bestätigung dieser Interpretation unter hinreichend gutartigen Bedingungen findet sich am Ende dieses Kapitels in 5.4.10

Mit dem vorhergehenden Lemma existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $(a, a + \varepsilon]$ keine konjugierten Punkte enthält. Ist zudem b kein konjugierter Punkt, so ist $l(a + \varepsilon), l(b) \in \Lambda_0(L_0)$ und der Maslov Index dieser Kurve definierbar. Dieser hängt wegen 5.3.15 offenbar nicht von der Wahl von $\varepsilon > 0$ ab.

5.4.5 Definition. Für ein Morse-Sturm System mit $\text{mult}(b) = 0$ ist der **Maslov Index** definiert als der Maslov Index von $l : [a + \varepsilon, b] \rightarrow \Lambda$ wie oben beschrieben.

Man betrachte die symmetrische Bilinearform $(\cdot, \cdot) = \langle B\cdot, \cdot \rangle$ auf \mathbb{R}^n . Zunächst ist für zwei Lösungen J_1, J_2 von (5.4.1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}((J_1'(t), J_2(t)) - (J_1(t), J_2'(t))) &= (J_1''(t), J_2(t)) + (J_1'(t), J_2'(t)) \\ &\quad - (J_1'(t), J_2'(t)) - (J_1(t), J_2''(t)) \\ &= (J_1''(t), J_2(t)) - (J_1(t), J_2''(t)) \\ &= (-B^{-1}C(t)J_1(t), J_2(t)) - (J_1(t), -B^{-1}C(t)J_2(t)) \\ &= -\langle C(t)J_1(t), J_2(t) \rangle + \langle BJ_1(t), B^{-1}C(t)J_2(t) \rangle = 0 \end{aligned}$$

und damit

$$(J_1'(t), J_2(t)) - (J_1(t), J_2'(t)) \tag{5.4.2}$$

konstant auf $[a, b]$. Insbesondere ist für $J_1, J_2 \in \mathbb{J}$

$$(J_1'(t), J_2(t)) = (J_1(t), J_2'(t)) \tag{5.4.3}$$

5.4.6 Definition. Ein konjugierter Punkt t_0 heißt **nicht entartet**, falls $(\cdot, \cdot)|_{\mathbb{J}[t_0]}$ nicht entartet ist.

Man beachte, dass für einen nicht entarteten konjugierten Punkt t_0 stets $\mathbb{J}[t_0] \oplus \mathbb{J}[t_0]^\perp = \mathbb{R}^n$, wobei \perp das orthogonale Komplement bezüglich (\cdot, \cdot) bezeichne.

Zum Abschluss dieses Kapitels wird nun die Formel (5.3.8) zur Berechnung des Maslov Index auf die hier definierte Kurve in Λ angewendet. Man benötigt zunächst

5.4.7 Lemma. $l(t_0) \cap L_0 = \{0\} \oplus \mathbb{J}[t_0]^\perp$.

Beweis. Es ist

$$l(t_0) \cap L_0 = \{(0, J'(t_0)) : J \in \mathbb{J}, J(t_0) = 0\}$$

Ist nun $\text{mult}(t_0) = n - k$ und J_1, \dots, J_n eine Basis von \mathbb{J} , so dass $J_1(t_0), \dots, J_k(t_0)$ eine Basis von $\mathbb{J}[t_0]$ ist und $J_i(t_0) = 0$ für $i = k + 1, \dots, n$, so genügt es zu zeigen, dass $J'_{k+1}(t_0), \dots, J'_n(t_0)$ eine Basis von $\mathbb{J}[t_0]^\perp$ ist. Nun ist aber mit (5.4.3)

$$(J'_i(t_0), J_j(t_0)) = (J_i(t_0), J'_j(t_0)) = (0, J'_j(t_0)) = 0, \quad j \in \{1, \dots, k\}, i \in \{k + 1, \dots, n\}$$

und folglich $J'_i(t_0) \in \mathbb{J}[t_0]^\perp$ für $i = k + 1, \dots, n$. Da aber J_{k+1}, \dots, J_n linear unabhängig in \mathbb{J} sind, sind auch

$$(J_{k+1}(t_0), J'_{k+1}(t_0)), \dots, (J_n(t_0), J'_n(t_0))$$

linear unabhängig in \mathbb{R}^{2n} und mit $J_{k+1}(t_0) = \dots = J_n(t_0) = 0$ erhält man schließlich die lineare Unabhängigkeit von $J'_{k+1}(t_0), \dots, J'_n(t_0) \in \mathbb{R}^n$. Die Behauptung folgt nun aus $\dim \mathbb{J}[t_0]^\perp = n - k$. \square

Für die weiteren Überlegungen bezeichne $\Phi : [a, b] \rightarrow Sp(n, \omega_0)$ wieder die Fundamentallösung des Systems erster Ordnung, also

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} 0 & id \\ -B^{-1}C(t) & 0 \end{pmatrix} \Phi(t), \quad \Phi(0) = id$$

Man kann nun die symplektische Struktur auf \mathbb{R}^{2n} in gewinnbringenderweise verändern. Hierzu definiere man

$$\omega((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1, y_2) - (x_2, y_1), \quad (x_1, y_2), (x_2, y_1) \in \mathbb{R}^{2n}$$

Mit dieser Definition ist ω eine symplektische Form auf \mathbb{R}^{2n} . Bezeichnet nun $\Phi(t)x = (x(t), x'(t))$ für $x \in \mathbb{R}^{2n}$ die zugehörige Lösung des Systems erster Ordnung, so erhält man aus (5.4.2)

$$\begin{aligned} \omega(\Phi(t)x, \Phi(t)y) &= \omega((x(t), x'(t)), (y(t), y'(t))) = (x(t), y'(t)) - (x'(t), y(t)) \\ &= (x(a), y'(a)) - (x'(a), y(a)) = \omega(x, y) \end{aligned}$$

und damit ist $\Phi : [a, b] \rightarrow Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$. Noch einfacher ist einzusehen, dass die Matrix X des Systems eine Kurve $X : [a, b] \rightarrow sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ definiert.

Es sei nun zunächst daran erinnert, dass für eine glatte Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten zwei Vektorfelder $X \in \Gamma(M)$ und $Y \in \Gamma(N)$ **f-äquivalent** heißen, falls $d_p f(X(p)) = Y(f(p))$ für alle $p \in M$. Falls X und Y f-äquivalent sind, so bildet f stets Integralkurven von X auf Integralkurven von Y ab.

Es sei nun G eine Lie-Gruppe, die von links auf einer Mannigfaltigkeit M wirke. Mit der Abbildung $\kappa_p : G \rightarrow M$, $\kappa_p(g) = g \cdot p$ kann jedem X aus der Lie-Algebra von G ein Vektorfeld

$$X^* \in \Gamma(M) \text{ durch } X^*(p) = d_1 \kappa_p(X)$$

zugeordnet werden. Mit der rechts-Wirkung

$$r_g : G \rightarrow G, \quad r_g(g') = g'g$$

auf G bezeichne desweiteren

$$X^R(g) = d_1 r_g(X), \quad g \in G$$

das **rechtsinvariante Vektorfeld** auf G bezüglich X .

Nun ist $\kappa_{g \cdot p} = \kappa_p \circ r_g$ für alle $g \in G$ und $p \in M$ und folglich $d_1 \kappa_{gp} = d_g \kappa_p \circ d_1 r_g$. Damit ist

$$X^*(\kappa_p(g)) = d_g \kappa_p X^R(g) \quad \forall g \in G$$

und folglich die Vektorfelder $X^* \in \Gamma(M)$ und $X^R \in \Gamma(G)$ κ_p -äquivalent.

Ist nun $X : [a, b] \rightarrow \mathfrak{g}$ eine Kurve in der Liealgebra, so erhält man ein zeitabhängiges Vektorfeld auf G

$$[a, b] \times G \ni (t, g) \mapsto X(t)^R(g) \in T_g G$$

und zudem ein zeitabhängiges Vektorfeld in M mit

$$[a, b] \times M \ni (t, p) \mapsto X(t)^*(p) \in T_p M$$

Da nun κ_p Integralkurven auf Integralkurven abbildet, kann diese Konstruktion verwendet werden um Lösungen von Differentialgleichungen auf G in Lösungen von Differentialgleichungen auf M zu projizieren. Erfüllt nämlich $t \mapsto \gamma(t)$ die Gleichung

$$\gamma'(t) = X(t)^R \gamma(t)$$

so ist wegen der κ_p -Äquivalenz stets auch

$$\frac{d}{dt}(\gamma(t) \cdot p) = X(t)^*(\gamma(t) \cdot p)$$

Diese allgemeine Bemerkung soll nun auf den hier zu betrachtenden Fall angewendet werden. Es sei hierfür $X : [a, b] \rightarrow sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ die Matrix des Morse-Sturm Systems. Man sieht unmittelbar ein, dass $X(t)^R A = X(t) A$ für alle $A \in Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ und folglich ist Φ gerade eine Integralkurve von $X(t)^R$. Unter Verwendung von κ_{L_0} erhält man nun die Differentialgleichung

$$l'(t) = X(t)^* l(t), \quad t \in [a, b]$$

für die Kurve $l : [a, b] \rightarrow \Lambda$ mit $l(t) = \Phi(t) L_0$. Nun wurde aber das Vektorfeld X^* bereits in 5.2.9 berechnet und man erhält mit diesem Resultat

$$l'(t) = X(t)^* l(t) = \omega(X(t) \cdot, \cdot) |_{l(t) \in B_{sym}(l(t))}, \quad t \in [a, b] \quad (5.4.4)$$

Mit dieser Bemerkung ist der Beweis des folgenden entscheidenden Resultates nicht mehr sonderlich schwer.

5.4.8 Satz. *Es sei b nicht konjugiert und zudem jeder konjugierte Punkt nicht entartet. Dann besitzt das Morse-Sturm System nur endlich viele konjugierte Punkte und es ist*

$$\mu_{L_0}(l) = \sum_{t \in (a, b)} \operatorname{sgn}((\cdot, \cdot) |_{\mathbb{J}[t]^+})$$

Beweis. Für ein $t_0 \in (a, b)$ sei unter Verwendung von 5.4.7 $t_0 \in (a, b)$ $(0, x), (0, y) \in \{0\} \oplus \mathbb{J}[t_0]^\perp = l(t_0) \cap L_0$. Dann ist mit (5.4.4)

$$\begin{aligned} l'(t_0)((0, x), (0, y)) &= \omega(X(t_0)(0, x), (0, y)) \\ &= \omega((x, 0), (0, y)) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

Da nun jeder konjugierte Punkt nach Voraussetzung nicht entartet ist, ist folglich auch $l'(t_0)$ für jeden konjugierten Punkt $t_0 \in (a, b)$ auf $l(t_0) \cap L_0$ nicht entartet und zudem gilt

$$\operatorname{sgn}(l'(t_0) |_{l(t_0) \cap L_0}) = \operatorname{sgn}((\cdot, \cdot) |_{\mathbb{J}[t_0]^\perp})$$

Die Behauptung folgt nun aus 5.3.18. □

Aus diesem Resultat erhält man nun insbesondere zwei ebenso bedeutsame Folgerungen.

5.4.9 Folgerung. *Nicht entartete konjugierte Punkte sind isoliert.*

5.4.10 Folgerung. *Definiert (\cdot, \cdot) ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n , so ist*

$$\mu_{L_0}(l) = \sum_{t \in (a, b)} \operatorname{mult}(t)$$

5.4.11 Bemerkung. An dieser Stelle kann die immense Bedeutung dieser *Homotopieinvariante der Analysis* wohl noch nicht vollständig erfasst werden, da insbesondere noch keinerlei Bemerkung zu möglichen Irregularitäten der Struktur konjugierter Punkte gemacht wurden. Dieses wird im nächsten Kapitel nachgeholt.

Teil III

Morse Index Theoreme für Geodäten in semi-Riemannscher Geometrie

Kapitel 6

Grundlagen zur Morse Theorie semi-Riemannscher Geodäten

Eine **semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit** ist ein Paar (M, g) , wobei M eine glatte endlichdimensionale Mannigfaltigkeit und $g \in \Gamma(S^2T^*M)$ punktweise nicht entartet und von konstantem Index ν ist.

Desweiteren bezeichne $\text{grad } f \in \Gamma(TM)$ für eine glatte Funktion $f \in C^\infty(M)$ den **Gradienten** von f , also das eindeutige Vektorfeld mit

$$g(\text{grad } f, X) = df(X) = Xf \text{ für alle } X \in \Gamma(TM)$$

wobei $df \in \Gamma(T^*M)$ das Differential von f bezeichne. Es sei $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ der Levi-Civita Zusammenhang von M und $\frac{\nabla}{dt}$ die hiervon induzierte kovariante Ableitung entlang Kurven. Zudem sei $R \in T_3^1M = TM \otimes \otimes^3 T^*M$ der Krümmungstensor bezüglich des Levi-Civita Zusammenhangs versehen mit der Vorzeichenkonvention

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

Im Folgenden werden Geodäten grundsätzlich als auf dem Intervall $[0, 1]$ definierte Kurven betrachtet, was keine Einschränkung an die Allgemeinheit der Darstellung ist. Bekanntlich ist $g(\gamma', \gamma')$ für eine Geodäte $\gamma : I \rightarrow M$ konstant und damit heiÙe γ

- **zeitartig**, falls $g(\gamma', \gamma') < 0$,
- **lichtartig**, falls $g(\gamma', \gamma') = 0$ und
- **raumartig**, falls $g(\gamma', \gamma') > 0$

Zudem wird γ **kausal** genannt, falls γ nicht raumartig ist. Eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit vom Index $\nu = 1$ wird speziell als **Lorentz Mannigfaltigkeit** bezeichnet.

6.1 Perturbierte Geodäten, konjugierte Punkte und der Maslov Index

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Definitionen aus [MPP05] bereitgestellt und kommentiert. Zudem wird der im letzten Abschnitt dargelegte Maslov Index auf diese Situation angewendet und ein bedeutendes Resultat zu konjugierten Punkten semi-Riemannscher Geodäten präsentiert. Es ist zu beachten, dass die hier verwendete Vorzeichenkonvention des Krümmungstensors nicht mit der in [MPP05] übereinstimmt und sich daher die dort gegebenen Definitionen gerigfügig von diesen unterscheiden.

Im Weiteren sei $V : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, wobei $\text{grad } V$ stets die Anwendung des Gradienten von M auf $V(t, \cdot)$ bezeichne.

6.1.1 Definition. Eine **perturbierte Geodäte** ist eine glatte Kurve, die der Differentialgleichung

$$\frac{\nabla}{dx} \gamma'(x) + \text{grad } V(x, \gamma(x)) = 0 \quad (6.1.1)$$

genügt¹.

6.1.2 Bemerkung. Die Motivation der Definition ist naheliegend. Kann die gewöhnliche Geodätengleichung $\frac{\nabla}{dx} \gamma' = 0$ als Bewegungsgleichung für ein frei fallendes Teilchen der normierten Masse 1 mit kinetischer Energie $\frac{1}{2}g(\gamma', \gamma')$ aufgefasst werden, so ist (6.1.1) gerade die Verallgemeinerung der Bewegungsgleichung bei zusätzlicher Einwirkung eines zeitabhängigen Potentials V .

6.1.3 Definition. Ein Vektorfeld $\xi \in \Gamma(\gamma)$ entlang einer p-Geodäte γ heißt **Jacobifeld**, falls es der linearen Differentialgleichung

$$\frac{\nabla^2}{dx^2} \xi(x) - R(\gamma'(x), \xi(x))\gamma'(x) + \nabla_{\xi(x)} \text{grad } V(x, \gamma(x)) = 0 \quad (6.1.2)$$

genügt.

6.1.4 Bemerkung. Entsprechend der Form der p-Geodätengleichung als additive Störung der gewöhnlichen Geodätengleichung, ist auch die Jacobigleichung (6.1.2) lediglich eine additive Störung der gewöhnlichen Jacobigleichung. Die Jacobigleichung erhält man naheliegenderweise analog zum nicht gestörten Fall:

Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine p-Geodäte und $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ eine glatte Abbildung, so dass jedes $\Gamma(s, \cdot)$ eine p-Geodäte ist und $\Gamma(0, \cdot) = \gamma$. Die grundlegende Idee der Jacobigleichung ist das Aufsuchen einer Differentialgleichung für $\xi(t) = \frac{\partial}{\partial s} \Gamma(0, t)$, dem sogenannten Variationsvektorfeld

¹Im Folgenden wird dieser Begriff häufig durch p-Geodäte ersetzt.

von Γ . Die Motivation besteht in der Untersuchung des Verhaltens benachbarter Geodäten, was damit naheliegenderweise in engem Zusammenhang mit der Krümmung der Mannigfaltigkeit steht. Man hat zunächst mit (6.1.1) für jedes $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(s, t) + \frac{\nabla}{ds} \text{grad } V(t, \Gamma(s, t)) = 0$$

Da aber für jedes Vektorfeld X entlang einer glatten Variation (vgl. [Lee97, Lemma 10.1])

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} X - \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} X = -R\left(\frac{\partial}{\partial t} \Gamma, \frac{\partial}{\partial s} \Gamma\right) X$$

ist

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(s, t) - R\left(\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(s, t), \frac{\partial}{\partial s} \Gamma(s, t)\right) \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(s, t) + \frac{\nabla}{ds} \text{grad } V(t, \Gamma(s, t)) = 0$$

Unter Verwendung der Symmetriebeziehung $\frac{\nabla}{ds} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma = \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \Gamma$ (vgl. [Lee97, Lemma 6.3]) erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \Gamma(s, t) - R\left(\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(s, t), \frac{\partial}{\partial s} \Gamma(s, t)\right) \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(s, t) + \frac{\nabla}{ds} \text{grad } V(t, \Gamma(s, t)) \\ &= \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \Gamma(s, t) - R\left(\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(s, t), \frac{\partial}{\partial s} \Gamma(s, t)\right) \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(s, t) + \nabla_{\frac{\partial}{\partial s} \Gamma(s, t)} \text{grad } V(t, \Gamma(s, t)) \end{aligned}$$

und hieraus für $s = 0$ schließlich die Jacobigleichung (6.1.2).

6.1.5 Definition. Für eine p -Geodäte γ nennt man $x \in (0, 1]$ **konjugiert** (zu 0), falls ein Jacobifeld $\xi \in \Gamma(\gamma) \setminus \{0\}$ mit $\xi(0) = 0$ und $\xi(x) = 0$ existiert. Der entsprechende Punkt $\gamma(x) \in M$ heißt konjugiert zum Punkt $\gamma(0)$ entlang γ .

Dasweiteren wird γ **nicht entartet** genannt, falls 1 nicht konjugiert ist.

Es bezeichne weiterhin \mathcal{I} den offenbar n -dimensionalen Vektorraum aller Jacobifelder entlang γ , die der Anfangsbedingung $\xi(0) = 0$ genügen. Man nennt

$$\text{mult}(x) = \dim\{\xi \in \mathcal{I} : \xi(x) = 0\} \leq n$$

die **geometrische Vielfachheit** von $x \in (0, 1]$. Desweiteren sei

$$\mathcal{I}[x] = \{\xi(x) : \xi \in \mathcal{I}\} \subset T_{\gamma(x)} M$$

Es ist stets $m(x) = \text{codim } \mathcal{I}[x] = \dim \mathcal{I}[x]^\perp$ wobei \perp das orthogonale Komplement bezüglich $g_{\gamma(x)}$ bezeichne.

6.1.6 Definition. Für eine p -Geodäte heißt ein konjugiertes $x \in (0, 1]$ **regulär**, falls $g_{\gamma(x)}|_{\mathcal{I}[x]^\perp}$ nicht entartet ist. γ heißt eine **reguläre p -Geodäte**, falls alle konjugierten $x \in (0, 1]$ nicht entartet sind.

Das Ziel ist nun die Resultate aus Abschnitt 5.4.2 auf konjugierte Punkte perturbierter Geodäten anzuwenden. Hierzu benötigt man eine einfache, aber in der gesamten Theorie auftretende Konstruktion, die nun in Form einer Bemerkung gegeben werden soll.

6.1.7 Bemerkung. Es sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine p-Geodäte. Bekanntlich liefert die Parallelverschiebung zu jedem Vektor $V_0 \in T_{\gamma(0)}M$ ein eindeutiges Vektorfeld V entlang γ , so dass $V(0) = V_0$ und $\frac{\nabla}{dt}V \equiv 0$. Da nun nach Voraussetzung ∇ der Levi-Civita Zusammenhang von (M, g) ist, ist $g(V, W)$ für je zwei parallele Vektorfelder entlang γ konstant. Ist nun $\{e^1, \dots, e^n\}$ eine die Bilinearform $g_{\gamma(0)}(\cdot, \cdot)$ diagonalisierende Basis von $T_{\gamma(0)}M$, so existieren folglich glatte parallele Vektorfelder $\{e^1(t), \dots, e^n(t)\}$ entlang γ , so dass

$$g(e^i(t), e^i(t)) = \begin{cases} 1, & i \leq n - \nu \\ -1, & i > n - \nu \end{cases}, \quad g(e^i(t), e^j(t)) = 0, \quad i \neq j$$

Diese werden im Folgenden **Basisvektorfelder** entlang γ genannt und mit ihnen besitzt nun jedes Vektorfeld $\xi : I \rightarrow TM$ entlang γ eine Darstellung $\xi(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t)e^i(t)$ mit Funktionen $u_i : [0, 1] \rightarrow M$. Bekanntlich liefert zudem jede Wahl von Basisvektorfeldern zugleich ein Trivialisierung des Vektorbündels γ^*TM .

Durch Einsetzen solcher Basisvektorfelder in die Jacobi-Gleichung (6.1.2) erhält man nun

$$\begin{aligned} & \frac{\nabla^2}{dx^2} \left(\sum_{i=1}^n u_i(x)e^i(x) \right) - R \left(\gamma'(x), \sum_{i=1}^n u_i(x)e^i(x) \right) \gamma'(x) + \nabla_{\sum_{i=1}^n u_i(x)e^i(x)} \text{grad } V(x, \gamma(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n u_i''(x)e^i(x) + \sum_{i=1}^n (-R(\gamma'(x), e^i(x))\gamma'(x) + \nabla_{e^i(x)} \text{grad } V(x, \gamma(x)))u^i(x) = 0 \end{aligned}$$

Bildet man nun für $j = 1, \dots, n$ punktweise $g(\cdot, e^j(x))$, so ist aber diese Gleichung genau dann erfüllt, wenn

$$\varepsilon_i u_i''(x) + \sum_{j=1}^n -g(R(\gamma'(x), e^j(x))\gamma'(x) + \nabla_{e^j(x)} \text{grad } V(x, \gamma(x)), e^i(x))u_j(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

wobei

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & i \leq n - \nu \\ -1, & i > n - \nu \end{cases}$$

Betrachtet man nun die Matrix $S(x) = \{S_{ij}(x)\}_{1 \leq i, j \leq n}$ mit

$$S_{ij}(x) = g(-R(\gamma'(x), e^j(x))\gamma'(x) + \nabla_{e^j(x)} \text{grad } V(x, \gamma(x)), e^i(x))$$

so ist unter der gewählten Trivialisierung von γ^*TM die Jacobigleichung (6.1.2) äquivalent zu dem homogenen System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$Ju''(x) + S(x)u(x) = 0 \tag{6.1.3}$$

wobei

$$J = \begin{pmatrix} id_{n-\nu} & 0 \\ 0 & -id_\nu \end{pmatrix}$$

und

$$u = (u_1, \dots, u_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Man beachte zudem, dass unter der gewählten Trivialisierung von γ^*TM die Metrik g in die konstante Bilinearform $\langle J \cdot, \cdot \rangle$ auf \mathbb{R}^n überführt wird.

6.1.8 Lemma. *Für jedes $x \in [a, b]$ ist $S(x)$ symmetrisch.*

Beweis. Nach Definition ist

$$S_{ij}(x) = g(-R(\gamma'(x), e^j(x))\gamma'(x), e^i(x)) + g(\nabla_{e^j(x)} \text{grad } V(x, \gamma(x)), e^i(x))$$

und die Symmetrie des ersten Summanden wegen der Eigenschaften des Krümmungstensors gegeben. Die Symmetrie des zweiten Terms erhält man unter Verwendung der Torsionsfreiheit des Levi-Civita Zusammenhangs aus

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \text{grad } f, Y) - g(\nabla_Y \text{grad } f, X) &= Xg(\text{grad } f, Y) - g(\text{grad } f, \nabla_X Y) \\ &\quad - Yg(\text{grad } f, X) + g(\text{grad } f, \nabla_Y X) \\ &= X(Yf) - (\nabla_X Y)f - Y(Xf) + (\nabla_Y X)f \\ &= [X, Y]f - (\nabla_X Y - \nabla_Y X)f \\ &= [X, Y]f - [X, Y]f = 0 \end{aligned}$$

für zwei Vektorfelder X, Y und eine glatte Funktion f auf M . □

Damit ist insbesondere die transformierte Jacobi-Gleichung (6.1.3) ein Morse-Sturm System. Man erhält also durch jegliche obige Wahl von Basisvektorfeldern einen Isomorphismus zwischen dem $2n$ -dimensionalen Raum aller Lösungen der Jacobigleichung (6.1.2) und dem Lösungsraum des Morse-Sturm Systems (6.1.3). Es ist dabei unmittelbar einzusehen, dass dieser Isomorphismus zudem \mathcal{I} in \mathbb{J} abbildet. Desweiteren hat man eine Familie von Isomorphismen

$$\psi_x : T_{\gamma(x)}M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \xi = \sum_{i=1}^n \xi_i e^i(x) \mapsto \tilde{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$$

für die zudem $g_{\gamma(x)}(\xi, \eta) = \langle J\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \rangle$. Damit ist nun insbesondere $\psi_x(\mathcal{I}[x]) = \mathbb{J}[x]$ und $\psi_x(\mathcal{I}[x]^\perp) = \mathbb{J}[x]^\perp$, wobei wie im Abschnitt 5.4.2 für $\mathbb{J}[x]$ mit \perp das orthogonale Komplement bezüglich $(\cdot, \cdot) = \langle J \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet werde. Damit kann aber das Studium der konjugierten Punkte von Jacobifeldern vollständig anhand der transformierten Gleichung (6.1.3) vollzogen werden. Somit stehen aber sämtliche in Abschnitt 5.4.2 bereitgestellten Werkzeuge zur Verfügung, so dass nun

konjugierte Punkte entlang einer p -Geodäten mittels des induzierten Weges in der Lagrange-Grassmannschen Λ untersucht werden können.

Es sollen nun Resultate vorgestellt werden, die mittels dieses Vorgehens erhalten wurden.

Zunächst ist eine wichtige Erkenntnis, dass in gewisser Weise auch eine Umkehrung der durch die Basisvektorfelder erhaltenen Transformation der Jacobigleichung auf ein Morse-Sturm System gilt.

6.1.9 Satz. *Für jede glatte Abbildung $[0, 1] \ni x \mapsto S(x) \in \mathcal{S}(n)$ und jede Wahl von ν existiert eine konform flache n -dimensionale semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) vom Index ν und eine Geodäte $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, so dass (6.1.3) die zugehörige transformierte Jacobi-Gleichung ist.*

Beweis. [MPT00, Proposition 2.3.1 & Remark 2.3.5] □

Bekanntlich ist die Anzahl der konjugierten Punkte entlang einer Geodäte in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit stets endlich. Die Ungültigkeit dieser Aussage ist eine ausgesprochene Besonderheit des allgemeinen semi-Riemannschen Falles, die erst 1994 von Helfer entdeckt wurde (vgl. [Hel94]). Dieser konstruierte mittels des obigen Ergebnis 6.1.9 und Kurven in der Lagrange-Grassmannschen implizit eine raumartige Geodäte $\gamma : (0, \infty) \rightarrow M$ in einer dreidimensionalen Lorentz-Mannigfaltigkeit M , deren konjugierte Punkte durch das Intervall $(1, \infty)$ gegeben sind. Unter Verwendung der hier gegebenen Beschreibung der Lagrange-Grassmannschen gelang es Piccione und Tausk in [PT03] dieses Phänomen durch ein allgemeines Theorem zu beschreiben. Nach Definition einer Kategorie, deren Objekte aus Paaren symplektischer Vektorräume und glatter Wege in ihrer Lagrange-Grassmannschen bestehen, erhält man einen Begriff der Isomorphie, mit dem gezeigt werden kann, dass jedes einer gewissen Zusatzbedingung genügende Element dieser Kategorie zu dem von einer Gleichung (6.1.3) induzierten Weg in der Lagrange-Grassmannschen des \mathbb{R}^{2n} isomorph ist. Da dieser kategorielle Isomorphismus nun aber die Dimensionen der interessierenden Schnitte erhält, genügt es mit 6.1.9 zur Konstruktion von Geodäten mit einer außergewöhnlichen Menge der konjugierte Punkte lediglich einen geeigneten Weg in der Lagrange-Grassmannschen eines beliebigen symplektischen Vektorraumes zu konstruieren. Hiermit konnten Piccione und Tausk das folgende Resultat beweisen.

6.1.10 Satz. *Es sei $n \geq 3$ und $F \subset (0, 1]$ eine beliebige kompakte Teilmenge. Dann existiert eine n -dimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit (M, g) und eine raumartige Geodäte $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, so dass F die Menge der konjugierten Punkte von γ ist.*

Hiermit hat man also implizit Geodäten gegeben, die eine recht beliebige Struktur ihrer konjugierten Punkte haben können². Insbesondere besteht damit auf einer allgemeinen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit nicht mehr die Möglichkeit einer Zählung der konjugierten Punkte entlang einer beliebigen Geodäte.

Die Überlegungen des letzten Kapitels legen die folgende Definition nahe.

²Man etwa an das Cantorsche Diskontinuum.

6.1.11 Definition. Für eine nicht entartete p -Geodäte $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ sei der **Maslov Index** definiert als der Maslov Index der transformierten Jacobigleichung (6.1.3).

Man erhält nun aus den Ergebnissen des Abschnittes 5.4.2 unmittelbar das folgende entscheidende Resultat.

6.1.12 Satz. *Eine nicht entartete reguläre p -Geodäte $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ besitzt nur endlich viele konjugierte Punkte und es ist*

$$i_{Maslov}(\gamma) = \sum_{x \in (0,1)} \operatorname{sgn} g_{\gamma(x)} |I[x]^+$$

Desweiteren sind reguläre konjugierte Punkte stets isoliert.

Hiermit erhält man insbesondere auf einem ganz anderen Weg die Endlichkeit der konjugierten Punkte im Riemannschen Fall für die allgemeineren perturbierten Geodäten.

6.1.13 Folgerung. *Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine nicht entartete p -Geodäte, so besitzt γ nur endlich viele konjugierte Punkte und es ist*

$$i_{Maslov}(\gamma) = \sum_{x \in (0,1)} \operatorname{mult}(x)$$

Also ist zusammenfassend der Maslov Index eine ganze Zahl, die jeder p -Geodäte einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit zugewiesen werden kann und zudem in gewisser Weise eine Verallgemeinerung der Zählung konjugierter Punkte entlang der Geodäte ist.

Mit den Konstruktionen und Resultaten des letzten Kapitels und dieses Abschnittes sind die wesentlichen bisher zur Verfügung stehenden Techniken zur Behandlung semi-Riemannschen Geodäten dargelegt. Die Kenntnis dieser Begriffe wird in den meisten Artikeln zum Thema als bekannt vorausgesetzt.

6.2 Die Hilbertmannigfaltigkeit $H^1([a, b], M)$

Die Anwendung der Morse Theorie auf Geodäten einer festen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit M verwendet als zugrundeliegende Hilbertmannigfaltigkeit die mit einer geeigneten Topologie versehene Menge aller Wege $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ der Sobolev Regularität H^1 in M . Für diese Menge wurde erstmalig in der Arbeit [Pa63] die Struktur einer Hilbertmannigfaltigkeit definiert. Die grundlegende Idee ist hierbei zunächst $H^1(I, M)$ für abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten M eines euklidischen Raumes als Hilbertmannigfaltigkeiten zu etablieren und anschließend die Unabhängigkeit dieser Struktur von einer wegen des Whitney Einbettungssatzes stets existierenden Einbettung einer allgemeinen glatten Mannigfaltigkeit M in einen solchen Koordinatenraum nachzuweisen. Bedauerlicherweise ist diese für jede glatte Mannigfaltigkeit M gegebene Definition für konkrete Rechnungen nicht sonderlich praktikabel. Ein späterer vollkommen intrinsischer Zugang ist in [Kli82] nachzulesen, ist aber dort bedauerlicherweise ausschließlich für Riemannsche Mannigfaltigkeiten angegeben und zumindest nicht direkt auf den Fall allgemeiner semi-Riemannscher Mannigfaltigkeiten übertragbar³. Diesem prinzipiellen Misstand ist trotz der fundamentalen Bedeutung von $H^1(I, M)$ für die gesamte Theorie zumeist wenig Aufmerksamkeit geschenkt worden. In Artikeln zur Morse Theorie semi-Riemannscher Geodäten wird diese Problematik entweder unbeantwortet gelassen oder auf [Kli82] verwiesen⁴. Die Gültigkeit einiger Aussagen zu $H^1(I, M)$ und Abbildungen auf $H^1(I, M)$ aus diesen Artikeln bleibt damit unbeantwortet.

Erfreulicherweise findet sich in dem nicht vollendeten Skriptum [MPT01] eine alternative Betrachtung von $H^1([a, b], M)$, die scheinbar an Forschungsartikel der Autoren orientiert ist (vgl. hierzu [PT01]). Zur Definition einer glatten Struktur wird hier aus dem Atlas von M direkt ein Atlas für $H^1([a, b], M)$ konstruiert, mit dem dann sämtliche später zu betrachtenden Abbildung auf diesem Raum in Karten untersucht werden können.

Wie jede Betrachtung von $H^1([a, b], M)$ ist auch diese durchaus abstrakt und benötigt einige Vorbereitungen. Hierzu wird in einem ersten Abschnitt das spätere Modell $H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ der Hilbertmannigfaltigkeit betrachtet, bevor im weiteren die Konstruktion des glatten Atlas zunächst im Modell vorbereitet, und dann auf der Mannigfaltigkeit durchgeführt wird. Das eigentlich für die Morse Theorie bedeutungsvolle Objekt ist nun eine Untermannigfaltigkeit von $H^1([a, b], M)$, die später in diesem Kapitel definiert wird.

In den Werken [Mi69] und [Jo02] findet man Beweise des Morse Index Theorems und bedeutende Anwendungen für Riemannsche Mannigfaltigkeiten, wobei auf eine sonderlich genaue Betrachtung der Mannigfaltigkeitsstruktur des zugrundeliegenden Kurvenraumes wenig geachtet wird, was aber in diesen Fällen auch nicht notwendig ist. Für die Behandlung allgemeiner semi-

³Die Konstruktion beginnt mit Vervollständigungen normierter linearer Räume unter Verwendung der gegebenen Riemannschen Metrik.

⁴Ein besonderes Beispiel hierzu findet sich unter anderem in der Arbeit [BM92, S. 434]. Mit kommentarlosem Verweis auf [Kli82] wird hier die Endlichkeit der Menge konjugierter Punkte entlang beliebiger semi-Riemannscher Geodäten angenommen

Riemannscher Geodäten ist eine genau Beschreibung allerdings unumgänglich, um Methoden und Konzepte der Funktionalanalysis anwenden zu können.

Der Inhalt dieses Abschnittes entstammt überwiegend [MPT01], wobei einige Resultate aus [Pa63] und [Ma94] hinzugenommen wurden. In [MPT01] sind einige Details der Konstruktion als Übungsaufgaben gestellt, die hier mit in die Darstellung eingebunden sind.

6.2.1 Der Hilbertraum $H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$

Die in diesem Abschnitt betrachteten Funktionenräume $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ und $L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ seien stets mit ihren gewöhnlichen Normen versehen.

Für zwei normierte Räume $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ ist bekanntlich durch $\|\cdot\|_p = (\|\cdot\|_X^p + \|\cdot\|_Y^p)^{\frac{1}{p}}$ mit $p \in \mathbb{N}$ stets eine Norm auf $X \oplus Y$ gegeben. Diese Normen sind alle äquivalent und liefern die Produkttopologie. Sofern nicht anders genannt, wird auf $X \oplus Y$ die Norm $\|\cdot\|_2$ verwendet.

6.2.1 Definition. Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist **absolutstetig**, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für beliebige disjunkte Teilintervalle $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ von $[a, b]$ mit $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ stets

$$\sum_{i=1}^n \|\gamma(b_i) - \gamma(a_i)\| < \varepsilon$$

6.2.2 Bemerkung. 1. Offenbar ist jede absolutstetige Kurve stetig und jede Lipschitz-stetige Kurve (folglich also insbesondere auch jede stückweise C^1 -Kurve) ist absolutstetig.

2. Die Menge der absolutstetigen Kurven bildet einen Untervektorraum von $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, der mit $AC([a, b], \mathbb{R}^n)$ bezeichnet wird.

Es sei an die allgemeine Formulierung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erinnert.

6.2.3 Satz. 1. Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann absolutstetig, wenn die Ableitung $\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$ für fast alle $t \in [a, b]$ existiert, $\gamma' \in L^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ und $\gamma(t) = \gamma(a) + \int_a^t \gamma'(s) ds$ für alle $t \in [a, b]$.

2. Ist $\eta \in L^1([a, b], \mathbb{R}^n)$, so ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \gamma(t) = \int_a^t \eta(s) ds$ absolutstetig mit $\gamma' = \eta$ fast überall.

Beweis. [Rud99, Satz 7.11 und Satz 7.20] Hierbei sind die Ausführungen vor Definition 7.17. zu beachten. □

6.2.4 Definition. Man definiert

$$H^1([a, b], \mathbb{R}^n) = \{\gamma \in AC([a, b], \mathbb{R}^n) : \gamma' \in L^2([a, b], \mathbb{R}^n)\}$$

6.2.5 Bemerkung. Es ist nicht schwer einzusehen, dass diese Definition in dem offensichtlichen Sinne gerade mit der gewöhnlichen Definition des Sobolev-Raumes $H^{1,2}([a, b], \mathbb{R}^n)$ übereinstimmt

(vgl. hierzu [Zie89, Theorem 2.1.4]). Dennoch werden hier Elemente aus $H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ grundsätzlich als Funktionen und nicht als Äquivalenzklassen aufgefasst.

Das nächste Ziel ist nun den Vektorraum $H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ mit einer geeigneten Topologie zu versehen.

6.2.6 Lemma. *Die Abbildung*

$$H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \ni \gamma \mapsto (\gamma, \gamma') \in C([a, b], \mathbb{R}^n) \oplus L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$$

ist linear, injektiv und hat abgeschlossenes Bild.

Beweis. Linearität und Injektivität sind klar. Es sei

$$(\gamma_n, \gamma'_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\gamma, \eta) \in C([a, b], \mathbb{R}^n) \oplus L^2([a, b], \mathbb{R}^n), \quad \gamma_n \in H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Mit 6.2.3 ist $\gamma_n(t) = \gamma_n(a) + \int_a^t \gamma'_n(s) ds$ und mit $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(a) + \int_a^t \eta(s) ds$ ist $\tilde{\gamma} \in H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ mit $\tilde{\gamma}' = \eta \in L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$. Damit ist für $t \in [a, b]$ unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\gamma_n(t) - \tilde{\gamma}(t)\| &\leq \|\gamma_n(a) - \gamma(a)\| + \int_a^t \|\gamma'_n(s) - \eta(s)\| ds \\ &\leq \|\gamma_n(a) - \gamma(a)\| + \sqrt{b-a} \left(\int_a^t \|\gamma'_n(s) - \eta(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\gamma_n(a) - \gamma(a)\| + \sqrt{b-a} \|\gamma'_n - \eta\|_{L^2([a, b], \mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

und folglich $\|\gamma_n - \tilde{\gamma}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Damit ist aber $\gamma = \tilde{\gamma} \in H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ mit $\gamma' = \tilde{\gamma}' = \eta$, also (γ, η) ein Element des Bildes obiger Abbildung, womit sich dieses als abgeschlossen erweist. \square

Das Bild obiger Abbildung ist folglich mit der Norm $\|\gamma\| = \|\gamma\|_\infty + \|\gamma'\|_{L^2}$ ein Banachraum. Da nun obige Abbildung zudem linear und injektiv ist, wird durch sie eine Norm auf $H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ induziert, mit der auch dieser Vektorraum ein Banachraum ist. Im Folgenden sei $H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ stets mit dieser Topologie versehen. Mehr über diese Topologie lehrt folgendes Resultat.

6.2.7 Lemma. *Für ein festes $t_0 \in [a, b]$ betrachte man die Abbildungen*

$$H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \ni \gamma \mapsto (\gamma, \gamma') \in L^2([a, b], \mathbb{R}^n) \oplus L^2([a, b], \mathbb{R}^n) \tag{6.2.1}$$

$$H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \ni \gamma \mapsto (\gamma(t_0), \gamma') \in \mathbb{R}^n \oplus L^2([a, b], \mathbb{R}^n) \tag{6.2.2}$$

Dann ist (6.2.1) eine stetige, lineare und injektive Abbildung mit abgeschlossenem Bild und (6.2.2) ein topologischer Isomorphismus.

Beweis. Man betrachte zunächst die Abbildung (6.2.1). Die Linearität ist klar. Weiterhin ist für $\gamma \in H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \|(\gamma, \gamma')\|_1 &= \left(\int_a^b \|\gamma(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b \|\gamma'(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{b-a} \|\gamma\|_\infty + \|\gamma'\|_{L^2} \leq \max\{1, \sqrt{b-a}\} (\|\gamma\|_\infty + \|\gamma'\|_{L^2}) \end{aligned}$$

und folglich (6.2.1) stetig. Ist nun $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ eine Folge mit

$$(\gamma_n, \gamma'_n) \rightarrow (\gamma, \eta) \in L^2([a, b], \mathbb{R}^n) \oplus L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$$

und $\gamma_n(t) = \gamma_n(a) + \int_a^t \gamma'_n(s) ds$, so ist zunächst für jedes $t \in [a, b]$

$$\left\| \int_a^t \gamma'_n(s) ds - \int_a^t \eta(s) ds \right\| \leq \int_a^b \|\gamma'_n(s) - \eta(s)\| ds \leq \sqrt{b-a} \|\gamma'_n - \eta\|_{L^2}$$

und damit $\left\| \int_a^t \gamma'_n(s) ds - \int_a^t \eta(s) ds \right\|_{L^2} \leq (b-a) \|\gamma'_n - \eta\|_{L^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Damit konvergiert aber auch $\{\gamma_n(a)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\gamma_n - \int_a^t \gamma'_n(s) ds\}_{n \in \mathbb{N}}$ in L^2 und zwar gegen eine konstante Funktion c , und insgesamt ist schließlich $\gamma(t) = c + \int_a^t \eta(s) ds$ für fast alle $t \in [a, b]$, also $\gamma \in H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ mit $\gamma' = \eta$.

Die Abbildung (6.2.2) ist zunächst offenbar linear und wegen 6.2.3 injektiv. Ist zudem $(x, \eta) \in \mathbb{R}^n \oplus L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$, so ist durch $\gamma(t) = x + \int_{t_0}^t \eta(s) ds, t \in [a, b]$ offenbar ein Urbild $\gamma \in H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ gegeben. Ist nun $\gamma \in H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$, so erhält man aus

$$\|(\gamma(t_0), \gamma')\|_1 = \|\gamma(t_0)\| + \|\gamma'\|_{L^2} \leq \|\gamma\|_\infty + \|\gamma'\|_{L^2}$$

die Stetigkeit von (6.2.2) und damit die Behauptung aus dem Prinzip der offenen Abbildung. \square

Da nun wegen des Prinzips der offenen Abbildung (6.2.1) ein topologischer Isomorphismus auf sein Bild ist und (6.2.2) ein topologischer Isomorphismus ist, induzieren die Skalarprodukte

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle_{L^2} + \langle \gamma'_1, \gamma'_2 \rangle_{L^2} \quad (6.2.3)$$

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \langle \gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0) \rangle_{L^2} + \langle \gamma'_1, \gamma'_2 \rangle_{L^2} \quad (6.2.4)$$

die gleiche Topologie auf $H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ wie die bereits gegebene, so dass der topologische Vektorraum $H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ mit jedem dieser äquivalenten Skalarprodukte sogar ein Hilbertraum ist. Von besonderer Bedeutung ist im Folgenden der Unterraum

$$H_0^1([a, b], \mathbb{R}^n) := \{\gamma \in H^1([a, b], \mathbb{R}^n) : \gamma(a) = \gamma(b) = 0\} \subset H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$$

6.2.8 Lemma. $H_0^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ ist ein abgeschlossener linearer Unterraum der Kodimension $2n$.

Beweis. Die Abgeschlossenheit von $H_0^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ ist mit (6.2.2) unmittelbar einzusehen.

Man betrachte nun die Abbildung

$$H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \ni \gamma \mapsto (\tilde{\gamma}, \gamma(a), \gamma(b)) \in H_0^1([a, b], \mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \quad (6.2.5)$$

wobei $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) - \frac{t-b}{a-b} \gamma(a) + \frac{t-a}{a-b} \gamma(b)$. Diese Abbildung ist offenbar linear und bijektiv. Folglich ist aber die Kodimension $2n$. \square

Sofern nicht anders gesagt, sei von nun an $H_0^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ stets mit dem Skalarprodukt (6.2.4) für $t_0 = a$ versehen.

6.2.9 Lemma. Man betrachte $H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ mit dem Skalarprodukt (6.2.4) für $t_0 = a$ und die Abbildung

$$D : H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow L^2([a, b], \mathbb{R}^n); \gamma \mapsto \gamma'$$

Es ist $D \in \mathcal{L}(H^1([a, b], \mathbb{R}^n), L^2([a, b], \mathbb{R}^n))$ mit $\|D\| = 1$ und

$$D \upharpoonright_{H_0^1([a, b], \mathbb{R}^n)} : H_0^1([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow D(H_0^1([a, b], \mathbb{R}^n))$$

ist eine Isometrie mit

$$\begin{aligned} D(H_0^1([a, b], \mathbb{R}^n)) &= \{\gamma \in L^2([a, b], \mathbb{R}^n) : \int_a^b \gamma(t) dt = 0\} \\ &= \{\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n : \gamma \equiv \text{const.}\}^{\perp L^2} \end{aligned}$$

Beweis. Offenbar ist zunächst $\|D\gamma\|_{L^2([a, b], \mathbb{R}^n)} \leq \|\gamma\|_{H^1([a, b], \mathbb{R}^n)}$ für $\gamma \in H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ sowie $\|D\gamma\|_{L^2([a, b], \mathbb{R}^n)} = \|\gamma\|_{H^1([a, b], \mathbb{R}^n)}$ für $\gamma \in H_0^1([a, b], \mathbb{R}^n)$. Damit ist aber

$$D \in \mathcal{L}(H^1([a, b], \mathbb{R}^n), L^2([a, b], \mathbb{R}^n))$$

mit $\|D\| = 1$ und $D \upharpoonright_{H_0^1([a, b], \mathbb{R}^n)}$ eine Isometrie.

Für $\gamma' \in D(H_0^1([a, b], \mathbb{R}^n))$ gilt $\int_a^b \gamma'(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a) = 0$. Ist umgekehrt $\int_a^b \eta(t) dt = 0$ mit $\eta \in L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$, so ist $\gamma(t) = \int_a^t \eta(s) ds \in H_0^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ mit $D\gamma = \eta$. Die letzte behauptete Gleichheit gilt wegen $\int_a^b \langle \eta(t), c \rangle dt = \langle \int_a^b \eta(t) dt, c \rangle$ für alle $\eta \in L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ und $c \in \mathbb{R}^n$. \square

6.2.10 Lemma. Für $\gamma \in H_0^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ und $\eta \in AC([a, b], \mathbb{R}^n)$ ist

$$\langle \eta', \gamma \rangle_{L^2([a, b], \mathbb{R}^n)} = -\langle \eta, \gamma' \rangle_{L^2([a, b], \mathbb{R}^n)}$$

Beweis. Zunächst ist die Funktion $[a, b] \ni t \mapsto \langle \eta(t), \gamma(t) \rangle \in \mathbb{R}$ offenbar absolutstetig mit Ableitung $\langle \eta'(t), \gamma(t) \rangle + \langle \eta(t), \gamma'(t) \rangle$ für fast alle $t \in [a, b]$. Mit 6.2.3 erhält man

$$\begin{aligned} \int_a^b \langle \eta'(t), \gamma(t) \rangle dt + \int_a^b \langle \eta(t), \gamma'(t) \rangle dt &= \int_a^b (\langle \eta(t), \gamma(t) \rangle)' dt \\ &= \langle \eta(b), \gamma(b) \rangle - \langle \eta(a), \gamma(a) \rangle = 0 \end{aligned}$$

\square

6.2.11 Lemma. $C^\infty([a, b], \mathbb{R}^n) \subset H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ ist dicht.

Beweis. Mit $t_0 = a$ wird $C^\infty([a, b], \mathbb{R}^n) \subset H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ unter dem topologischen Isomorphismus (6.2.2) auf $\mathbb{R}^n \oplus C^\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ abgebildet. Man erhält die Aussagen hiermit aus der Dichtheit von $C^\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ in $L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$. \square

6.2.12 Lemma. Für $\gamma \in H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ ist

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\| \leq |t - s|^{\frac{1}{2}} \|\gamma'\|_{L^2([a, b], \mathbb{R}^n)} \quad \text{für alle } t, s \in [a, b]$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \|\gamma(t) - \gamma(s)\| &= \left\| \int_s^t \gamma'(x) dx \right\| \leq \int_a^b \chi_{[\min\{s,t\}, \max\{s,t\}]}(x) \|\gamma'(x)\| dx \\ &\leq |t - s|^{\frac{1}{2}} \|\gamma'\|_{L^2([a,b], \mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

□

6.2.13 Folgerung. $H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \subset C^{\frac{1}{2}}([a, b], \mathbb{R}^n)$, wobei $C^{\frac{1}{2}}([a, b], \mathbb{R}^n)$ den Raum der $\frac{1}{2}$ -Hölder stetigen Funktionen bezeichne.

6.2.14 Satz. $H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ ist kompakt in $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ eingebettet, d.h. die Inklusion $H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \hookrightarrow C([a, b], \mathbb{R}^n)$ ist kompakt.

Beweis. Es sei $S \subset H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ eine beschränkte Teilmenge. Diese ist damit offenbar auch in $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ beschränkt und es existiert eine Konstante $M > 0$ mit $\|\gamma'\|_{L^2([a,b], \mathbb{R}^n)} < M$ für alle $\gamma \in S$. Damit ist aber wegen 6.2.12 $\|\gamma(t) - \gamma(s)\| \leq M|t - s|^{\frac{1}{2}}$ für alle $s, t \in [a, b]$ und alle $\gamma \in S$, also insgesamt $S \subset C([a, b], \mathbb{R}^n)$ beschränkt und gleichgradig stetig. Wegen des Satzes von Arzelà-Ascoli ist folglich $S \subset C([a, b], \mathbb{R}^n)$ relativkompakt. Nach Definition ist also die betrachtete Inklusion kompakt. □

6.2.15 Folgerung. $H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ ist kompakt in $L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ eingebettet.

Beweis. Da die Einbettung $C([a, b], \mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ stetig ist, folgt dies unmittelbar aus 6.2.14. □

6.2.16 Lemma. Unter der Identifikation $\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ ist die offensichtliche Abbildung

$$H^1([a, b], \mathbb{R}^m) \oplus H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow H^1([a, b], \mathbb{R}^{m+n})$$

in der Norm (6.2.4) eine Isometrie.

Beweis. Für $\gamma \in H^1([a, b], \mathbb{R}^m)$ und $\eta \in H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ ist

$$\begin{aligned} \|(\gamma, \eta)\|_{H^1([a,b], \mathbb{R}^{m+n})}^2 &= \langle (\gamma, \eta), (\gamma, \eta) \rangle_{H^1([a,b], \mathbb{R}^{m+n})} \\ &= \|\gamma(t_0)\|^2 + \|\gamma'\|_{L^2([a,b], \mathbb{R}^m)}^2 + \|\eta(t_0)\|^2 + \|\eta'\|_{L^2([a,b], \mathbb{R}^n)}^2 \\ &= \|\gamma\|_{H^1([a,b], \mathbb{R}^m)}^2 + \|\eta\|_{H^1([a,b], \mathbb{R}^n)}^2 \end{aligned}$$

□

6.2.2 Konstruktion von $H^1([a, b], M)$

6.2.17 Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n . Ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ heißt von Sobolev-Klasse H^1 , falls für jede Karte $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$ von M und jedes Intervall $[c, d] \subset [a, b]$ mit $\gamma([c, d]) \subset U$ stets $\varphi \circ \gamma|_{[c,d]} \in H^1([c, d], \mathbb{R}^n)$.

Es bezeichne $H^1([a, b], M)$ die Menge aller Wege der Klasse H^1 in M .

6.2.18 Bemerkung. Es ist genau dann $\gamma \in H^1([a, b], M)$, wenn für jedes $t_0 \in [a, b]$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Karte (U, φ) von M existiert, so dass $\gamma([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [a, b]) \subset U$ und

$$\varphi \circ \gamma|_{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [a, b]} \in H^1([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [a, b], \mathbb{R}^n)$$

Vorbereitungen im Modell zur Konstruktion des Atlas

6.2.19 Satz. Es sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $\alpha \in C(U, \mathbb{R}^n)$.

- $\mathfrak{h}_C[U] := \{\gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^m) : \text{graph}(\gamma) \subset U\} \subset C([a, b], \mathbb{R}^m)$ ist offen.
- Die Abbildung $\mathfrak{h}_C[\alpha] : \mathfrak{h}_C[U] \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}^n)$ mit

$$\mathfrak{h}_C[\alpha](\gamma)(t) = \alpha(t, \gamma(t)), \quad t \in [a, b]$$

ist stetig.

Beweis. Es sei $\gamma \in \mathfrak{h}_C[U]$. Dann ist $\text{graph}(\gamma) \subset U$ kompakt in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ und da

$$\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \setminus U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$$

abgeschlossen ist und $\Omega \cap \text{graph}(\gamma) = \emptyset$, ist $d(\Omega, \text{graph}(\gamma)) =: \varepsilon > 0$. Damit ist aber

$$U_{\frac{\varepsilon}{2}}(\gamma) = \{\eta \in C([a, b], \mathbb{R}^m) : \|\eta - \gamma\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2}\} \subset \mathfrak{h}_C[U]$$

also $\mathfrak{h}_C[U] \subset C([a, b], \mathbb{R}^m)$ offen.

Es sei nun $\eta \in \mathfrak{h}_C[U]$ und $\varepsilon_1 > 0$, sowie $\varepsilon > 0$ wie im ersten Teil des Beweises gewählt und $B(\eta) = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : d((t, x), \text{graph}(\eta)) \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$. Wegen der Kompaktheit von $B(\eta) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ ist aber $\alpha : B(\eta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ gleichmäßig stetig und folglich existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $(t, x), (s, y) \in B(\eta)$ mit $\|(t, x) - (s, y)\| < \delta$ stets $\|\alpha(t, x) - \alpha(s, y)\| < \varepsilon_1$. Damit ist aber $\|\alpha(t, \gamma(t)) - \alpha(t, \eta(t))\|_{\infty} < \varepsilon_1$ für alle $\gamma \in \mathfrak{h}_C[U]$ mit $\|\gamma - \eta\|_{\infty} < \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{2}\}$. \square

Die weiteren Konstruktionen benötigen mehr Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis.

6.2.20 Definition. Es sei Y ein Banachraum. Eine **separierende Familie** für Y ist eine Menge \mathcal{F} bestehend aus Abbildungen $\lambda \in \mathcal{L}(Y, Z_{\lambda})$, wobei jedes Z_{λ} ein Banachraum ist, so dass für alle $v \in Y \setminus \{0\}$ ein $\lambda \in \mathcal{F}$ mit $\lambda(v) \neq 0$ existiert.

Zur Veranschaulichung besitzt beispielsweise wegen des Hahn-Banach Theorems jeder Banachraum Y die separierende Familie $\mathcal{L}(Y, \mathbb{K})$.

6.2.21 Lemma. Es seien X, Y Banachräume, $U \subset X$ offen, $f : U \rightarrow Y$ eine Abbildung und \mathcal{F} eine separierende Familie für Y . Desweiteren sei $g \in C(U, \mathcal{L}(X, Y))$ und es existiere für jedes $x \in U, v \in X$ und $\lambda \in \mathcal{F}$ die Richtungsableitung

$$\frac{\partial(\lambda \circ f)}{\partial v}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\lambda \circ f)(x + tv) - (\lambda \circ f)(x)}{t} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial(\lambda \circ f)}{\partial v}(x) = \lambda(g(x) \cdot v)$$

Dann ist $f \in C^1(U, Y)$ mit $Df = g$.

Beweis. Es sei $x \in U$ fest und r definiert durch

$$f(x+h) - f(x) = g(x) \cdot h + r(h)$$

Damit genügt es $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$ nachzuweisen.

Für ein hinreichend kleines h ist das abgeschlossene Geradensegment $[x, x+h]$ in U enthalten und folglich kann für jedes $\lambda \in \mathcal{F}$ eine Funktion

$$[0, 1] \ni t \mapsto (\lambda \circ f)(x+th) \in Z_\lambda$$

definiert werden. Wegen

$$\frac{d}{dt}(\lambda \circ f)(x+th) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(\lambda \circ f)(x+th+\delta h) - (\lambda \circ f)(x+th)}{\delta} = \frac{\partial(\lambda \circ f)}{\partial h}(x+th), \quad t \in [0, 1]$$

ist nach Voraussetzung jede dieser Funktionen differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt}(\lambda \circ f)(x+th) = \lambda(g(x+th) \cdot h)$$

Unter Verwendung des Mittelwertsatzes (vgl. [La93, XIII, Theorem 4.2]) erhält man nun für jedes $\lambda \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \lambda(r(h)) &= (\lambda \circ f)(x+h) - (\lambda \circ f)(x) - \lambda(g(x) \cdot h) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(\lambda \circ f)(x+th) dt - \lambda(g(x) \cdot h) \\ &= \int_0^1 \lambda(g(x+th) \cdot h) dt - \lambda(g(x) \cdot h) = \lambda \left(\int_0^1 g(x+th) \cdot h dt - g(x) \cdot h \right) \end{aligned}$$

Wegen der definierenden Eigenschaft einer separierenden Familie ist damit aber

$$r(h) = \int_0^1 g(x+th) \cdot h dt - g(x) \cdot h = \left(\int_0^1 g(x+th) - g(x) dt \right) h$$

und folglich

$$\|r(h)\| \leq \|h\| \sup_{t \in [0,1]} \|g(x+th) - g(x)\|$$

woraus mit $g \in C(U, \mathcal{L}(X, Y))$ die Behauptung folgt. \square

Um im Folgenden einfacher argumentieren zu können, soll noch eine einfache Bemerkung vorausgeschickt werden.

6.2.22 Bemerkung. Es seien X, Y Banachräume, Z ein topologischer Raum und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ injektiv mit abgeschlossenem Bild. Desweiteren seien $f : Z \rightarrow Y$ und $f_0 : Z \rightarrow X$ Abbildungen, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow f & \uparrow T \\ Z & \xrightarrow{f_0} & X \end{array}$$

kommutiert. Dann ist wegen der Abgeschlossenheit von $\text{im } T \subset Y$ und des Prinzips der offenen Abbildung $T : X \rightarrow \text{im}(T)$ ein topologischer Isomorphismus und folglich f genau dann stetig, wenn f_0 stetig ist.

6.2.23 Definition. Für $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen sei

$$\mathfrak{h}[U] = \{\gamma \in H^1([a, b], \mathbb{R}^m) : \text{graph}(\gamma) \subset U\} \subset H^1([a, b], \mathbb{R}^m)$$

Für $\alpha \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ definiert man zudem

$$\mathfrak{h}[\alpha] : \mathfrak{h}[U] \rightarrow H^1([a, b], \mathbb{R}^n), \quad \mathfrak{h}[\alpha](\gamma)(t) = \alpha(t, \gamma(t)), t \in [a, b]$$

Mit $\gamma \in \mathfrak{h}[U]$ ist auch die Kurve $t \mapsto (t, \gamma(t))$ absolutstetig und damit auch jede Verknüpfung mit einer lokal lipschitzstetigen Funktion $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Mit

$$\frac{d}{dt}\alpha(t, \gamma(t)) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, \gamma(t)) + \frac{\partial \alpha}{\partial x}(t, \gamma(t))\gamma'(t)$$

ist aber wegen der von α geforderten Regularität auch $\frac{d\mathfrak{h}[\alpha](\gamma)}{dt} \in L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ und folglich obige Definition sinnvoll.

6.2.24 Lemma. Für $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen ist $\mathfrak{h}[U] \subset H^1([a, b], \mathbb{R}^m)$ offen.

Beweis. Wegen 6.2.19 ist $\mathfrak{h}_C[U] \subset C([a, b], \mathbb{R}^m)$ offen und folglich $\mathfrak{h}[U] = \mathfrak{h}_C[U] \cap H^1([a, b], \mathbb{R}^m)$ in der von $C([a, b], \mathbb{R}^m)$ induzierten Relativtopologie auf $H^1([a, b], \mathbb{R}^m)$ offen. Die Behauptung folgt nun aus der Stetigkeit der Inklusion $H^1([a, b], \mathbb{R}^m) \hookrightarrow C([a, b], \mathbb{R}^m)$. \square

Das nachstehende Ergebnis ist der zentrale Schritt zur Konstruktion eines glatten Atlas für $H^1([a, b], M)$.

6.2.25 Satz. Es sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $\alpha \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, $1 \leq k \leq \infty$. Dann ist

$$\mathfrak{h}[\alpha] \in C^{k-1}(\mathfrak{h}[U], H^1([a, b], \mathbb{R}^n))$$

Falls $k \geq 2$ ist für alle $\gamma \in \mathfrak{h}[U]$, $v \in H^1([a, b], \mathbb{R}^m)$

$$D_\gamma \mathfrak{h}[\alpha](v)(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(t, \gamma(t)) \cdot v(t), \quad t \in [a, b] \quad (6.2.6)$$

Der Beweis wird letztlich über Induktion nach k geführt. Zur besseren Lesbarkeit sind einzelne Teile in Lemmata zerlegt. Der Nachweis der Formel (6.2.6) wird sich dabei als zusätzliches Ergebnis ergeben. Vor Beginn der Induktion ist es zunächst notwendig den Spezialfall $k = 1$ gesondert zu betrachten.

6.2.26 Lemma (Spezialfall $k = 1$). Für $\alpha \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ist $\mathfrak{h}[\alpha] : \mathfrak{h}[U] \rightarrow H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ stetig.

Beweis. Wegen 6.2.6 und 6.2.22 genügt es die Stetigkeit der Abbildungen

$$\mathfrak{h}[U] \xrightarrow{\mathfrak{h}[\alpha]} H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \hookrightarrow C([a, b], \mathbb{R}^n) \quad (6.2.7)$$

$$\mathfrak{h}[U] \xrightarrow{\mathfrak{h}[\alpha]} H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \xrightarrow{D} L^2([a, b], \mathbb{R}^n) \quad (6.2.8)$$

nachzuweisen. Die Stetigkeit von (6.2.7) folgt mit $\iota \circ \mathfrak{h}[\alpha] = \mathfrak{h}_C[\alpha] \circ \iota$ auf $\mathfrak{h}[U]$ aus der Stetigkeit von $\iota : H^1([a, b], \mathbb{R}^m) \hookrightarrow C([a, b], \mathbb{R}^m)$ und 6.2.19.

Zum Nachweis der Stetigkeit von (6.2.8) erhält man zunächst für $\gamma \in \mathfrak{h}[U]$

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{h}[\alpha](\gamma)(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, \gamma(t)) + \frac{\partial \alpha}{\partial x}(t, \gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Damit ist (6.2.8) aber als Summe zweier Operatoren gegeben. Der erste Summand ist darstellbar als

$$\mathfrak{h}[U] \hookrightarrow \mathfrak{h}_C[U] \xrightarrow{\mathfrak{h}_C[\frac{\partial \alpha}{\partial t}]} C([a, b], \mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$$

und ist folglich wegen 6.2.19 und der Stetigkeit der verwendeten Inklusionen stetig. Der zweite Summand ist darstellbar als

$$\mathfrak{h}[U] \hookrightarrow \mathfrak{h}_C[U] \oplus \mathfrak{h}[U] \xrightarrow{\mathfrak{h}_C[\frac{\partial \alpha}{\partial x}] \oplus D} C([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \oplus L^2([a, b], \mathbb{R}^m) \xrightarrow{B} L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$$

mit der bilinearen Abbildung

$$B : C([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \times L^2([a, b], \mathbb{R}^m) \rightarrow L^2([a, b], \mathbb{R}^n), B(T, f)(t) = T(t) \cdot f(t) \quad (6.2.9)$$

Da letztere Abbildung wegen

$$\begin{aligned} \|B(T, f)\|_{L^2([a, b], \mathbb{R}^n)}^2 &= \int_a^b \|T(t) \cdot f(t)\|^2 dt \leq \int_a^b \|T(t)\|^2 \cdot \|f(t)\|^2 dt \\ &\leq \|T\|_\infty^2 \int_a^b \|f(t)\|^2 dt = \|T\|_\infty^2 \|f\|_{L^2([a, b], \mathbb{R}^n)}^2 \end{aligned}$$

stetig ist, folgt die Stetigkeit des zweiten Summanden aus 6.2.19 und 6.2.9. \square

Der speziell betrachtete Fall $k = 1$ dient letztlich der Vorbereitung der Induktion. Ebenso gilt dies auch für folgendes Resultat, dessen Beweis allerdings den bewiesenen Spezialfall schon benötigt.

6.2.27 Lemma. *Die Abbildung*

$$\mathcal{O} : H^1([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \rightarrow \mathcal{L}(H^1([a, b], \mathbb{R}^m), H^1([a, b], \mathbb{R}^n))$$

definiert durch $\mathcal{O}(T)(v)(t) = T(t) \cdot v(t)$ für alle $t \in [a, b]$, $T \in H^1([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$, $v \in H^1([a, b], \mathbb{R}^m)$ ist linear und stetig.

Beweis. Es genügt bekanntlich hierfür die Stetigkeit der Abbildung

$$\hat{B} : H^1([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \times H^1([a, b], \mathbb{R}^m) \rightarrow H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$$

mit $\hat{B}(T, v)(t) = T(t) \cdot v(t)$, $t \in [a, b]$ zu zeigen. Mit 6.2.16 kann man nun die Identifikation

$$H^1([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \times H^1([a, b], \mathbb{R}^m) \cong H^1([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{R}^m)$$

vornehmen. Damit ist $\hat{B} = \mathfrak{h}[B]$ mit $B : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$; $B(T, v) = Tv$ und die Behauptung folgt aus 6.2.26. \square

6.2.28 Lemma (Induktionsanfang $k = 2$ und (6.2.6)). Für $\alpha \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$ ist $\mathfrak{h}[\alpha] \in C^1(\mathfrak{h}[U], H^1([a, b], \mathbb{R}^n))$.

Beweis. Für jedes $t \in [a, b]$ betrachte man die wegen (6.2.4) offenbar stetige Evaluationsabbildung

$$\lambda_t : H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \ni \gamma \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$$

Damit ist $\mathcal{F} := \{\lambda_t : t \in [a, b]\}$ eine trennende Familie für $H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$. Desweiteren definiere man $g : \mathfrak{h}[U] \rightarrow \mathcal{L}(H^1([a, b], \mathbb{R}^m), H^1([a, b], \mathbb{R}^n))$ durch

$$g(\gamma)(v)(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(t, \gamma(t)) \cdot v(t), \gamma \in \mathfrak{h}[U], v \in H^1([a, b], \mathbb{R}^m)$$

Wegen $g = \mathcal{O} \circ \mathfrak{h}[\frac{\partial \alpha}{\partial x}]$ ist diese Abbildung mit 6.2.26 und 6.2.27 stetig. Da nun für alle $v \in H^1([a, b], \mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\lambda_t \circ \mathfrak{h}[\alpha])}{\partial v}(\gamma) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\lambda_t \circ \mathfrak{h}[\alpha])(\gamma + sv) - (\lambda_t \circ \mathfrak{h}[\alpha])(\gamma)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha(t, \gamma(t) + sv(t)) - \alpha(t, \gamma(t))}{s} = \frac{d}{ds} \alpha(t, \gamma(t) + sv(t)) \Big|_{s=0} \\ &= g(\gamma)(v)(t) \end{aligned}$$

erhält man die Behauptung aus 6.2.21. □

Der Induktionsschritt ist nun ausgesprochen einfach:

Ist $\alpha \in C^{k+1}(U, \mathbb{R}^n)$, so ist $\frac{\partial \alpha}{\partial x} \in C^k(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$, also nach Induktionsvoraussetzung

$$\mathfrak{h}[\frac{\partial \alpha}{\partial x}] \in C^{k-1}(\mathfrak{h}[U], H^1([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)))$$

Da \mathcal{O} linear und stetig ist, ist damit aber

$$D\mathfrak{h}[\alpha] = \mathcal{O} \circ \mathfrak{h}[\frac{\partial \alpha}{\partial x}] \in C^{k-1}(\mathfrak{h}[U], \mathcal{L}(H^1([a, b], \mathbb{R}^m), H^1([a, b], \mathbb{R}^n)))$$

also $\mathfrak{h}[\alpha] \in C^k(\mathfrak{h}[U], H^1([a, b], \mathbb{R}^n))$.

Damit ist schließlich 6.2.25 bewiesen.

Abschließend soll noch ein Resultat gezeigt werden, dass erst später benötigt wird.

6.2.29 Lemma. Es sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ offen und $\alpha \in C^k(U \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq k \leq \infty$. Zudem sei $\alpha(t, x, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ für jedes $(t, x) \in U$. Dann ist die Abbildung

$$\mathfrak{h}_{H^1-L^2}[\alpha] : \mathfrak{h}[U] \times L^2([a, b], \mathbb{R}^m) \rightarrow L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$$

definiert durch

$$\mathfrak{h}_{H^1-L^2}[\alpha](\gamma, v)(t) = \alpha(t, \gamma(t), v(t)), t \in [a, b]$$

in $C^{k-1}(\mathfrak{h}[U] \times L^2([a, b], \mathbb{R}^m), L^2([a, b], \mathbb{R}^n))$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Abbildung $\bar{\alpha} : U \ni (t, x) \mapsto \alpha(t, x, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ in C^k und folglich $\mathfrak{h}[\bar{\alpha}] \in C^{k-1}$ wegen 6.2.25. Nun ist $\mathfrak{h}_{H^1-L^2}[\alpha]$ gerade die Komposition aus der Abbildung

$$\mathfrak{h}[\bar{\alpha}] \times id : \mathfrak{h}[U] \times L^2([a, b], \mathbb{R}^m) \rightarrow H^1([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \times L^2([a, b], \mathbb{R}^m)$$

und der bilinearen Abbildung

$$B : H^1([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \times L^2([a, b], \mathbb{R}^m) \rightarrow L^2([a, b], \mathbb{R}^n), \quad B(T, t)(t) = T(t) \cdot f(t)$$

Wegen der Glattheit stetiger Bilinearformen genügt es folglich die Stetigkeit letzterer Abbildungen nachzuweisen. Diese kann nun entweder durch eine elementare Abschätzung wie für (6.2.9) gewonnen werden, oder man schließt sie aus der Stetigkeit der Einbettung $H^1([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \hookrightarrow C([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ mit der nachgewiesenen Stetigkeit von (6.2.9). \square

Konstruktion einer glatten Struktur

6.2.30 Definition. Eine **einparametrische Familie von Karten** auf einer n -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit M besteht aus offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R} \times M$, $\tilde{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und einer glatten Abbildung $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass die Abbildung

$$\varphi^\circ : U \ni (t, x) \mapsto (t, \varphi(t, x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

ein Diffeomorphismus auf $\text{im}(\varphi^\circ) = \tilde{U}$ ist.

Es bezeichne für ein festes $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} U_t &= \{x \in M : (t, x) \in U\} \\ \tilde{U}_t &= \{v \in \mathbb{R}^n : (t, v) \in \tilde{U}\} \quad \text{und} \\ \varphi_t(x) &= \varphi(t, x) : U_t \rightarrow \tilde{U}_t \end{aligned}$$

Eine einparametrische Familie von Karten werde mit $\varphi = (\varphi_t, U_t, \tilde{U}_t)$ bezeichnet.

6.2.31 Lemma. 1. Ist $\varphi = (\varphi_t, U_t, \tilde{U}_t)$ eine einparametrische Familie von Karten, so ist jedes $\varphi_t : U_t \rightarrow \tilde{U}_t$ mit $U_t \neq \emptyset$ eine Karte von M .

2. Ist umgekehrt $U \subset \mathbb{R} \times M$ offen, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt und jedes $\varphi_t : U_t \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $U_t \neq \emptyset$ eine Karte von M , so ist φ eine einparametrische Familie von Karten auf M .

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist $\varphi_t : U_t \rightarrow \tilde{U}_t$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ mit $U_t \neq \emptyset$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen und folglich eine Karte für M . Das zeigt die erste Behauptung.

Zum Beweis der zweiten Aussage sei zunächst $(t_0, x_0) \in U$ beliebig gewählt. Damit ist aber $x_0 \in U_{t_0}$ und nach Voraussetzung $\varphi_{t_0} : U_{t_0} \rightarrow \tilde{U}_{t_0} \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte von M . Nun ist $U \subset \mathbb{R} \times M$ eine glatte Mannigfaltigkeit und für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ erhält man um (t_0, x_0) eine Karte für U durch

$$id \times \varphi_{t_0} : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times U_{t_0} \rightarrow (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times \tilde{U}_{t_0}$$

Die glatte Abbildung $\varphi^\circ : U \rightarrow \tilde{U} = \varphi^\circ(U)$ ist in dieser Karte die Identität und damit wegen des Umkehrsatzes bei (t_0, x_0) ein lokaler Diffeomorphismus.

Insgesamt ist also $\varphi^\circ : U \rightarrow \tilde{U}$ ein bijektiver lokaler Diffeomorphismus und damit bereits ein globaler Diffeomorphismus. Folglich ist $\varphi = (\varphi_t, U_t, \tilde{U}_t)$ eine einparametrische Familie von Karten auf M . \square

6.2.32 Definition. Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, $U \subset \mathbb{R} \times M$ offen und $\alpha : U \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Man definiert

$$\mathfrak{h}[U] = \{\gamma \in H^1([a, b], M) : \text{graph}(\gamma) \subset U\}$$

und eine Abbildung $\mathfrak{h}[\alpha] : \mathfrak{h}[U] \rightarrow H^1([a, b], N)$ durch

$$\mathfrak{h}[\alpha](\gamma)(t) = \alpha(t, \gamma(t))$$

Als nächstes sollen die bisherigen Konstruktionen verwendet werden, um $H^1([a, b], M)$ mit der Struktur einer Hilbertmannigfaltigkeit wie in 2.1.1 zu versehen.

Man betrachte hierzu eine einparametrische Familie von Karten $\varphi = (\varphi_t, U_t, \tilde{U}_t)$ in M und damit die Abbildung

$$\mathfrak{h}[\varphi] : \mathfrak{h}[U] \rightarrow \mathfrak{h}[\tilde{U}]$$

Mit der Diffeomorphie von $\varphi^\circ : U \rightarrow \tilde{U}$ ist die Abbildung $\tilde{U} \ni (t, x) \rightarrow \varphi_t^{-1}(x) \in M$ glatt und induziert offenbar die inverse Abbildung

$$\mathfrak{h}[\varphi]^{-1} : \mathfrak{h}[\tilde{U}] \rightarrow \mathfrak{h}[U], \quad \mathfrak{h}[\varphi]^{-1}(\gamma)(t) = \varphi_t^{-1}(\gamma(t))$$

womit sich $\mathfrak{h}[\varphi]$ als Bijektion auf die wegen 6.2.24 offene Menge $\mathfrak{h}[\tilde{U}] \subset H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ herausstellt. Desweiteren ist für jedes $(\mathfrak{h}[U], \mathfrak{h}[\varphi]), (\mathfrak{h}[V], \mathfrak{h}[\psi])$ mit $\mathfrak{h}[U] \cap \mathfrak{h}[V] \neq \emptyset$

$$\mathfrak{h}[\varphi](\mathfrak{h}[U] \cap \mathfrak{h}[V]) = \mathfrak{h}[\varphi][\mathfrak{h}[U \cap V]] = \mathfrak{h}[\varphi^\circ(U \cap V)]$$

wegen 6.2.24 eine offene Teilmenge von $H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Zur Untersuchung des Kartenwechsels genügt es nachzuweisen, dass jede Abbildung

$$\mathfrak{h}[\psi] \circ (\mathfrak{h}[\varphi])^{-1} : \mathfrak{h}[\varphi^\circ(U \cap V)] \rightarrow \mathfrak{h}[\psi^\circ(U \cap V)]$$

glatt ist. Es ist aber für $\gamma \in \mathfrak{h}[\varphi^\circ(U \cap V)]$

$$(\mathfrak{h}[\psi] \circ \mathfrak{h}[\varphi]^{-1})(\gamma)(t) = (\psi_t \circ \varphi_t^{-1})(\gamma(t)) = \mathfrak{h}[\alpha](\gamma)(t)$$

mit der glatten Abbildung $\alpha : \varphi^\circ(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha(t, x) = (\psi_t \circ \varphi_t^{-1})(x)$. Wegen 6.2.25 ist damit aber auch $\mathfrak{h}[\psi] \circ (\mathfrak{h}[\varphi])^{-1} : \mathfrak{h}[\varphi^\circ(U \cap V)] \rightarrow \mathfrak{h}[\psi^\circ(U \cap V)]$ glatt.

Also ist bisher gezeigt, dass für jede einparametrische Familie von Karten $\varphi = (\varphi_t, U_t, \tilde{U}_t)$ die Abbildung $\mathfrak{h}[\varphi]$ eine Karte der Menge $H^1([a, b], M)$ ist, und dass diese Karten paarweise verträglich sind. Um hieraus wirklich eine glatte Struktur für diese Menge zu erhalten bleibt zu zeigen, dass die Kartengebiete der Karten $\mathfrak{h}[\varphi]$ die Menge $H^1([a, b], M)$ überdecken.

6.2.33 Bemerkung. Es sei daran erinnert, dass für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) eine reelle Zahl $r > 0$ ein Normalenradius für ein $p \in M$ heißt, falls die Exponentialabbildung $\exp_p : B_r(0) \rightarrow \exp_p(B_r(0))$ ein Diffeomorphismus ist und ein totaler Normalenradius, falls r ein Normalenradius für p und alle Punkte in $\exp_p(B_r(0))$ ist. Hierbei bezeichne $B_r(0) \subset T_p M$ den offenen Ball vom Radius r bezüglich der Metrik g auf $T_p M$. Es ist ein durchaus bekanntes Resultat der Riemannschen Geometrie (vgl. etwa [Lee97, Lemma 5.12]), dass zu jedem Kompaktum $K \subset M$ ein $r > 0$ existiert, das totaler Normalenradius für jeden Punkt von K ist.

6.2.34 Lemma. *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine stetige Kurve. Dann existiert eine einparametrische Familie von Karten $\varphi = (\varphi_t, U_t, \tilde{U}_t)$ von M , so dass $\text{graph}(\gamma) \subset U$.*

Beweis. Es sei $g \in \Gamma(S^2 T^* M)$ eine beliebige Riemannsche Metrik für M . Man betrachte zudem eine beliebige stetige Fortsetzung von γ auf \mathbb{R} und wähle einen totalen Normalenradius $r > 0$ für die kompakte Menge $K = \gamma([a - 1, b + 1])$. Wegen bekannter Approximationsresultate der Differentialtopologie (vgl. [Hir97, Chapter 2]) existiert nun eine glatte Kurve $\mu : (a - 1, b + 1) \rightarrow M$ mit $d^g(\gamma(t), \mu(t)) < r$ für alle $t \in (a - 1, b + 1)$, wobei d^g die von g auf M induzierte Metrik bezeichne. Wie in 6.1.7 wähle man außerdem glatte, parallele Vektorfelder $\{e^1(t), \dots, e^n(t)\}$ entlang μ , die punktweise eine Orthonormalbasis von $T_{\mu(t)} M$ bilden. Hiermit erhält man für jedes $t \in (a - 1, b + 1)$ einen Isomorphismus $\sigma_t : T_{\mu(t)} M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Mit dem Diffeomorphismus $\exp_{\mu(t)} : T_{\mu(t)} M \supset B_{\mu(t)}(0; r) \rightarrow \exp_{\mu(t)}(B_{\mu(t)}(0; r))$ definiere man nun $U_t = \exp_{\mu(t)}(B_{\mu(t)}(0; r))$ und damit für jedes $t \in (a - 1, b + 1)$ eine Karte $\varphi_t = \sigma_t \circ \exp_{\mu(t)}^{-1}$ ⁵. Da wegen der lokalen Diffeomorphie der Exponentialabbildung um Punkte des Nullschnittes in TM (vgl. [GHL04, Proposition 2.88]) auch die Abbildung $\varphi : U = \bigcup_{t \in (a-1, b+1)} \{t\} \times U_t \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt ist, ist $\varphi = (\varphi_t, U_t, \tilde{U}_t)$ wegen 6.2.31 eine einparametrische Familie von Karten für M . Die Behauptung folgt nun, da $\text{graph}(\gamma) \subset U$ nach Wahl von η . \square

6.2.3 Das Tangentialbündel $TH^1([a, b], M)$

Mit der Etablierung von $H^1([a, b], M)$ als Hilbertmannigfaltigkeit besitzt $H^1([a, b], M)$ wie in 2.1 beschrieben an jedem Punkt $\gamma \in H^1([a, b], M)$ einen Tangentialraum, deren Vereinigung versehen mit einer von $H^1([a, b], M)$ kanonisch induzierten Topologie das Tangentialbündel bilden. Für praktisches Arbeiten mit $H^1([a, b], M)$ ist die dort gegebene Beschreibung von $T_\gamma H^1([a, b], M)$ als topologischer Vektorraum gewisser Äquivalenzklassen sicherlich nicht sonderlich hilfreich. Das Ziel ist daher eine deutlich konkretere Beschreibung von $TH^1([a, b], M)$ zu erhalten. Insbesondere sei daran erinnert, dass sich wegen des Modells $H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ die Topologie der einzelnen Tangentialräume durch ein Inneres Produkt erzeugen lässt mit dem diese Hilberträume sind.

⁵Diese Karten definieren um jedes $\mu(t)$ Riemannsche Normalkoordinaten

6.2.35 Definition. Für ein festes $t_0 \in [a, b]$ bezeichne

$$Eval_{t_0} : H^1([a, b], M) \rightarrow M, \quad Eval_{t_0}(\gamma) = \gamma(t_0)$$

die **Evaluationsabbildung** bei t_0 .

Ist $\varphi = (\varphi_t, U_t, \tilde{U}_t)$ eine einparametrische Familie von Karten für M , so hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}[U] & \xrightarrow{Eval_{t_0}} & U_{t_0} \\ \mathfrak{h}[\varphi] \downarrow & & \downarrow \varphi_{t_0} \\ \mathfrak{h}[\tilde{U}] & \xrightarrow{Eval_{t_0}} & \tilde{U}_{t_0} \end{array} \quad (6.2.10)$$

Damit ist $Eval_{t_0}$ in den Karten $\mathfrak{h}[\varphi]$ von $H^1([a, b], M)$ und φ_{t_0} von M durch eine Einschränkung der Abbildung $Eval_{t_0} : H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Da diese Abbildung aber offensichtlich linear und beschränkt ist, ist $Eval_{t_0} : H^1([a, b], M) \rightarrow M$ für jedes $t_0 \in [a, b]$ glatt.

6.2.36 Lemma. *Es sei $\varphi = (\varphi_t, U_t, \tilde{U}_t)$ eine einparametrische Familie von Karten für M . Dann ist $\Phi = (d\varphi_t, TU_t, \tilde{U}_t \times \mathbb{R}^n)$ eine einparametrische Familie der glatten Mannigfaltigkeit TM .*

Beweis. Bekanntlich ist $d\varphi_t : TU_t \rightarrow \tilde{U}_t \times \mathbb{R}^n$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Karte des Tangentialbündels TM . Man betrachte nun die Menge

$$\mathcal{U} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{t\} \times TU_t$$

und die auf offensichtliche Weise von den $d\varphi_t$ induzierte Abbildung

$$\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

Wegen der Glattheit von $d\varphi : TU \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ ist diese Abbildung ebenfalls glatt und man erhält die Behauptung aus 6.2.31. \square

6.2.37 Satz. *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Für $\gamma \in H^1([a, b], M)$ und $\mathfrak{v} \in T_\gamma H^1([a, b], M)$ definiere man ein Vektorfeld entlang γ durch*

$$v(t) = d_\gamma Eval_t \cdot \mathfrak{v}, \quad t \in [a, b]$$

Dann ist $v \in H^1([a, b], TM)$ und die Abbildung

$$TH^1([a, b], M) \ni \mathfrak{v} \mapsto v \in H^1([a, b], TM) \quad (6.2.11)$$

ist ein Diffeomorphismus zwischen Hilbertmannigfaltigkeiten.

Beweis. Es sei $\varphi = (\varphi_t, U_t, \tilde{U}_t)$ eine einparametrische Familie von Karten für M und $\Phi = (d\varphi_t, TU_t, \tilde{U}_t \times \mathbb{R}^n)$ die zugehörige einparametrische Familie von Karten für TM . Nun ist das Differential

$$T\mathfrak{h}[\varphi] : T\mathfrak{h}[U] \rightarrow \mathfrak{h}[\tilde{U}] \times H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \subset H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \times H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$$

eine Karte des Tangentialbündels $TH^1([a, b], M)$. Zudem ist

$$\mathfrak{h}[\Phi] : \mathfrak{h}[U] \rightarrow \mathfrak{h}[\tilde{U} \times \mathbb{R}^n] \cong \mathfrak{h}[\tilde{U}] \times H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$$

eine Karte von $H^1([a, b], TM)$. Aus dem Diagramm (6.2.10) erhält man für $\gamma \in H^1([a, b], M)$ das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_\gamma \mathfrak{h}[U] & \xrightarrow{d_\gamma \text{Eval}_t} & T_{\gamma(t)} U_t \\ d_\gamma \mathfrak{h}[\varphi] \downarrow & & \downarrow d_{\gamma(t)} \varphi_t \\ H^1([a, b], \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\text{Eval}_t} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Hiermit erhält man aber ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T\mathfrak{h}[U] & \xrightarrow{(6.2.11)} & \mathfrak{h}[U] \\ T\mathfrak{h}[\varphi] \downarrow & & \downarrow \mathfrak{h}[\Phi] \\ \mathfrak{h}[\tilde{U}] \times H^1([a, b], \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{id} & \mathfrak{h}[\tilde{U}] \times H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \end{array}$$

womit die Abbildung (6.2.11) in geeigneten lokalen Koordinaten stets die Identität ist. Hieraus folgen sämtliche Behauptungen. \square

6.2.38 Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\gamma \in H^1([a, b], M)$. Ein Vektorfeld v entlang γ heißt von der Klasse H^1 , falls $v \in H^1([a, b], TM)$.

Von nun an sei stets $TH^1([a, b], M)$ mit $H^1([a, b], TM)$ mittels des Diffeomorphismus (6.2.11) identifiziert. Insbesondere wird für jedes $\gamma \in H^1([a, b], M)$ der Tangentialraum $T_\gamma H^1([a, b], M)$ mit dem Vektorraum aller H^1 -Vektorfelder entlang γ identifiziert. Zudem ist damit für $\gamma \in H^1([a, b], M)$ das Differential der Karte gegeben durch

$$T_\gamma H^1([a, b], M) \ni v \mapsto (d_{\gamma(t)} \varphi_t) v(t) \in H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \quad (6.2.12)$$

6.2.4 Glatte Abbildungen auf $H^1([a, b], M)$

6.2.39 Lemma. Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, $U \subset \mathbb{R} \times M$ offen und $\alpha : U \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Dann ist $\mathfrak{h}[U] \subset H^1([a, b], M)$ offen und $\mathfrak{h}[\alpha] : \mathfrak{h}[U] \rightarrow H^1([a, b], N)$ ist glatt. Desweiteren ist für jedes $\gamma \in \mathfrak{h}[U]$ und jedes $v \in T_\gamma H^1([a, b], M)$

$$d_\gamma \mathfrak{h}[\alpha](v)(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(t, \gamma(t)) \cdot v(t), \quad t \in [a, b]$$

wobei $\frac{\partial}{\partial x}$ das Differential der Mannigfaltigkeit M bezeichne.

Beweis. Es sei $\gamma \in \mathfrak{h}[U]$. Dann existiert eine Karte $(\mathfrak{h}[\tilde{U}], \mathfrak{h}[\varphi])$ von $H^1([a, b], M)$ mit $\gamma \in \mathfrak{h}[\tilde{U}]$ und zudem ist $\mathfrak{h}[U] \cap \mathfrak{h}[\tilde{U}] = \mathfrak{h}[U \cap \tilde{U}]$. Nun ist aber letztere Menge wegen

$$\mathfrak{h}[U \cap \tilde{U}] = \mathfrak{h}[\varphi]^{-1}(\mathfrak{h}[\varphi^\circ(U \cap \tilde{U})])$$

nach Definition der Topologie von $H^1([a, b], M)$ offen und folglich eine offene Umgebung von γ in $\mathfrak{h}[U]$.

Es sei nun $\gamma \in \mathfrak{h}[U]$ und $(\varphi_t, U'_t, \tilde{U}'_t)$, $(\psi_t, V_t, \tilde{V}_t)$ einparametrische Familien von Karten mit $\mathfrak{h}[U'] \subset \mathfrak{h}[U]$, $\mathfrak{h}[\alpha](\gamma) \in \mathfrak{h}[V]$. Dann ist für $\gamma \in \mathfrak{h}[\tilde{U}']$

$$(\mathfrak{h}[\psi] \circ \mathfrak{h}[\alpha] \circ (\mathfrak{h}[\varphi])^{-1})(\gamma(t)) = \psi_t(\alpha_t(\varphi_t^{-1}(\gamma(t))))$$

und mit der Glattheit der Abbildung $(t, x) \mapsto \psi_t(\alpha_t(\varphi_t^{-1}(x)))$ folgt die Glattheit von $\mathfrak{h}[\alpha] : \mathfrak{h}[U] \rightarrow H^1([a, b], N)$ aus 6.2.25. Da φ_t, ψ_t für jedes feste t Karten der Mannigfaltigkeiten M und N sind erhält man hiermit abschließend das Differential der Abbildung aus (6.2.6). \square

6.2.40 Folgerung. *Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $H : N \times [a, b] \rightarrow M$ glatt. Dann ist die Abbildung*

$$\hat{H} : N \ni x \mapsto H(x, \cdot) \in H^1([a, b], M)$$

glatt und ihr Differential ist gegeben durch

$$(d_x \hat{H} \cdot v)(t) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) \cdot v, \quad x \in N, v \in T_x N, t \in [a, b]$$

Beweis. Betrachte eine glatte Fortsetzung von H auf eine offene Umgebung von $N \times [a, b]$ in $N \times \mathbb{R}$. Es bezeichne $\mathfrak{c} : N \rightarrow H^1([a, b], N)$ die Abbildung, die jedem $x \in N$ die Kurve mit konstantem Wert x zuweist. Diese Abbildung ist glatt und wegen $\hat{H} = \mathfrak{h}[H] \circ \mathfrak{c}$ folgt die Behauptung aus dem Lemma. \square

6.2.41 Satz. *Die Menge $C^\infty([a, b], M)$ ist dicht in der Hilbertmannigfaltigkeit $H^1([a, b], M)$.*

Beweis. Es sei $\varphi = (\varphi_t, U_t, \tilde{U}_t)$ eine einparametrische Familie von Karten für M . Da $\mathfrak{h}[\tilde{U}] \subset H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ offen ist folgt aus 6.2.11, dass der Schnitt $\mathfrak{h}[\tilde{U}] \cap C^\infty([a, b], \mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{h}[\tilde{U}]$ dicht ist. Da nun $\mathfrak{h}[\varphi]^{-1} : \mathfrak{h}[\tilde{U}] \rightarrow \mathfrak{h}[U]$ ein Homöomorphismus ist, der glatte Kurven auf glatte Kurven abbildet, erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}[U] &= \mathfrak{h}[\varphi]^{-1}(\mathfrak{h}[\tilde{U}]) = \mathfrak{h}[\varphi]^{-1}(\overline{\mathfrak{h}[\tilde{U}] \cap C^\infty([a, b], \mathbb{R}^n)}) = \overline{\mathfrak{h}[\varphi]^{-1}(\mathfrak{h}[\tilde{U}] \cap C^\infty([a, b], \mathbb{R}^n))} \\ &= \overline{\mathfrak{h}[U] \cap C^\infty([a, b], M)} \subset \overline{\mathfrak{h}[U] \cap C^\infty([a, b], M)} \end{aligned}$$

Damit ist aber $\mathfrak{h}[U] \subset \overline{C^\infty([a, b], M)}$ und folglich $H^1([a, b], M) = \overline{C^\infty([a, b], M)}$ \square

6.2.5 Die Untermannigfaltigkeit $H_{pq}^1([a, b], M)$

6.2.42 Definition. Für feste $p, q \in M$ definiert man

$$H_{pq}^1([a, b], M) := \{\gamma \in H^1([a, b], M) : \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$$

6.2.43 Lemma. Die Abbildung $F : H^1([a, b], M) \rightarrow M \times M$ mit $F(\gamma) = (\gamma(a), \gamma(b))$ ist eine Submersion.

Beweis. Die Abbildung ist lediglich die bereits als glatt nachgewiesene Evaluationsabbildung in der jeweiligen Komponente. Das Differential $d_\gamma F : T_\gamma H^1([a, b], M) \rightarrow T_{\gamma(a)}M \times T_{\gamma(b)}M$ ist gegeben durch $d_\gamma Fv = (v(a), v(b))$ und folglich ist die Abbildung eine Submersion. \square

6.2.44 Folgerung. Für jedes Paar $(p, q) \in M \times M$ ist $H_{pq}^1([a, b], M)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von $H^1([a, b], M)$ und für jedes $\gamma \in H_{pq}^1([a, b], M)$ ist

$$T_\gamma H_{pq}^1([a, b], M) = \{v \in T_\gamma H^1([a, b], M) : v(a) = 0, v(b) = 0\}$$

Beweis. Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus 2.1.7. \square

6.2.6 Rechnen in Koordinaten

In diesem Abschnitt sollen einige Bezeichnungen bezüglich des Umgangs mit Koordinaten auf $H^1([a, b], M)$ festgelegt werden. Es sei hierfür (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ ein zunächst beliebiger Zusammenhang auf M .

Es sei nun $\varphi = (\varphi_t, U_t, \tilde{U}_t)$ eine einparametrische Familie von Karten für M , $(t, \tilde{x}) \in \tilde{U}$, $x = \varphi_t^{-1}(\tilde{x})$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Basis des \mathbb{R}^n und $X_i(t, x) = d_x \varphi_t^{-1} \cdot e_i$, $i = 1, \dots, n$. Man betrachte hiermit die folgenden glatten Abbildungen

$$\begin{aligned} b : \tilde{U} &\rightarrow \mathbb{R}^n, & b(t, \tilde{x}) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) \\ A : \tilde{U} &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), & A_{(t, \tilde{x})}(e_i) &= d_x \varphi_t \frac{\partial X_i}{\partial t}(t, x) \\ \Gamma : \tilde{U} &\rightarrow B(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), & \Gamma_{(t, \tilde{x})}(e_i, e_j) &= d_x \varphi_t \nabla_{X_i} X_j(t, x) \\ \tilde{g} : \tilde{U} &\rightarrow B_{\text{sym}}(\mathbb{R}^n), & \tilde{g}_{(t, \tilde{x})} &= g_x(d_x \varphi_t^{-1}, d_x \varphi_t^{-1}) \end{aligned}$$

Dabei sei $\nabla_{X_i} X_j(t, x)$ die kovariante Ableitung des Vektorfeldes $x \mapsto X_j(t, x)$ in Richtung $X_i(t, x)$ und $\frac{\partial X_i}{\partial t}(t, x)$ die Ableitung der Kurve $t \mapsto X_i(t, x)$ in $T_x M$. Mit diesen Definitionen sind im Wesentlichen alle Informationen erfasst, die benötigt werden um die im Folgenden Abschnitt zu besprechenden Funktionen auf $H^1(I, M)$ in einer Karte $\mathfrak{h}[\varphi]$ zu beschreiben. Es sollen nun einige Aussagen über diese Abbildungen gezeigt werden.

Es sei $\gamma \in \mathfrak{h}[U]$ und $\tilde{\gamma} = \mathfrak{h}[\varphi](\gamma)$, also

$$\tilde{\gamma}(t) = \varphi(t, \gamma(t)), \quad t \in [a, b] \tag{6.2.13}$$

Es sei weiterhin $\tilde{d}(\tilde{\gamma}) \in L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ gegeben durch

$$\tilde{d}(\tilde{\gamma})(t) = d_{\gamma(t)}\varphi_t \gamma'(t)$$

Nach Definition kann also $\tilde{d}(\tilde{\gamma})$ als Koordinatendarstellung von γ' interpretiert werden. Man erhält nun durch Differentiation von (6.2.13)

$$\tilde{\gamma}'(t) = \frac{d\varphi(t, \gamma(t))}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, \gamma(t)) + d_{\gamma(t)}\varphi_t \gamma'(t)$$

und folglich

$$\tilde{d}(\tilde{\gamma})(t) = \tilde{\gamma}'(t) - b(t, \tilde{\gamma}(t)) \quad (6.2.14)$$

Mit dieser Beobachtung soll zunächst die Glattheit dieser Abbildung nachgewiesen werden.

6.2.45 Lemma. *Die Abbildung $\tilde{d} : \mathfrak{h}[\tilde{U}] \rightarrow L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ ist glatt.*

Beweis. Man betrachte die Darstellung (6.2.14). Nun ist die Abbildung

$$D : H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \ni \tilde{\gamma} \mapsto \tilde{\gamma}' \in L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$$

wegen 6.2.9 linear und beschränkt und folglich auch glatt. Wegen der Glattheit von $\tilde{U} \ni (t, \tilde{x}) \mapsto b(t, \tilde{x})$ ist aber wegen 6.2.25 auch $\mathfrak{h}[b] : \mathfrak{h}[\tilde{U}] \rightarrow H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ glatt und mit der stetigen Einbettung $\iota : H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ erhält man aus

$$\tilde{d}(\tilde{\gamma}) = D\tilde{\gamma} + \iota \circ \mathfrak{h}[b](\tilde{\gamma})$$

die zu zeigende Aussage. □

Ist $v \in T_\gamma H^1([a, b], M)$ und $\tilde{v} = d_\gamma \mathfrak{h}[\varphi](v)$, also mit (6.2.12)

$$\tilde{v}(t) = d_{\gamma(t)}\varphi_t v(t)$$

so erhält man mit den zeitabhängigen Vektorfeldern $\{X_1, \dots, X_n\}$ eine Darstellung

$$v(t) = \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i(t) X_i(t, \gamma(t)) \quad (6.2.15)$$

Bezeichnet nun $\tilde{D}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{v}) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ die als Koordinatendarstellung der kovarianten Ableitung $\frac{\nabla v}{dt}$ entlang γ zu interpretierende Abbildung, gegeben durch

$$\tilde{D}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{v})(t) = d_{\gamma(t)}\varphi_t \frac{\nabla v}{dt}(t)$$

so erhält man mittels (6.2.15) für diese Abbildung

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{v})(t) &= d_{\gamma(t)}\varphi_t \sum_{i=1}^n \left(\tilde{v}'_i(t)X_i(t, \gamma(t)) + \tilde{v}_i(t) \frac{\partial X_i}{\partial t}(t, \gamma(t)) + \tilde{v}_i(t) \frac{\nabla}{dt} X_i(t, \gamma(t)) \right) \\
&= \tilde{v}'(t) + A_{(t, \tilde{\gamma}(t))}(\tilde{v}(t)) + \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i(t) d_{\gamma(t)}\varphi_t \nabla_{\gamma'} X_i(t, \gamma(t)) \\
&= \tilde{v}'(t) + A_{(t, \tilde{\gamma}(t))}(\tilde{v}(t)) + \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i(t) d_{\gamma(t)}\varphi_t \nabla_{d_{\gamma(t)}\varphi_t^{-1} \sum_{j=1}^n \tilde{d}(\tilde{\gamma})_j(t) e_j} X_i(t, \gamma(t)) \quad (6.2.16) \\
&= \tilde{v}'(t) + A_{(t, \tilde{\gamma}(t))}(\tilde{v}(t)) + \sum_{i,j=1}^n \tilde{v}_i(t) \tilde{d}(\tilde{\gamma})_j(t) d_{\gamma(t)}\varphi_t \nabla_{X_j} X_i(t, \gamma(t)) \\
&= \tilde{v}'(t) + A_{(t, \tilde{\gamma}(t))}(\tilde{v}(t)) + \Gamma_{(t, \tilde{\gamma}(t))}(\tilde{d}(\tilde{\gamma})(t), \tilde{v}(t))
\end{aligned}$$

6.2.46 Lemma. *Die Abbildung*

$$\tilde{D} : \mathfrak{h}[\tilde{U}] \ni \tilde{\gamma} \mapsto \tilde{D}_{\tilde{\gamma}} \in \mathcal{L}(H^1([a, b], \mathbb{R}^n), L^2([a, b], \mathbb{R}^n))$$

ist glatt.

Beweis. Es sollen hierzu die Summanden in (6.2.16) einzeln betrachtet werden.

Die Abbildung, die jedem $\tilde{\gamma} \in \mathfrak{h}[\tilde{U}]$ die Ableitung als Operator in $\mathcal{L}(H^1([a, b], \mathbb{R}^n), L^2([a, b], \mathbb{R}^n))$ zuweist ist als konstante Abbildung glatt.

Für den zweiten Summanden der Abbildung erhält man aus der glatten Abbildung $A : \tilde{U} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ eine wegen 6.2.25 glatte Abbildung

$$\mathfrak{h}[A] : \mathfrak{h}[\tilde{U}] \rightarrow H^1([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)), \tilde{\gamma} \mapsto A_{(\cdot, \tilde{\gamma}(\cdot))}$$

Man betrachte zudem die auf die offensichtliche Weise definierte bilinare Abbildung

$$B : H^1([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \times H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$$

Eine einfache Abschätzung wie in (6.2.9) gewährleistet nun die Stetigkeit dieser Abbildung und folglich ist auch die lineare Abbildung

$$\hat{B} : H^1([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \rightarrow \mathcal{L}(H^1([a, b], \mathbb{R}^n), L^2([a, b], \mathbb{R}^n))$$

stetig. Da aber die betrachtete Abbildung durch

$$\hat{B} \circ \mathfrak{h}[A] : \mathfrak{h}[\tilde{U}] \rightarrow \mathcal{L}(H^1([a, b], \mathbb{R}^n), L^2([a, b], \mathbb{R}^n))$$

gegeben ist, ist insgesamt ihre Glattheit nachgewiesen.

Zum Nachweis der Glattheit des dritten Teils der Abbildung betrachte man zunächst die glatte Abbildung

$$\tilde{U} \times \mathbb{R}^n \ni (t, \tilde{x}, z) \mapsto \Gamma_{(t, \tilde{x})}(z, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

Da diese nun linear in z ist, erhält man aus 6.2.29 eine glatte Abbildung

$$\mathfrak{h}[\Gamma] : \mathfrak{h}[\tilde{U}] \times L^2([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow L^2([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$$

Desweiteren erhält man abermals aus der auf offensichtliche Weise definierten bilinearen Abbildung

$$B : L^2([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \times H^1([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow L^2([a, b], \mathbb{R}^n)$$

eine glatte Abbildung

$$\hat{B} : L^2([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \rightarrow \mathcal{L}(H^1([a, b], \mathbb{R}^n), L^2([a, b], \mathbb{R}^n))$$

Insgesamt ist damit der betrachtete Teil der Abbildung durch

$$\tilde{\gamma} \mapsto \hat{B}(\mathfrak{h}[\Gamma](\tilde{\gamma}, \tilde{d}(\tilde{\gamma})))$$

gegeben und folglich unter Verwendung von 6.2.45 ebenfalls glatt. □

Abschließend kann noch die semi-Riemannsche Metrik in diesem Zusammenhang betrachtet werden. Dies ist bedeutend einfacher. Da $\tilde{g} : \tilde{U} \rightarrow B_{sym}(\mathbb{R}^n)$ glatt ist, ist wegen 6.2.25 auch

$$\mathfrak{h}[\tilde{g}] : \mathfrak{h}[\tilde{U}] \rightarrow H^1([a, b], B_{sym}(\mathbb{R}^n))$$

glatt.

6.3 Das Wirkungsfunktional auf $H^1(I, M)$

Nachdem im letzten Abschnitt mit $H^1([a, b], M)$ das zentrale Objekt der Morse Theorie von Geodäten bereitgestellt wurde, soll nun der für eine Morse Theorie noch fehlende Morphismus in Form des sogenannten Wirkungsfunktionals diskutiert werden. Da die Anwendung von $H^1([a, b], M)$ nun explizit auf Geodäten abzielt, werde wieder lediglich das Intervall $[0, 1]$ betrachtet. Die hier gewählte Darstellung wird vielfach von [MPT01] abweichen, da hier einerseits der allgemeinere Fall der perturbierten Geodäten aus [MPP05] betrachtet wird, zum anderen die Darstellung in [MPT01] weitestgehend der Morse Theorie von Geodäten Riemannscher Mannigfaltigkeiten gewidmet ist und sich folglich für den hier zu betrachtenden Fall als recht unbrauchbar erweist.

Das Ziel dieses Abschnittes ist neben der Definition des Wirkungsfunktionals und des Nachweises der Glattheit insbesondere die Berechnung ihrer im Abschnitt 2.3.3 definierten Hesseschen. In [MPT01] wird zwar das Morse Index Theorem der Riemannschen Geometrie abschließend zitiert, die hier nun explizit berechnete Hessesche dort aber erst in der Formulierung des Theorems genannt und nicht einmal mit dem Wirkungsfunktional in Verbindung gebracht.

6.3.1 Definition. Für eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) und ein glattes Potential $V : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ ist das **Wirkungsfunktional** $\mathcal{A}_V : H^1([0, 1], M) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mathcal{A}_V(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 g(\gamma'(x), \gamma'(x)) dx - \int_0^1 V(x, \gamma(x)) dx$$

6.3.2 Satz. Das Wirkungsfunktional $\mathcal{A}_V : H^1([0, 1], M) \rightarrow \mathbb{R}$ ist glatt.

Beweis. Es sei $\varphi = (\varphi_t, U_t, \tilde{U}_t)$ eine Familie von Karten von M und $\mathfrak{h}[\varphi] : \mathfrak{h}[U] \rightarrow \mathfrak{h}[\tilde{U}]$ die zugehörige Karte von $H^1([0, 1], M)$. Man betrachte hiermit die Abbildung in lokalen Koordinaten

$$\tilde{\mathcal{A}}_V = \tilde{E} + \tilde{P} = \mathcal{A}_V \circ \mathfrak{h}[\varphi]^{-1} : \mathfrak{h}[\tilde{U}] \rightarrow \mathbb{R}$$

Ist nun $\tilde{\gamma} \in \mathfrak{h}[\tilde{U}]$ und bezeichne $\gamma = \mathfrak{h}[\varphi]^{-1}\tilde{\gamma} \in \mathfrak{h}[U]$, so ist mit den Abbildungen aus Abschnitt 6.2.6

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\tilde{\gamma}) &= \frac{1}{2} \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 g_{\gamma(t)}(d_{\gamma(t)}\varphi_t^{-1}\tilde{d}(\tilde{\gamma})(t), d_{\gamma(t)}\varphi_t^{-1}\tilde{d}(\tilde{\gamma})(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{g}_{(t, \tilde{\gamma}(t))}(\tilde{d}(\tilde{\gamma})(t), \tilde{d}(\tilde{\gamma})(t)) dt \end{aligned}$$

Man betrachte jetzt die Abbildung

$$\xi : H^1([0, 1], B(\mathbb{R}^n)) \times L^2([0, 1], \mathbb{R}^n) \times L^2([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$\xi(G, \gamma, \eta) = \frac{1}{2} \int_0^1 G(t)(\gamma(t), \eta(t)) dt$$

Diese Abbildung ist aber offenbar trilinear und wegen

$$\begin{aligned} |\xi(G, \gamma, \eta)| &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 |G(t)(\gamma(t), \eta(t))| dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \|G(t)\| \|\gamma(t)\| \|\eta(t)\| dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|G\|_\infty \int_0^1 \|\gamma(t)\| \|\eta(t)\| dt \leq \frac{1}{2} \|G\|_{H^1} \|\gamma\|_{L^2} \|\eta\|_{L^2} \end{aligned}$$

zudem beschränkt und folglich glatt. Der erste Summand des Wirkungsfunktionals kann damit in lokalen Koordinaten dargestellt werden durch

$$\mathfrak{h}[\tilde{U}] \ni \tilde{\gamma} \mapsto \xi(\mathfrak{h}[\tilde{g}], \tilde{d}(\tilde{\gamma}), \tilde{d}(\tilde{\gamma})) \in \mathbb{R}$$

und ist folglich unter Verwendung der Resultate aus 6.2.6 glatt.

Für den zweiten Summanden des Wirkungsfunktionals ist

$$\tilde{P}(\tilde{\gamma}) = \int_0^1 \tilde{V}(t, \tilde{\gamma}(t)) dt$$

wobei die glatte Abbildung $\tilde{V} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\tilde{V}(t, \tilde{x}) = V(t, \varphi_t^{-1} \tilde{x})$ definiert sei.

Auch diese Abbildung lässt sich wieder als Komposition zweier glatter Abbildungen erkennen. Zunächst ist $\mathfrak{h}[\tilde{V}] : \mathfrak{h}[\tilde{U}] \rightarrow H^1([a, b], \mathbb{R})$ mit $\mathfrak{h}[\tilde{V}](\tilde{\gamma})(t) = \tilde{V}(t, \tilde{\gamma}(t))$ wegen 6.2.25 glatt. Desweiteren ist aber die Abbildung $I : H^1([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $I(f) = \int_a^b f dt$ ein stetiges lineares Funktional und damit insbesondere glatt. Wegen $\tilde{P} = I \circ \mathfrak{h}[\tilde{V}]$ erhält man schließlich die Glattheit von $\tilde{P} : \mathfrak{h}[\tilde{U}] \rightarrow \mathbb{R}$ und so die Behauptung. \square

6.3.3 Satz. *Das Differential des Wirkungsfunktionals ist gegeben durch*

$$d_\gamma \mathcal{A}_V(\xi) = \int_0^1 g_{\gamma(t)} \left(\frac{\nabla}{dt} \xi(t), \gamma'(t) \right) dt - \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\text{grad } V(t, \gamma(t)), \xi(t)) dt \quad (6.3.1)$$

Beweis. Zunächst ist die linke Seite wegen 6.3.2 eine glatte Funktion auf $TH^1([a, b], M)$. Man betrachte nun die rechte Seite der Gleichung, die nun ebenfalls als glatt nachgewiesen werden soll. Hierfür können natürlich beide Summanden einzeln betrachtet werden. Ist also $\varphi = (\varphi_t, U_t, \tilde{U}_t)$ eine einparametrische Familie von Karten von M , so erhält man für den ersten Summanden in lokalen Koordinaten des Tangentialbündels (vgl. hierzu (6.2.12))

$$\mathfrak{h}[\tilde{U}] \times H^1(I, \mathbb{R}^n) \ni (\tilde{\gamma}, \tilde{v}) \mapsto \int_0^1 \tilde{g}_{(t, \tilde{\gamma}(t))}(\tilde{D}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{v})(t), \tilde{d}(\tilde{\gamma})(t)) dt = \xi(\mathfrak{h}[\tilde{g}], \tilde{D}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{v}), \tilde{d}(\tilde{\gamma})) \in \mathbb{R}$$

Hiermit verläuft der Beweis ohne bemerkenswerte Veränderungen so wie beim Nachweis der Glattheit für das Wirkungsfunktional.

Für den zweiten Summanden betrachte man zunächst die glatte Abbildung

$$\tilde{U} \ni (t, \tilde{x}) \mapsto d_{\varphi_t^{-1}(\tilde{x})} \varphi_t \text{ grad } V(t, \varphi_t^{-1}(\tilde{x})) = \tilde{V}(t, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^n$$

Man erhält hieraus mit 6.2.25 eine glatte Abbildung

$$\mathfrak{h}[\tilde{V}] : \mathfrak{h}[\tilde{U}] \rightarrow H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$$

Unter der schon häufig verwendeten Schlussweise liefert dies eine glatte Abbildung

$$\mathfrak{h}[\tilde{U}] \times H^1(I, \mathbb{R}^n) \ni (\tilde{\gamma}, \tilde{v}) \mapsto \int_0^1 \tilde{g}_{(t, \tilde{\gamma}(t))}(\tilde{V}(t, \tilde{\gamma}(t)), \tilde{v}(t)) dt = \xi(\mathfrak{h}[\tilde{g}], (\iota \circ \mathfrak{h}[\tilde{V}])(\tilde{\gamma}), \iota(\tilde{v})) \in \mathbb{R}$$

wobei $\iota : H^1(I, \mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(I, \mathbb{R}^n)$ die Inklusion bezeichne. Damit ist aber die rechte Seite in (6.3.1) ebenfalls eine glatte Funktion auf $TH^1([a, b], M)$. Insbesondere sind damit beide Seiten stetig und folglich genügt es für den Beweis der eigentlichen Aussage mit 6.2.41 die zu zeigende Gleichheit im Fall eines glatten ξ (und folglich auch eines glatten γ) nachzuweisen.

Ist nun $\gamma \in C^\infty([0, 1], M) \subset H^1([0, 1], M)$ und $\xi : [0, 1] \rightarrow TM$ ein glattes Vektorfeld entlang γ , so existiert bekanntlich eine glatte Abbildung $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \ni (s, t) \mapsto H(s, t) \in M$ mit $H(0, t) = \gamma(t)$ und $\frac{\partial H}{\partial s}(0, t) = \xi(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ (vgl. [Lee97, Lemma 6.4]). Wegen 6.2.40 ist mit $\gamma_s = H(s, \cdot)$ aber $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni s \mapsto \gamma_s \in H^1([0, 1], M)$ eine glatte Kurve mit $\frac{d}{ds}\gamma_s|_{s=0} = \xi$. Mit 2.1.3 ist aber folglich

$$d_\gamma \mathcal{A}_V(\xi) = \frac{d}{ds} \mathcal{A}_V(\gamma_s) |_{s=0}$$

Aus⁶

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{A}_V(\gamma_s) &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\partial_t \gamma_s, \partial_t \gamma_s) dt - \frac{d}{ds} \int_0^1 V(t, \gamma_s(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} g_{\gamma(t)}(\partial_t \gamma_s, \partial_t \gamma_s) dt - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} V(t, \gamma_s(t)) dt \\ &= \int_0^1 g_{\gamma(t)} \left(\frac{\nabla}{ds} \partial_t \gamma_s, \partial_t \gamma_s \right) dt - \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\text{grad } V(t, \gamma_s(t)), \partial_s \gamma_s) dt \\ &= \int_0^1 g_{\gamma(t)} \left(\frac{\nabla}{dt} \partial_s \gamma_s, \partial_t \gamma_s \right) dt - \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\text{grad } V(t, \gamma_s(t)), \partial_s \gamma_s) dt \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

erhält man also schließlich

$$d_\gamma \mathcal{A}_V(\xi) = \int_0^1 g_{\gamma(t)} \left(\frac{\nabla}{dt} \xi(t), \gamma'(t) \right) dt - \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\text{grad } V(t, \gamma(t)), \xi(t)) dt$$

□

Von nun an werde für zwei feste Punkte $p, q \in M$ stets das eingeschränkte Wirkungsfunktional $\mathcal{A}_{pq} = \mathcal{A}_V|_{H_{pq}^1(I, M)} : H_{pq}^1(I, M) \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet.

6.3.4 Lemma. *Die kritischen Punkte von $\mathcal{A}_{pq} : H_{pq}^1(I, M) \rightarrow \mathbb{R}$ sind glatt.*

Beweis. Da Glattheit eine lokale Eigenschaft ist, kann der Beweis dieser Aussage analog zu [Jo02, S. 361-362] in Karten geführt werden. Der Beweis ist somit vollkommen unabhängig von den Überlegungen zur glatten Struktur von $H^1(I, M)$ und soll daher übergangen werden. □

6.3.5 Satz. *Die kritischen Punkte des eingeschränkten Wirkungsfunktionals sind die p und q verbindenden p -Geodäten.*

⁶In der folgenden Rechnung wird eines der bereits in 6.1.4 zitierten Resultate verwendet.

Beweis. Zunächst ist für eine glatte Kurve $\gamma \in H_{pq}^1(I, M)$ und $\xi \in T_\gamma H_{pq}^1(I, M)$

$$0 = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(\gamma'(t), \xi(t)) dt = \int_0^1 g\left(\frac{\nabla}{dt} \gamma'(t), \xi(t)\right) dt + \int_0^1 g\left(\gamma'(t), \frac{\nabla}{dt} \xi(t)\right) dt$$

Hieraus erhält man mit 6.3.3

$$\begin{aligned} d_\gamma \mathcal{A}_{pq}(\xi) &= \int_0^1 g\left(\frac{\nabla}{dt} \xi(t), \gamma'(t)\right) dt - \int_0^1 g(\text{grad } V(t, \gamma(t)), \xi(t)) dt \\ &= - \int_0^1 g\left(\frac{\nabla}{dt} \gamma'(t), \xi(t)\right) dt - \int_0^1 g(\text{grad } V(t, \gamma(t)), \xi(t)) dt \quad (6.3.3) \\ &= - \int_0^1 g\left(\frac{\nabla}{dt} \gamma'(t) + \text{grad } V(t, \gamma(t)), \xi(t)\right) dt \end{aligned}$$

Ist nun $\gamma \in H_{pq}^1(I, M)$ ein kritischer Punkt, so ist mit 6.3.4 $\gamma \in C^\infty(I, M)$ und man erhält aus (6.3.3)

$$\int_0^1 g\left(\frac{\nabla}{dt} \gamma'(t) + \text{grad } V(t, \gamma(t)), \xi(t)\right) dt = 0 \quad \forall \xi \in T_\gamma H_{pq}^1(I, M)$$

Angenommen es existiert nun ein $t_0 \in [0, 1]$ mit $\frac{\nabla}{dt} \gamma'(t_0) + \text{grad } V(t_0, \gamma(t_0)) \neq 0$, so gibt es ein $\xi(t_0) \in T_{\gamma(t_0)} M$ mit

$$g_{\gamma(t_0)}\left(\frac{\nabla}{dt} \gamma'(t_0) + \text{grad } V(t_0, \gamma(t_0)), \xi(t_0)\right) \neq 0$$

Man setze nun $\xi(t_0)$ als Vektorfeld entlang γ fort, so dass $g_{\gamma(t)}(\frac{\nabla}{dt} \gamma'(t) + \text{grad } V(t, \gamma(t)), \xi(t)) \neq 0$ auf $\text{supp}(\xi) \subset [0, 1]$. Damit ist aber

$$\int_0^1 g\left(\frac{\nabla}{dt} \gamma' + \text{grad } V(t, \gamma(t)), \xi(t)\right) dt \neq 0$$

im Widerspruch zu obiger Aussage. Folglich ist γ eine p-Geodäte.

Ist umgekehrt γ eine p-Geodäte, so ist diese jedenfalls glatt und (6.3.3) zeigt sofort, dass γ ein kritischer Punkt von \mathcal{A}_{pq} ist. \square

6.3.6 Satz. *Es sei $\gamma \in H_{pq}^1(I, M)$ ein kritischer Punkt von $\mathcal{A}_{pq} : H_{pq}^1(I, M) \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist die Hessesche von \mathcal{A}_{pq} an der Stelle γ gegeben durch*

$$\begin{aligned} \text{Hess}_\gamma(\mathcal{A}_{pq})(\xi, \eta) &= \int_0^1 g_{\gamma(t)}\left(\frac{\nabla}{dt} \xi(t), \frac{\nabla}{dt} \eta(t)\right) dt \\ &\quad - \int_0^1 g_{\gamma(t)}(-R(\gamma'(t), \xi(t))\gamma'(t) + \nabla_{\xi(t)} \text{grad } V(t, \gamma(t)), \eta(t)) dt \end{aligned}$$

Beweis. Man beachte zunächst, dass γ als kritischer Punkt von \mathcal{A}_{pq} insbesondere glatt ist. Nach Definition der Hesseschen ist diese stetig. Um nun auch die Stetigkeit der rechten Seite einzusehen, kann diese in zwei Teilen betrachtet werden.

Für den ersten Summanden

$$H_1 : T_\gamma H_{pq}^1(I, M) \times T_\gamma H_{pq}^1(I, M) \ni (\xi, \eta) \mapsto \int_0^1 g_{\gamma(t)}\left(\frac{\nabla}{dt} \xi(t), \frac{\nabla}{dt} \eta(t)\right) dt$$

können hierzu insbesondere die bereits erzielten Ergebnisse betrachtet werden. Bezüglich des von einer Karte des Tangentialbündels induzierten topologischen Isomorphismus (vgl. (6.2.12)) erhält man eine Darstellung

$$H^1(I, \mathbb{R}^n) \times H^1(I, \mathbb{R}^n) \ni (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \mapsto \int_0^1 \tilde{g}_{(t, \tilde{\gamma}(t))}(\tilde{D}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\xi})(t), \tilde{D}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\eta})(t)) dt$$

mit der sich diese Bilinearform unmittelbar als stetig erkennen lässt. Für den zweiten Summanden der Abbildung sei

$$\tilde{\xi}(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) e_i, \quad \tilde{\eta}(t) = \sum_{i=1}^n \eta_i(t) e_i \in H^1(I, \mathbb{R}^n)$$

wobei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Basis des \mathbb{R}^n bezeichne. Man erhält nun mit

$$\begin{aligned} \xi(t) &= d_{\gamma(t)} \varphi_t^{-1} \tilde{\xi}(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) X_i(t, \gamma(t)) \\ \eta(t) &= d_{\gamma(t)} \varphi_t^{-1} \tilde{\eta}(t) = \sum_{i=1}^n \eta_i(t) X_i(t, \gamma(t)) \end{aligned}$$

das Resultat

$$\begin{aligned} &H_2(d_{\gamma(t)} \varphi_t^{-1} \tilde{\xi}, d_{\gamma(t)} \varphi_t^{-1} \tilde{\eta}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 \xi_i(t) \eta_j(t) g(-R(\gamma'(t), X_i(t, \gamma(t))) \gamma'(t) + \nabla_{X_i(t, \gamma(t))} \text{grad } V(t, \gamma(t)), X_j(t, \gamma(t))) dt \\ &= \langle S(t) \tilde{\xi}, \tilde{\eta} \rangle_{L^2(I, \mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

mit einer glatten Abbildung $t \mapsto S(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Damit existiert aber ein $c > 0$ mit

$$|H_2(\xi, \eta)| \leq \|S\|_\infty \|\tilde{\xi}\|_{L^2} \|\tilde{\eta}\|_{L^2} \leq c \|S\|_\infty \|\tilde{\xi}\|_{H_0^1} \|\tilde{\eta}\|_{H_0^1}$$

und demnach ist auch H_2 stetig.

Mit 6.2.11 genügt es wieder den Nachweis der Gleichheit im Fall glatter Vektorfelder ξ, η entlang γ zu erbringen.

Ist nun $\xi : [0, 1] \rightarrow TM$ ein glattes Vektorfeld entlang γ , so existiert analog zum Beweis von 6.3.3 eine glatte Abbildung $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \ni (s, t) \mapsto H(s, t) \in M$ mit $H(0, t) = \gamma(t)$ und $\frac{\partial H}{\partial s}(0, t) = \xi(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ wobei zusätzlich $H(s, 0) = \gamma(0)$ und $H(s, 1) = \gamma(1)$ für alle $s \in [0, 1]$ (vgl. [Lee97, Lemma 6.4]). Wegen 6.2.40 ist mit $\gamma_s = H(s, \cdot)$ aber $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni s \mapsto \gamma_s \in H_{pq}^1([0, 1], M)$ eine glatte Kurve mit $\frac{d}{ds} \gamma_s|_{s=0} = \xi$. Wegen 2.3.15 ist damit

$$\text{hess}_\gamma(\mathcal{A}_{pq})(\xi) = \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{A}_{pq}(\gamma_s)|_{s=0}$$

Man erhält nun mit (6.3.2) zunächst⁷

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{A}(\gamma_s) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} g \left(\frac{\nabla}{dt} \partial_s \gamma_s, \partial_t \gamma_s \right) dt - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} g(\text{grad } V(t, \gamma_s(t)), \partial_s \gamma_s) dt \\
&= \int_0^1 g \left(\frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \partial_s \gamma_s, \partial_t \gamma_s \right) dt + \int_0^1 g \left(\frac{\nabla}{dt} \partial_s \gamma_s, \frac{\nabla}{ds} \partial_t \gamma_s \right) dt \\
&\quad - \int_0^1 g \left(\frac{\nabla}{ds} \text{grad } V(t, \gamma_s(t)), \partial_s \gamma_s \right) dt - \int_0^1 g \left(\text{grad } V(t, \gamma_s(t)), \frac{\nabla}{ds} \partial_s \gamma_s \right) dt \\
&= \int_0^1 g(R(\partial_s \gamma_s, \partial_t \gamma_s) \partial_s \gamma_s, \partial_t \gamma_s) dt + \int_0^1 g \left(\frac{\nabla}{dt} \partial_s \gamma_s, \frac{\nabla}{ds} \partial_t \gamma_s \right) dt \\
&\quad - \int_0^1 g \left(\frac{\nabla}{ds} \text{grad } V(t, \gamma_s(t)), \partial_s \gamma_s \right) dt + \int_0^1 g \left(\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \partial_s \gamma_s, \partial_t \gamma_s \right) dt \\
&\quad - \int_0^1 g \left(\text{grad } V(t, \gamma_s(t)), \frac{\nabla}{ds} \partial_s \gamma_s \right) dt
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\frac{d}{dt} g \left(\frac{\nabla}{ds} \partial_s \gamma_s, \partial_t \gamma_s \right) = g \left(\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \partial_s \gamma_s, \partial_t \gamma_s \right) + g \left(\frac{\nabla}{ds} \partial_s \gamma_s, \frac{\nabla}{dt} \partial_t \gamma_s \right)$$

erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{A}(\gamma_s) &= - \int_0^1 g(R(\partial_t \gamma_s, \partial_s \gamma_s) \partial_s \gamma_s, \partial_t \gamma_s) dt + \int_0^1 g \left(\frac{\nabla}{dt} \partial_s \gamma_s, \frac{\nabla}{ds} \partial_t \gamma_s \right) dt \\
&\quad - \int_0^1 g \left(\frac{\nabla}{ds} \text{grad } V(t, \gamma_s(t)), \partial_s \gamma_s \right) dt + \int_0^1 \frac{d}{dt} g \left(\frac{\nabla}{ds} \partial_s \gamma_s, \partial_t \gamma_s \right) dt \\
&\quad - \int_0^1 g \left(\frac{\nabla}{ds} \partial_s \gamma_s, \frac{\nabla}{dt} \partial_t \gamma_s + \text{grad } V(t, \gamma_s(t)) \right) dt \\
&= - \int_0^1 g(R(\partial_t \gamma_s, \partial_s \gamma_s) \partial_s \gamma_s, \partial_t \gamma_s) dt + \int_0^1 g \left(\frac{\nabla}{dt} \partial_s \gamma_s, \frac{\nabla}{dt} \partial_s \gamma_s \right) dt \\
&\quad - \int_0^1 g \left(\frac{\nabla}{ds} \text{grad } V(t, \gamma_s(t)), \partial_s \gamma_s \right) dt + \int_0^1 \frac{d}{dt} g \left(\frac{\nabla}{ds} \partial_s \gamma_s, \partial_t \gamma_s \right) dt \\
&\quad - \int_0^1 g \left(\frac{\nabla}{ds} \partial_s \gamma_s, \frac{\nabla}{dt} \partial_t \gamma_s + \text{grad } V(t, \gamma_s(t)) \right) dt
\end{aligned}$$

und damit für $s = 0$

$$\begin{aligned}
\text{hess}_\gamma(\mathcal{A}_{pq})(\xi) &= - \int_0^1 g(R(\gamma', \xi) \xi, \gamma') dt + \int_0^1 g \left(\frac{\nabla}{dt} \xi, \frac{\nabla}{dt} \xi \right) dt \\
&\quad - \int_0^1 g(\nabla_{\xi(t)} \text{grad } V(t, \gamma(t)), \xi(t)) dt \\
&= \int_0^1 g \left(\frac{\nabla}{dt} \xi, \frac{\nabla}{dt} \xi \right) dt + \int_0^1 g(R(\gamma', \xi) \gamma', \xi) dt \\
&\quad - \int_0^1 g(\nabla_{\xi(t)} \text{grad } V(t, \gamma(t)), \xi(t)) dt
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun unter Ausnutzung der Bilinearität durch Polarisierung. □

⁷In diesen Rechnungen werden die in 6.1.4 zitierten Resultate verwendet.

6.3.7 Bemerkung. Mit einem ähnlichen Regularitätsargument, mit dem auch 6.3.4 gezeigt werden kann, ist einzusehen, dass $\ker(H_\gamma(\mathcal{A}_{pq}))$ Teilmenge der glatten Vektorfelder entlang γ ist. Mit diesem Resultat erhält man aber unmittelbar, dass der Kern der Hesseschen gerade aus den bei p und q verschwindenden Jacobifeldern entlang γ besteht. Insbesondere ist also $\text{Hess}_\gamma(\mathcal{A}_{pq})$ genau dann nicht entartet, wenn 1 für die Geodäte γ nicht konjugiert ist. Dies erklärt die Namensgebung für nicht entarteten p-Geodäten.

Kapitel 7

Morse Index Theoreme in semi-Riemannscher Geometrie

In diesem Kapitel werden zunächst die Aussagen der klassischen Morse Index Theoreme für Riemannsche und kausale Lorentz Geodäten formuliert. Anschließend werden zumeist in aller gebotenen Kürze die wesentlichen bisherigen Erfolge der Verallgemeinerung dieser Theoreme auf Geodäten allgemeiner semi-Riemannscher Mannigfaltigkeiten präsentiert. Einzig wird hierbei dem Morse Index Theorem aus [MPP05] mehr Raum zur Verfügung gestellt, da dieses in Hinblick auf den vierten Teil dieser Arbeit von besonderer Bedeutung ist. Insbesondere wird hier schließlich der im Titel erwähnte Begriff des Spektralindex einer perturbierten Geodäte definiert.

7.1 Klassische Morse Index Theoreme

7.1.1 Das Morse Index-Theorem der Riemannschen Geometrie

Mit den bisher getroffenen Vorbereitungen und Definitionen kann das klassische Morse Index Theorem unmittelbar genannt werden (vgl. [Mi69, Theorem 15.1], [Jo02, Theorem 4.3.2]) :

7.1.1 Satz. *Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine Geodäte mit $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$. Dann besitzt γ nur endliche viele konjugierte Punkte und es ist*

$$i_{Morse}(\text{hess}(\mathcal{A}_{pq})(\gamma)) = \sum_{0 < t < 1} m(t)$$

Bekanntlich besitzt das Morse-Theorem eine Vielzahl bedeutender Anwendungen auf die hier aber nicht näher eingegangen werden soll¹.

Eine durchaus interessante Folgerung erhält man aus dem Morse-Palais Lemma 2.3.18. Damit ist eine nicht entartete Geodäte $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ genau dann ein lokales Minimum von \mathcal{A}_{pq} , wenn γ keine konjugierten Punkte besitzt. Andernfalls ist die betrachtete Geodäte lediglich ein Sattelpunkt des Funktionals \mathcal{A}_{pq} .

7.1.2 Die Morse Index Theoreme für kausale Geodäten der Lorentz-geometrie

Für den Fall einer kausalen Geodäte in einer Lorentzmannigfaltigkeit überträgt sich das Morse Index Theorem in zwei von der Kausalität der Geodäte abhängigen verschiedenen Weisen. Bevor die entsprechenden Aussagen hier kurz erläutert werden, sei zunächst darauf hingewiesen, dass sich im Riemannschen Fall der Morse Index einer Geodäte nicht verändert falls die Hessesche des Wirkungsfunktionals statt auf $T_\gamma H_{pq}^1([a, b], M)$ lediglich auf dem Unterraum aller Vektorfelder entlang γ betrachtet wird, die punktweise orthogonal zu γ' sind². Das Morse Index Theorem der Riemannschen Geometrie kann folglich ebenso durch Einschränkung der Hesseschen auf diesen Unterraum formuliert werden.

Im Fall einer zeitartigen Geodäte ist die Hessesche auf dem Unterraum aller zu γ tangentialen Vektorfelder negativ definit und hat damit keinen endlichen Morse Index. Die Lösung dieses Problems liefert nun gerade die oben für den Riemannschen Fall als unbedeutend erkannte Veränderung des Index Theorems. Durch Einschränkung auf den Unterraum aller zu γ' punktweise orthogonalen Vektorfelder kann die analoge Aussage des Morse Index Theorems mittels eines recht ähnlichen Beweises erhalten werden (vgl. [BEE96, § 10.1]).

Im Fall einer lichtartigen Geodäte behält man die Einschränkung auf den Unterraum der zu γ tangentialen Vektorfelder bei, erhält aber eine weitere Schwierigkeit aus der nun geltenden Beziehung $g(\gamma', \gamma') = 0$. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass jedes Vektorfeld der Form $Y(t) = f(t)\gamma'(t)$ mit

¹Die wohl bekannteste aus dem Morse Theorem erhaltene Errungenschaft ist die Bott-Periodizität (vgl. hierzu [Mi69, §23-24], [Bo59])

²Diese Erkenntnis lässt sich zum Beispiel mühelos aus den Überlegungen aus [Lee97, S. 186] folgern.

einer glatten Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(1) = 0$ bereits im Kern der eingeschränkten Hesseschen liegt, was sich als wesentliche Schwierigkeit bei einer Verallgemeinerung des Morse Theorems in diesem Fall erweist. Man bildet aber nun den Unterraum aller solcher $f\gamma'$ wie eben beschrieben und betrachtet hiermit den Quotientenraum. Die Hessesche kann nun auf diesem Quotientenraum betrachtet werden und es stellt sich die Gültigkeit des Morse Index Theorems in einer analogen Form heraus (vgl. [BEE96, § 10.3]).

7.2 Schwierigkeiten bei Verallgemeinerung auf semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Die zunächst entscheidende Erkenntnis bei der Betrachtung von Geodäten in allgemeinen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist, dass eine Verallgemeinerung der Morse Index Theoreme 7.1.1 und 7.1.2 auf allgemeine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten a-priori zum Scheitern verurteilt ist. Diese Tatsache erhält man aus den folgenden zwei Beobachtungen.

Die erste dieser Beobachtungen wurde bereits in Abschnitt 6.1 vorgestellt. Betrachtet man Geodäten in den Fällen, die bisher in diesem Abschnitt nicht behandelt wurden, so wird im Allgemeinen die Anzahl konjugierter Punkte einer Geodäte nicht endlich sein. Damit ist eine Zählung konjugierter Punkte wie in den klassischen Morse Index Theoremen natürlich unmöglich.

Die zweite wichtige Beobachtung betrifft die Hessesche von \mathcal{A}_{pq} . Ist Y ein Jacobi-Feld entlang einer Geodäte γ und $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $f(0) = f(1) = 0$, so erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
 \text{Hess}_\gamma(\mathcal{A}_{pq})(fY, fY) &= \int_0^1 g\left(\frac{\nabla(fY)}{dt}, \frac{\nabla(fY)}{dt}\right) dt + \int_0^1 g(R(\gamma', fY)\gamma', fY) dt \\
 &= \int_0^1 (f')^2 g(Y, Y) dt + \int_0^1 2ff'g\left(\frac{\nabla Y}{dt}, Y\right) dt \\
 &\quad + \int_0^1 f^2g\left(\frac{\nabla Y}{dt}, \frac{\nabla Y}{dt}\right) dt + \int_0^1 f^2g(R(\gamma', Y)\gamma', Y) dt \\
 &= \int_0^1 (f')^2 g(Y, Y) dt + \int_0^1 2ff'g\left(\frac{\nabla Y}{dt}, Y\right) dt \\
 &\quad + \int_0^1 f^2g\left(\frac{\nabla Y}{dt}, \frac{\nabla Y}{dt}\right) dt + \int_0^1 f^2g\left(\frac{\nabla^2 Y}{dt^2}, Y\right) dt \\
 &= \int_0^1 (f')^2 g(Y, Y) dt + \int_0^1 \frac{d}{dt}(f^2g\left(\frac{\nabla Y}{dt}, Y\right)) dt \\
 &= \int_0^1 (f')^2 g(Y, Y) dt
 \end{aligned}$$

Man wähle nun ein $t_0 \in (0, 1)$. Ist nun $\nu > 0$, so existiert ein Jacobifeld Y entlang γ , so dass $g(Y, Y) < 0$ in einer Umgebung $V \subset [0, 1]$ von t_0 . Damit ist aber $\text{Hess}_\gamma(\mathcal{A}_{pq})$ auf dem unendlich dimensionalen Unterraum $\{fY : \text{supp}(f) \subset V\} \subset T_\gamma H^1(I, M)$ negativ definit und folglich der Morse Index von γ unendlich³. Im vorigen Abschnitt wurde im Fall kausaler Geodäten in Lorentzmannigfaltigkeiten ein Ausweg aus dieser Situation in diesem Fall aufgezeigt. Ist aber $\nu > 2$ oder γ eine raumartige Geodäte einer Lorentzmannigfaltigkeit, so kann obiges Jacobifeld sicher orthogonal zu γ' gewählt werden und folglich führen auch diese Manipulationen der Hesseschen nicht zur Endlichkeit des Morse Index.

³Mit dieser Erkenntnis ist insbesondere ein weiterer Blick auf das Morse-Palais Lemma 2.3.18 und die letzte Bemerkung des Abschnitts 7.1.1 interessant.

7.3 Das Theorem von Piccione und Tausk

Es sei γ eine Geodäte und man betrachte die Hessesche

$$\text{Hess}_\gamma(\mathcal{A}_{pq})(\xi, \eta) = \int_0^1 g_{\gamma(t)} \left(\frac{\nabla}{dt} \xi(t), \frac{\nabla}{dt} \eta(t) \right) dt + \int_a^b g_{\gamma(t)} (R(\gamma'(t), \xi(t))\gamma'(t), \eta(t)) dt$$

eingeschränkt auf den Unterraum aller punktweise zu γ orthogonalen Vektorfelder. Unter Verwendung der Glattheit von γ können nun wie in 6.1.7 punktweise orthogonale parallele Vektorfelder $\{e_1(t), \dots, e_{n-1}(t)\}$ entlang γ gewählt werden, die zudem punktweise orthogonal zu γ sind. Damit erhält man aber stets eine Darstellung

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i(t) e^i(t) \quad \eta(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i(t) e^i(t)$$

Durch Einsetzen in die eingeschränkte Hessesche erhält man nun mühelos eine Darstellung

$$\text{Hess}_\gamma(\mathcal{A}_{pq})(\xi, \eta) = \langle J\tilde{\xi}', \tilde{\eta}' \rangle_{L^2(I, \mathbb{R}^{n-1})} - \langle S\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \rangle_{L^2(I, \mathbb{R}^{n-1})}$$

wobei $\tilde{\xi}(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_{n-1}(t))$, $\tilde{\eta}(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_{n-1}(t))$, J eine konstante symmetrische Matrix und $S = S(t)$ ein glatter Weg symmetrischer Matrizen ist. Insbesondere stellt man fest, dass auf dem Unterraum $H^{2,2}(I, \mathbb{R}^{n-1}) \cap H_0^1(I, \mathbb{R}^{n-1})$ stets durch partielle Integration die Darstellung

$$\text{Hess}_\gamma(\mathcal{A}_{pq})(\xi, \eta) = -\langle J\tilde{\xi}'' + S\tilde{\xi}, \eta \rangle_{L^2(I, \mathbb{R}^{n-1})}$$

gewonnen werden kann. Man betrachte hiermit den Differentialoperator

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : H^{2,2}(I, \mathbb{R}^{n-1}) \cap H_0^1(I, \mathbb{R}^{n-1}) &\subset L^2(I, \mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow L^2(I, \mathbb{R}^{n-1}) \\ (\mathcal{J}u)(t) &= u''(t) + J^{-1}S(t)u(t) \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

Zur Motivation des Folgenden betrachte man diesen Operator zunächst im Riemannschen Fall. Hier ist stets $J = id$ und mittels des Spektralsatzes für (unbeschränkte) selbstadjungierte Operatoren erhält man nun eine Zerlegung von $L^2(I, \mathbb{R}^{n-1})$ in Eigenräume des Operators, mit der sich ohne Schwierigkeiten die Gleichheit des Morse Index der Hesseschen des Wirkungsfunktionals mit der Mächtigkeit des negativen Spektrums dieses Differentialoperators zeigen lässt. Hiermit kann das Morse Theorem im Riemannschen Fall als eine Aussage über Randwertprobleme gewisser Systeme von Differentialgleichungen angesehen werden.

7.3.1 Satz (Morse Index Theorem). *Die Summe der mit Vielfachheiten gezählten konjugierten Punkte der Jacobi-Gleichung von γ ist gleich der Anzahl der mit Vielfachheiten gezählten negativen Eigenwerte von (7.3.1).*

Betrachtet man zudem das aus (7.3.1) zu gewinnende homogene Differentialgleichungssystem, so stellt man fest, dass die konjugierten Punkte des Systems mitsamt ihrer Vielfachheiten

ebenfalls bereits mit denen der Geodäten übereinstimmen, so dass diese Formulierung des Morse Index Theorems sich vollständig auf eine Aussage über Randwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen reduziert.

Diese Version des klassischen Index Theorems war letztlich der Anfang der Überlegungen für eine Verallgemeinerung auf allgemeine semi-Riemannsche Geodäten. Im Spezialfall einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit ist dies gerade einer der berühmten Sturm-Sätze aus der Theorie der Randwertprobleme gewöhnlicher skalarer Differentialgleichungen und so ist letztlich das Riemannsche Morse Index Theorem die natürliche Verallgemeinerung dieses Theorems auf den Fall von Systemen unter der Zusatzbedingung, dass die Matrix S in (7.3.1) stets symmetrisch bezüglich des euklidischen Skalarproduktes ist. Interessanterweise hat nun letztlich der Beweis des Sturm Theorems die Richtung für eine Verallgemeinerung auf den semi-Riemannschen Fall geliefert. Hier ist das entscheidende Hilfsmittel eine Transformation auf Polarkoordinaten mit der die zu betrachtenden Indizes als Windungszahlen auf $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$ dargestellt werden können. Dies führt um im semi-Riemannschen Fall Stabilität und sinnvolle Aussagen zu erlangen auf die Idee der Verwendung homologischer Invarianten wie sie bereits im zweiten Teil der Arbeit vorgestellt wurden. Die erste Arbeit die sich letztlich mit einer Verallgemeinerung der differentiellen Version des Index-Theorems auf semi-Riemannsche Geodäten beschäftigte wurde 1994 von Helfer gegeben (vgl. [Hel94]). Die entscheidenden Erkenntnisse der Arbeit bestehen in der nicht mehr notwendig geltenden Endlichkeit der konjugierten Punkte (vgl. Abschnitt 6.1) und des Vorschlages die Zählung konjugierter Punkte im klassischen Morse Index Theorem durch den Maslov Index des zugehörigen Morse-Sturm Systems zu ersetzen. Dies sind sehr entscheidende Erkenntnisse, die prinzipiell der Anfang der Morse Index Theorie für semi-Riemannsche Geodäten war. Bedauerlicherweise weist die Arbeit von Helfer einige entscheidende Mängel in der Beweisführung auf. Diese wurden von Mercuri, Piccione und Tausk in [MPT00] benannt und das Index Theorem von Helfer für reguläre Geodäten gezeigt. In [CEPPT02] konnten schließlich Eidam, Pereira, Piccione und Tausk die allgemeine Gültigkeit des von Helfer angegebenen Index Theorems nachweisen. Die Verallgemeinerung des Morse Index der Hesseschen verwendet dabei motiviert durch 7.3.1 den Differentialoperator (7.3.1). Dieser wird auf dem durch die Bilinearform

$$\hat{g}(u, v) = \int_a^b \langle Ju, v \rangle dt$$

gegebenem Krein-Raum betrachtet. Er ist bezüglich des Krein-Produktes symmetrisch und im Fall $J = id$ erhält man offenbar wieder die Ursprüngliche Definition. Letztlich wird dieser Operator nun einem durchaus recht komplizierten Prozess unterworfen, indem er zunächst komplexifiziert wird um anschließend Aussagen über den reellen Anteil des Spektrums zu erhalten. Insbesondere stellt sich so heraus, dass (7.3.1) nur endlich viele reelle negative Eigenwerte besitzt, die stets endliche Vielfachheit haben. Der **spektrale Index** wird nun definiert als

$$i_{spec}(\gamma) = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(\mathcal{J}^c) \cap \mathbb{R} \\ \lambda < 0}} \text{sgn}(\hat{g} |_{H_\lambda})$$

wobei $H_\lambda = \mathcal{G}_\lambda(\mathcal{J}^C) \cap L^2(I, \mathbb{R}^{n-1})$ und

$$\mathcal{G}(\mathcal{J}^C) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \ker(\lambda - \mathcal{J}^C)^k$$

den verallgemeinerten Eigenraum des komplexifizierten Operators \mathcal{J}^C zum Eigenwert λ bezeichnen. Man beachte, dass im Riemannschen Fall der spektrale Index gerade die Summe der negativen Eigenwerte mit Vielfachheiten wie in 7.3.1 ist. Zudem lassen sich aus diesem Index Theorem auch die klassischen Index Theoreme der Lorentz-Geometrie folgern (vgl. hierzu [MPT00, Remark 6.2.5]). Bedauerlicherweise besitzt der spektrale Index nach Definition keine geometrische Interpretation.

Dennoch konnte parallel zu diesen Überlegungen auch eine geometrische Verallgemeinerung des Morse Index der Hesseschen einer Geodäte gegeben werden. Die Idee eines verallgemeinerten Morse Index besteht in einer Einschränkung der Hesseschen auf gewisse geometrisch motivierte Unterräume von $T_\gamma H_{pq}^1(I, \mathbb{R}^n)$, auf denen der Index der Hesseschen endlich ist. Hierzu sei eine **k-dimensionale tangentielle Distribution** entlang γ eine Familie von Unterräumen $\mathcal{D}_t \subset T_{\gamma(t)}M$, so dass glatte Vektorfelder $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ entlang γ existieren, die punktweise eine Basis von \mathcal{D} bilden⁴. Eine **maximale negative Distribution** entlang γ ist eine ν -dimensionale tangentielle Distribution entlang γ , so dass g auf jedem \mathcal{D}_t negativ definit ist. Man beachte, dass mit der Wahl von orthonormalen, parallelen Basisvektorfeldern entlang γ wie in 6.1.4 offenbar jede Geodäte eine maximale negative Distribution besitzt.

Ist nun eine maximale negative Distribution \mathcal{D} entlang γ gegeben, so definiert man die folgenden abgeschlossenen Unterräume von $T_\gamma H_{pq}^1(I, M)$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\mathcal{D} &= \{v \in T_\gamma H_{pq}^1(I, M) : g\left(\frac{\nabla v}{dt}, Y_i\right) \in H^1(I, \mathbb{R}) \\ &\quad, \frac{d}{dt}g\left(\frac{\nabla v}{dt}, Y_i\right) = g\left(\frac{\nabla v}{dt}, \frac{\nabla Y_i}{dt}\right) + g(R(\dot{\gamma}, v)\dot{\gamma}, Y_i), i = 1, \dots, k\} \\ \mathcal{S}_\mathcal{D} &= \{v \in T_\gamma H_{pq}^1(I, M) : v(t) \in \mathcal{D}_t \forall t \in [a, b]\} \end{aligned}$$

Hierbei sind $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ beliebige Basisvektorfelder für \mathcal{D}_t wie in der Definition und es ist nicht schwer die Unabhängigkeit von $\mathcal{K}_\mathcal{D}$ von dieser Wahl zu zeigen. Ist $v \in T_\gamma H_{pq}^1(I, M)$ bereits von der Klasse C^2 , so ist genau dann $v \in \mathcal{K}_\mathcal{D}$, wenn $\frac{\nabla^2 v}{dt^2} + R(\dot{\gamma}', v)\dot{\gamma}'$ orthogonal zu \mathcal{D} ist. Damit kann $\mathcal{K}_\mathcal{D}$ anschaulich als Raum der Jacobi-Felder entlang \mathcal{D} interpretiert werden. Mit diesen Definitionen kann nun gezeigt werden, dass für eine beliebige Distribution \mathcal{D} entlang γ

$$i_{Morse}(\gamma, \mathcal{D}) := n_-(\text{Hess}(\mathcal{A}_{pq})(\gamma) |_{\mathcal{K}_\mathcal{D}}) - n_+(\text{Hess}(\mathcal{A}_{pq})(\gamma) |_{\mathcal{S}_\mathcal{D}})$$

sinnvoll ist, da beide Zahlen der rechten Seite endlich sind. Die Wahl der Räume ist insbesondere aus Problemen für spezielle Lorentz-Mannigfaltigkeiten motiviert. Für eine riemannsche Geodäte

⁴Damit ist eine tangentielle Distribution entlang γ eine tangentielle Distribution des Bündels γ^*TM , vgl. [Lee03, S. 495]

ist stets $\mathcal{D} = 0$ und folglich $\mathcal{K}_{\mathcal{D}} = T_{\gamma}H_{pq}^1(I, M)$ sowie $\mathcal{S}_{\mathcal{D}} = 0$. Damit erhält man in diesem Fall genau den klassisch betrachteten Morse Index. Ebenfalls sieht man durch eine einfache Überlegung, dass für eine zeitartige Lorentz-Geodäte mit der Wahl $Y = \gamma'$ der Raum $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ gerade aus allen Elementen aus $T_{\gamma}H_{pq}^1(I, M)$ besteht, die punktweise orthogonal zu γ' sind⁵. Und da in diesem Fall offenbar $n_+(\text{Hess}(\mathcal{A}_{pq})(\gamma) |_{\mathcal{S}_{\mathcal{D}}}) = 0$ erhält man den im zeitartigen Morse Index Theorem verwendeten Index.

Mit diesen Betrachtungen können nun die Aussagen der Artikel [MPT02],[CEPPT02],[PT00] und [GMPT01] in einem Resultat zusammengefasst werden.

7.3.2 Satz (Morse Index Theorem von Piccione und Tausk). *Es sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine nicht entartete Geodäte. Zudem sei \mathcal{D} eine beliebige maximale negative Distribution entlang γ . Dann ist*

$$i_{\text{maslov}}(\gamma) = i_{\text{spec}}(\gamma) = i_{\text{Morse}}(\gamma, \mathcal{D})$$

Der Beweis der Gleichheit mit $i_{\text{Morse}}(\gamma, \mathcal{D})$ benötigt dabei ausschließlich den Maslov Index. Der spektrale Index tritt in diesen Arbeiten nicht mehr auf.

⁵Man beachte hierzu, dass in dieser Situation stets $g\left(\frac{\nabla v}{dt}, \gamma'\right) = 0 \in H^1(I, \mathbb{R})$

7.4 Das Theorem von Musso, Pejsachowicz und Portaluri

7.4.1 Der Spektralfluss für Wege Fredholm-quadratischer Formen

7.4.1 Definition. Es sei H ein Element aus $\mathfrak{Ob}(\mathbf{HILB}_{\mathbb{R}})$. Eine Abbildung $q : H \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Fredholm-quadratische Form**, falls ein die Topologie auf H erzeugendes Skalarprodukt und damit ein $B \in \mathcal{B}_F(H)$ mit

$$q(u) = B(u, u) \quad \forall u \in H$$

existiert.

Es bezeichne $Q_F(H)$ die Menge aller Fredholm-quadratischer Formen. Aus der Definition von $Q_F(H)$ ist unmittelbar einzusehen, dass dieser Raum kanonisch als Element von $\mathfrak{Ob}(\mathbf{BAN}_{\mathbb{R}})$ aufgefasst werden kann.

Zur Definition des Spektralflusses für Wege Fredholm-quadratischer Formen benötigt man insbesondere die Begriffe aus Abschnitt 4.3. Es sei H ein Element aus $\mathfrak{Ob}(\mathbf{HILB}_{\mathbb{R}})$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ zwei Skalarprodukte, deren Normen die gegebene Topologie auf H erzeugen. Wegen des Rieszschen Darstellungssatzes existiert nun ein bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ selbstadjungierter Operator $D \in \mathcal{L}(H)$ mit

$$\langle u, v \rangle_1 = \langle Du, v \rangle \quad \forall u, v \in H \tag{7.4.1}$$

Fasst man D als Operator $D : H_1 \rightarrow H$ auf und bezeichnet $\tilde{id} : H \rightarrow H_1$ die Identität, so erhält man aus

$$\langle \tilde{id}u, v \rangle_1 = \langle u, v \rangle_1 = \langle Du, v \rangle = \langle u, Dv \rangle$$

die Beziehung

$$D = \tilde{id}^* : H_1 \rightarrow H \tag{7.4.2}$$

Es sei nun $q_t : H \rightarrow \mathbb{R}$ ein Weg Fredholm-quadratischer Formen und $A : [a, b] \rightarrow \mathcal{S}(H)$, $B : [a, b] \rightarrow \mathcal{S}(H_1)$ Wege mit

$$q_t(u) = \langle A(t)u, u \rangle = \langle B(t)u, u \rangle_1$$

Dann ist aber wegen (7.4.1) und (7.4.2)

$$A_t = DB_t = \tilde{id}^* B_t \tilde{id}$$

und man erhält aus 4.3.26

$$\text{sf}(A, [a, b]) = \text{sf}(B, [a, b])$$

Damit ist folgende Definition möglich.

7.4.2 Definition. Der **Spektralfluss** eines Weges $q : [a, b] \rightarrow Q_F(H)$ mit nicht entarteten Endpunkten ist definiert durch

$$\text{sf}(q, [a, b]) = \text{sf}(A_q, [a, b])$$

wobei mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dessen Norm die Topologie von H induziert $A_{q(t)}$ der eindeutige selbstadjungierte Operator mit $\langle A_{q(t)}u, u \rangle = q(t)(u)$ für alle $u \in H$ sei.

Die Eigenschaften des Spektralflusses aus Abschnitt 4.3 übertragen sich mit dieser Definition offenbar recht direkt auf die Situation der quadratischen Formen.

7.4.3 Lemma. 1. Für $q \in C([a, b], Q_F(H))$ mit $q(t)$ nicht entartet für alle $t \in [a, b]$ ist $\text{sf}(q, [a, b]) = 0$.

2. Ist $M \in C([a, b], \mathcal{L}(H, H_1))$ ein Weg invertierbarer Operatoren zwischen den Hilberträumen H und H_1 und ist $p \in C([a, b], Q_F(H_1))$ definiert durch $p(t)(v) = q(t)(M(t)^{-1}v)$, so ist

$$\text{sf}(p, [a, b]) = \text{sf}(q, [a, b])$$

3. Für $h \in C([0, 1] \times [a, b], Q_F(H))$ mit $h(s, a), h(s, b)$ nicht entartet für alle $s \in [0, 1]$ ist

$$\text{sf}(h(0, \cdot), [a, b]) = \text{sf}(h(1, \cdot), [a, b])$$

4. Für $c \in (a, b)$ mit $q(c)$ nicht entartet ist

$$\text{sf}(q, [a, b]) = \text{sf}(q, [a, c]) + \text{sf}(q, [c, b])$$

Die eben genannte zweite Eigenschaft ermöglicht nun die Definition des Spektralflusses in einer etwas allgemeineren Situation. Es sei daran erinnert, dass jede Faser eines Hilbertbündels ein Objekt der Kategorie $\mathbf{HILB}_{\mathbb{R}}$ ist, aber kein kanonisches Skalarprodukt trägt.

7.4.4 Definition. Es sei \mathcal{H} ein Hilbertbündel über dem Intervall $[a, b]$. Eine **verallgemeinerte Familie Fredholm-quadratischer Formen** ist eine glatte Abbildung $q : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für jedes $t \in [a, b]$ die Einschränkung $q_t = q|_{H_t} \rightarrow \mathbb{R}$ auf die Faser H_t über t eine Fredholm-quadratische Form ist.

7.4.5 Definition. Es sei \mathcal{H} ein Hilbertbündel über $[a, b]$ mit Modell H und $q : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ eine verallgemeinerte Familie Fredholm-quadratischer Formen, so dass q_a und q_b nicht entartet sind. Dann definiert man den **Spektralfluss** von q durch

$$\text{sf}(q) = \text{sf}(\tilde{q}, [a, b])$$

wobei $\tilde{q}_t(u) = q_t(M_t u)$ mit einer Trivialisierung $M : [a, b] \times H \rightarrow \mathcal{H}$ von \mathcal{H} .

Es ist mit der oben genannten Eigenschaft (2) des Spektralflusses Fredholm-quadratischer Formen unmittelbar einsichtig, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Trivialisierung ist.

7.4.2 Der Spektralindex

In 6.3.6 wurde die Hessesche

$$\text{hess}_\gamma(\mathcal{A}_{pq}) : T_\gamma H_{pq}^1(I, M) \rightarrow \mathbb{R}$$

an einem kritischen Punkt des Wirkungsfunktionals als

$$\begin{aligned} \text{hess}_\gamma(\mathcal{A}_{pq})(\xi) &= \int_0^1 g \left(\frac{\nabla}{dx} \xi(x), \frac{\nabla}{dx} \xi(x) \right) dx \\ &\quad - \int_0^1 g(-R(\gamma'(x), \xi(x))\gamma'(x) + \nabla_{\xi(x)} \text{grad } V(x, \gamma(x)), \xi(x)) dx \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

berechnet. Das Ziel ist nun die unter Verwendung der Hesseschen gemachten Konstruktionen aus [MPP05] mittels der hier gegebenen Definition von $H^1(I, M)$ zu präsentieren⁶. Damit unterscheidet sich die Vorgehensweise hier etwas von der aus [MPP05].

Es seien $p, q \in M$ fest gewählt und γ eine nicht entartete p -Geodäte von p nach q . Man betrachte nun den von γ **kanonisch induzierten Weg** Γ in $H^1(I, M)$ definiert durch $\Gamma(t) = \gamma_t$ mit $\gamma_t(x) = \gamma(t \cdot x)$. Die Stetigkeit von Γ ist in einer Karte von $H^1(I, M)$ unmittelbar einzusehen. Aus der Gültigkeit der p -Geodätengleichung für γ erhält man

$$\frac{\nabla}{dx} \gamma'_t(x) + t^2 \text{grad } V(t \cdot x, \gamma_t(x)) = 0$$

und folglich ist γ_t ein kritischer Punkt der glatten Funktion $\mathcal{A}_t : H_{p, \gamma(t)}^1(I, M) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mathcal{A}_t(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 g(\gamma'(x), \gamma'(x)) dx - t^2 \int_0^1 V(t \cdot x, \gamma(x)) dx$$

Es bezeichne im Folgenden

$$\text{hess}_t(\mathcal{A}) : T_{\gamma_t} H_{p, \gamma(t)}^1(I, M) \rightarrow \mathbb{R}$$

die zugehörige quadratische Form der Hesseschen von \mathcal{A}_t an dem kritischen Punkt γ_t .

Man betrachte nun die in 6.2.43 als Submersion nachgewiesene Abbildung

$$F : H^1(I, M) \rightarrow M \times M, \quad F(\gamma) = (\gamma(a), \gamma(b))$$

Hieraus erhält man gemäß 2.2.4 als Kern der Sequenz

$$TH^1(I, M) \xrightarrow{T^*F} F^*(T(M \times M)) \rightarrow 0$$

⁶Bedauerlicherweise werden auch in [MPP05] nur recht vage Aussagen zur genauen Definition von $H^1(I, M)$ gemacht und unter anderem auf [Kli82] verwiesen

das Unterbündel $\ker T^*F$ von F . Unter der üblichen Identifikation ist unmittelbar einzusehen, dass der Totalraum dieses Bündels durch

$$\{\xi \in H^1(I, TM) : \xi(0) = 0, \xi(1) = 0\}$$

gegeben ist. Hiermit betrachte man nun das Pullbackbündel $\Gamma^* \ker T^*F$ über $[0, 1]$. Mit dem Resultat 6.3.6 kann leicht die Glattheit der Familie der Hesseschen $\{\text{hess}_t(\mathcal{A})\}_{t \in I}$ als Abbildung auf dem Totalraum des global trivialen Bündels $\Gamma^* \ker T^*F$ eingesehen werden.

Das Ziel ist nun die Darstellung dieser Abbildung bezüglich einer Trivialisierung dieses Bündels wie in der Definition 7.4.5. Hierzu sei zunächst an die Beschreibung der Karten des Tangentialbündels $TH^1(I, M)$ aus (6.2.12) erinnert. Diese Karten liefern nun direkt Trivialisierungen für $\Gamma^* \ker T^*F$, womit für jede einparametrische Familie $\varphi = (\varphi_t, U_t, \tilde{U}_t)$ für M mit $\text{graph}(\gamma) \subset U$ durch

$$I \times H_0^1(I, \mathbb{R}^n) \ni (t, \xi) \mapsto (d_{\gamma(t)}\varphi_t^{-1})\xi \in \Gamma^* \ker T^*F$$

eine globale Trivialisierung des Bündels gegeben ist. Um nun tatsächlich die gewünschte Darstellung obiger Familie der Hesseschen aus [MPP05] zu erhalten benötigt man noch einen weiteren Schritt.

7.4.6 Lemma. *Zu jeder p -Geodäte $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ existiert eine einparametrische Familie von Karten $\varphi = (\varphi_t, U_t, \tilde{U}_t)$, so dass $\text{graph}(\gamma) \subset U$ und*

$$e^i(t) = X_i(t, \gamma(t)) = d_{\gamma(t)}\varphi_t^{-1}e_i, \quad t \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n$$

Basisvektorfelder entlang γ wie in 6.1.7 sind.

Beweis. Hierfür ist der Beweis der Aussage 6.2.34 lehrreich. Da nun bereits eine p -Geodäte als glatte Kurve vorliegt, ist die dort gemachte Approximation in der gewählten Riemannschen Metrik nicht mehr notwendig, und es können analog zu den dort gemachten Konstruktionen Riemannsche Normalkoordinaten bezüglich der auf M gegebenen semi-Riemannschen Metrik entlang γ gewählt werden (vgl. hierzu [ONei83, S. 72-73]). Die gewünschte Parallelität kann unter Verwendung der Eigenschaften Riemannscher Normalkoordinaten nachgewiesen werden. \square

Mit

$$\tilde{\xi}(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{\xi}_i(x)e_i \in H_0^1(I, \mathbb{R}^n)$$

gewinnt man aus 6.3.6 bezüglich obiger Trivialisierung und unter Verwendung der Bezeichnungen

aus dem Abschnitt 6.1 eine Darstellung der Hesseschen

$$\begin{aligned}
& \text{hess}_t(\mathcal{A})(d_{\gamma(t \cdot x)} \varphi_{t \cdot x}^{-1} \tilde{\xi}) \\
&= \int_0^1 g \left(\frac{\nabla}{dx} \sum_{i=1}^n \tilde{\xi}_i(x) e^i(t \cdot x), \frac{\nabla}{dx} \sum_{i=1}^n \tilde{\xi}_i(x) e^i(t \cdot x) \right) dx \\
&- \int_0^1 g \left(-R \left(\gamma'_t(x), \sum_{i=1}^n \tilde{\xi}_i(t) e^i(t \cdot x) \right) \gamma'_t(x) + t^2 \nabla_{\sum_{i=1}^n \tilde{\xi}_i(t) e^i(t \cdot x)} \text{grad } V(t \cdot x, \gamma_t(x)) \right) dx \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\tilde{\xi}'_i(x))^2 dx \\
&- t^2 \int_0^1 \sum_{i=1}^n g(-R(\gamma'_t(t \cdot x), e^i(t \cdot x)) \gamma'_t(t \cdot x) + \nabla_{e^i(t \cdot x)} \text{grad } V(t \cdot x, \gamma(t \cdot x)), e^i(t \cdot x)) \tilde{\xi}_i(x)^2 dx \\
&= \langle J\tilde{\xi}, \tilde{\xi} \rangle_{H_0^1(I, \mathbb{R}^n)} - \langle S_t \tilde{\xi}, \tilde{\xi} \rangle_{L^2(I, \mathbb{R}^n)}
\end{aligned} \tag{7.4.4}$$

wobei mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 6.1

$$S_t(x) = t^2 S(t \cdot x), \quad t, x \in [0, 1] \tag{7.4.5}$$

In dieser Form wird die Hessesche in [MPP05] verwendet (vgl. hierzu die Formel (5.1) in [MPP05]), womit dies schließlich aus den hier gemachten Betrachtungen zu $H^1(I, M)$ gerechtfertigt ist.

Entscheidend ist nun

7.4.7 Satz. $\{\text{hess}_t(\mathcal{A})\}_{t \in I}$ ist eine verallgemeinerte Familie Fredholm-quadratischer Formen.

Beweis. Wegen (7.4.4) besitzt für jedes $t \in [0, 1]$ die entsprechende Hessesche eine Darstellung

$$\text{hess}_t(\mathcal{A})(\tilde{\xi}) = \langle J\tilde{\xi}, \tilde{\xi} \rangle_{H_0^1} - \langle S_t \tilde{\xi}, \tilde{\xi} \rangle_{L^2}$$

Da die von J auf $H_0^1(I, \mathbb{R}^n)$ induzierte Abbildung ein topologischer Isomorphismus ist, ist die Riesz-Darstellung des ersten Summanden der quadratischen Form ein Element in $GL(H_0^1(I, \mathbb{R}^n))$. Der zweite Summand ist die Einschränkung einer stetigen quadratischen Form von $C(I, \mathbb{R}^n)$ auf $H_0^1(I, \mathbb{R}^n)$. Wegen der Kompaktheit der Einbettung $\iota : H^1(I, \mathbb{R}^n) \hookrightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$ (vgl. 6.2.14) ist damit aber diese quadratische Form auf $H_0^1(I, \mathbb{R}^n)$ schwach stetig und man erhält die Behauptung aus 2.3.10. \square

Wegen 6.3.7 ist nun h_t genau dann nicht entartet, wenn 1 nicht konjugiert für γ_t ist. Desweiteren ist mit (7.4.5) stets $S_0 = 0$ und folglich mit (7.4.4) offenbar auch h_0 nicht entartet.

Hiermit kann man den später im vierten Abschnitt dieser Arbeit zentralen Begriff definieren.

7.4.8 Definition. Der **Spektralindex** einer nicht entarteten p-Geodäte $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ ist definiert als

$$i_{\text{spec}}(\gamma) = -\text{sf}(\{\text{hess}_t(\mathcal{A})\}_{t \in I})$$

Aus der Definition des Spektralflusses für verallgemeinerte Familien Fredholm-quadratischer Formen ist damit insbesondere auch die Unabhängigkeit von der hier speziell gewählten Trivialisierung von $\Gamma^* \ker T^*F$ sichergestellt.

Eine besonders wichtige Bemerkung ist die Übereinstimmung mit dem Morse Index im Fall einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

7.4.9 Lemma. *Für eine nicht entartete p-Geodäte γ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist*

$$i_{spec}(\gamma) = i_{Morse}(\gamma)$$

Beweis. Den Beweisen zu 7.4.7 und 2.3.10 entnimmt man, dass im Fall einer Riemannschen Mannigfaltigkeit der Weg darstellender Operatoren der Familie der Hesseschen eine Weg kompakter Störungen der Identität ist. Die Behauptung folgt aus 4.3.34 \square

7.4.3 Der konjugierte Index

Da γ_t eine p-Geodäte bezüglich des Potentials $V_t(x, p) = V(t \cdot x, p)$ ist, erhält man als zugehörige Jacobi-Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{\nabla^2}{dx^2} \xi(x) + R(\gamma'_t(x), \xi(x)) \gamma'_t(x) + \nabla_{\xi(x)} \text{grad } V_t(x, \gamma_t(x)) \\ &= \frac{\nabla^2}{dx} \xi(x) + t^2 (R(\gamma'(t \cdot x), \xi(x)) \gamma'(t \cdot x) + \nabla_{\xi(x)} \text{grad } V(t \cdot x, \gamma(t \cdot x))) \end{aligned}$$

Wählt man nun wie in Abschnitt 6.1.7 Basisvektorfelder $\{e^1(x), \dots, e^n(x)\}$ entlang γ , so induzieren diese wie in der Rechnung zu (7.4.4) Basisvektorfelder $\{e^1(t \cdot x), \dots, e^n(t \cdot x)\}$ entlang γ_t . Mit diesen erhält man durch eine zu der in Abschnitt 6.1 präsentierten beziehungsweise zu (7.4.4) analogen Rechnung eine Familie von Differentialgleichungen

$$Ju''(x) + S_t(x)u(x) = 0$$

wobei $S_t(x) = t^2 S(t \cdot x)$ für $t, x \in [0, 1]$, $S(t, x) = S_t(x)$ in $[0, 1] \times [0, 1]$ glatt ist und mit 6.1.8 $S_t^* = S_t$ für alle $t \in [0, 1]$.

Mit diesen Überlegungen induziert also eine solche Wahl von Basisvektorfeldern eine Bijektion zwischen der Menge aller Lösungen $u = (u_1, \dots, u_n)$ des Randwertproblems

$$Ju''(x) + S_t(x)u(x) = 0. \quad u(0) = u(1) = 0 \tag{7.4.6}$$

und Jacobi-Feldern entlang γ_t die bei 0 und 1 verschwinden. Diese Menge ist offenbar bijektiv zur Menge aller Jacobi-Felder entlang γ die bei 0 und t verschwinden. Insgesamt ist also $t \in (0, 1]$ genau dann ein konjugierter Punkt, wenn (7.4.6) eine nicht triviale Lösung besitzt.

Um diese Beobachtung zu verwenden, wird das Randwertproblem komplexifiziert.

Es sei \mathcal{O} das beschränkte Gebiet in der komplexen Zahlenebene definiert durch

$$\mathcal{O} = \{z = t + i \cdot s \in \mathbb{C} : 0 < t < 1, -1 < s < 1\}$$

Man betrachte nun für jedes $z = t + i \cdot s \in \mathcal{O}$, $x \in I$ die Matrix

$$S_z(x) = S_t(x) + i \cdot s \cdot id$$

Hiermit verallgemeinert sich (7.4.6) zu einer komplexen Differentialgleichung

$$Ju''(x) + S_z(x)u(x) = 0 \tag{7.4.7}$$

Mit $v = Ju'$ transformiert sich diese Gleichung auf das komplexe System erster Ordnung

$$w'(x) = H_z(x)w(x) \tag{7.4.8}$$

wobei $w = (u, v) : I \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$ und

$$H_z(x) = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -S_z(x) & 0 \end{pmatrix}$$

Es sei nun $\psi_z(x)$ die Fundamentallösung des Systems (7.4.8), also die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \psi'_z(x) = H_z(x)\psi_z(x) \\ \psi_z(0) = id \end{cases}$$

Mit der Zerlegung von $\psi_z(x)$ in Blöcke

$$\psi_z(x) = \begin{pmatrix} a_z(x) & b_z(x) \\ c_z(x) & d_z(x) \end{pmatrix}$$

bezeichne im Folgenden $b_z = b_z(1)$.

Desweiteren betrachte man für jedes $z \in \mathcal{O}$ den zu der Differentialgleichung (7.4.7) gehörigen Differentialoperator

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_z : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset L^2(I, \mathbb{C}^n) &\rightarrow L^2(I, \mathbb{C}^n) \\ \mathcal{A}_z u(x) &= Ju''(x) + S_z(x)u(x) \end{aligned} \tag{7.4.9}$$

mit $\mathcal{D}(\mathcal{A}_z) = H^2(I, \mathbb{C}^n) \cap H_0^1(I, \mathbb{C}^n)$. Es ist durchaus bekannt, dass dieser Operator selbstadjungiert ist (vgl. [GGK90, Chapter XVI]).

Zur Definition des konjugierten Index wird man nun durch folgendes Lemma geführt.

7.4.10 Lemma. *Es sind äquivalent:*

- (a) $\ker \mathcal{A}_z \neq \{0\}$
- (b) $\operatorname{Im}(z) = 0$ und $t = \operatorname{Re}(z)$ ist konjugiert für die reelle Differentialgleichung (7.4.6)
- (c) $\det b_z = 0$

Beweis. Gilt (a), so ist zunächst offenbar $\text{Im}(z) = s = 0$, da das Spektrum eines selbstadjungierten Operators stets reell ist. Da aber für jedes Element aus $\ker \mathcal{A}_t$ Real- und Imaginärteil eine Lösung des Randwertproblems (7.4.6) sind, ist damit t konjugiert. Die Umkehrung ist klar. Folglich sind (a) und (b) äquivalent.

Ist nun $\det b_z \neq 0$ und $u \in \ker \mathcal{A}_z$, so ist für die zugehörige Lösung $w(x) = (u(x), v(x))$ des Systems

$$w(1) = \begin{pmatrix} u(1) \\ v(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_z(1) & b_z(1) \\ c_z(1) & d_z(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

und mit $u(0) = u(1) = 0$ erhält man $b_z v(0) = b_z J u'(0) = 0$ und folglich ist wegen $\det b_z \neq 0$ auch $u'(0) = 0$. Damit ist insgesamt $u \equiv 0$, also $\ker \mathcal{A}_z = 0$. Zum Beweis der Umkehrung sei $\det b_z = 0$ und man wähle $0 \neq v_0 \in \ker b_z$. Mit $w_0 = (0, v_0)$ ist nun

$$\psi_z(x)w_0 = \begin{pmatrix} b_z(x)v_0 \\ d_z(x)v_0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung des Systems (7.4.8) und folglich $u(x) = b_z(x)v_0$ eine Lösung von (7.4.7), wobei wegen $b_z(0) = 0$

$$u(0) = u(1) = 0$$

Da aber $u \neq 0$ erhält man schließlich $\ker \mathcal{A}_z \neq 0$. □

Man definiere nun eine Abbildung

$$\rho : \overline{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{durch} \quad \rho(z) = \det b_z \tag{7.4.10}$$

Ist γ eine nicht entartete p-Geodäte, so ist $\ker \mathcal{A}_0 = \ker \mathcal{A}_1 = \{0\}$ und mittels des vorherigen Lemmas ist damit $0 \notin \rho(\partial \mathcal{O})$. Mit den in Abschnitt 3 gemachten Betrachtungen kann man nun die folgende Definition geben.

7.4.11 Definition. Der **konjugierte Index** einer nicht entarteten p-Geodäte ist definiert durch

$$i_{con}(\gamma) = -\deg(\rho, \mathcal{O}, 0)$$

Aus den grundlegenden Eigenschaften des Brouwerschen Abbildungsgrades erhält man hierbei die Unabhängigkeit von der speziellen Wahl des Gebietes $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ mit $[0, 1] \subset \mathcal{O}$

7.4.4 Das Morse Index Theorem

Mit den bisher gegebenen Definitionen ist die genaue Formulierung des Morse Theorems nun bereits zu vermuten. Dennoch kann aber zu den bisherigen Überlegungen auch noch der Maslov Index eingebracht werden. Hierzu betrachte man mit den Bezeichnungen des vorigen Abschnittes den Weg

$$\psi_t = \psi_t(1), \quad t \in [0, 1]$$

Wie in Abschnitt 5.4 verläuft dieser Weg in $Sp(n, \mathbb{R})$ und mit der Wahl von $L_0 = \{0\} \oplus \mathbb{R}^n$ erhält man nun aus der Definition von ψ_t zusammen mit 5.4.3 unmittelbar, dass $t \in (0, 1]$ genau dann konjugiert ist, wenn $\psi_t(L_0) \cap L_0 \neq \{0\}$. Man beachte hierbei, dass im Gegensatz zur Darstellung in Abschnitt 5.4 hier stets $\psi_0(L_0) \cap L_0 = \{0\}$ und da für eine nicht entartete p-Geodäte nach Voraussetzung zudem $\psi_1(L_0) \cap L_0 = \{0\}$ ist der Maslov Index $i_{Maslov}(\gamma)$ dieser Kurve definierbar. Mit dieser abschließenden Definition kann nun das Indextheorem formuliert werden.

7.4.12 Satz. *Es sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, $V : I \times M \rightarrow \mathbb{R}$ ein glattes Potential und $\gamma : I \rightarrow M$ eine nicht entartete perturbierte Geodäte. Dann ist*

$$i_{spec}(\gamma) = i_{con}(\gamma) = i_{maslov}(\gamma)$$

Ist γ zudem regulär, so ist

$$i_{spec}(\gamma) = i_{con}(\gamma) = i_{maslov}(\gamma) = \sum_{x \in (0, 1)} \text{sgn}(g|_{\mathcal{I}[x]^\perp})$$

Es sollen abschließend noch zwei Bemerkungen gemacht werden.

7.4.13 Bemerkung. Der Beweis des Index Theorems beruht auf durchaus komplizierten funktionalanalytischen Techniken. Ein besonders wichtiges Hilfsmittel hierbei ist eine Arbeit zum Spektralfluss von Robbin und Salamon ([RS95]), die in [FPR99] auf die dort gegebene Definition des Spektralflusses übertragen wurde. Hiermit kann zur Berechnung des Spektralflusses der Familie der Hesseschen aus (7.4.4) die Familie der durch (7.4.6) gegebenen Differentialoperatoren $\tilde{\mathcal{A}}$ auf $H^2(I, \mathbb{R}^n) \cap H_0^1(I, \mathbb{R}^n)$ betrachtet werden. Es ist hierbei $\tilde{\mathcal{A}}_t^C = \mathcal{A}_t$ mit dem selbstadjungierten Differentialoperator (7.4.9). Diese Familie wird durch eine additive Perturbation $\tilde{\mathcal{A}}_t^\delta = \tilde{\mathcal{A}}_t + \delta id$ in eine generische Situation versetzt, mit der $\ker \tilde{\mathcal{A}}_t^\delta \neq \{0\}$ für eine lediglich endliche Anzahl an Punkten $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{O}$. Definiert man nun für jeden dieser Punkte eine quadratische Form durch

$$\Gamma(\tilde{\mathcal{A}}^\delta, t_j) = \int_0^1 \left\langle \frac{d}{dt} S_t(x) \cdot, \cdot \right\rangle dx \Big|_{\ker \tilde{\mathcal{A}}_{t_j}^\delta}$$

so ist letztlich wegen der Resultate aus [RS95]

$$i_{spec}(\gamma) = - \sum_{j=1}^k \text{sgn}(\Gamma(\tilde{\mathcal{A}}^\delta, t_j))$$

Zur Behandlung des konjugierten Index kann mit dem Operator (7.4.9) für $z = t + i \cdot s$, so dass \mathcal{A}_z^{-1} definiert und beschränkt ist

$$d\mathcal{A}_z \mathcal{A}_z^{-1} := \frac{\partial}{\partial t} S_z \mathcal{A}_z^{-1} dt + i \frac{\partial}{\partial s} S_z \mathcal{A}_z^{-1} ds$$

definiert werden. Hiermit kann der konjugierte Index als Kurvenintegral

$$i_{con}(\gamma) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{O}} \text{tr}(d\mathcal{A}_z \mathcal{A}_z^{-1}) \quad (7.4.11)$$

dargestellt werden. Wegen der topologischen Natur des Brouwerschen Abbildungsgrades kann nun obige Störung von $\tilde{\mathcal{A}}_t$ ohne Veränderung des Abbildungsgrades auf diese Situation angewendet werden, und man erhält unter Verwendung der elementaren Eigenschaften des Abbildungsgrades

$$i_{con}(\gamma) = - \sum_{j=1}^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_j} \text{tr}(d\mathcal{A}_z^\delta (\mathcal{A}_z^\delta)^{-1})$$

wobei D_j hinreichend kleine Kreisscheiben um t_j sind. Es genügt also schließlich die Gleichheit der einzelnen Summanden zu zeigen, was sich als rein funktionalanalytisches Problem herausstellt, allerdings trotz dieser Reduktion auf einen einfach erscheinenden Fall durchaus mit erheblichem Aufwand verbunden ist.

7.4.14 Bemerkung. Mit dem Index Theorem von Musso, Pejsachowicz und Portaluri ist der Begriff des Spektralflusses in die Theorie semi-Riemannscher Geodäten eingebracht worden. Das wesentliche Resultat der Arbeit [FPR99] besteht neben einer alternativen Definition des Spektralflusses in der Anwendung auf gewisse Bifurkationen von Operatorfamilien. Hierauf hat die Diskussion des Spektralflusses in [MPP05] und [PPT04] die Möglichkeit gegeben "Bifurkationen von Geodäten" zu untersuchen:

7.4.15 Definition. Es sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine Geodäte. Ein Punkt $t_0 \in (a, b)$ heißt **Bifurkationspunkt** für γ , falls eine Folge $\gamma_n : [a, b] \rightarrow M$ von Geodäten in M und eine Folge $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (a, b)$ existiert, so dass

1. $\gamma_n(a) = \gamma(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. $\gamma_n(t_n) = \gamma(t_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
3. $\gamma'_n(a) \rightarrow \gamma'(a)$, $n \rightarrow \infty$.
4. $t_n \rightarrow t_0$, $n \rightarrow \infty$.

Man beachte, dass wegen (2) und (4) auch $\gamma_n(t_n) \rightarrow \gamma(t_0)$ für $n \rightarrow \infty$. Zudem erhält man aus dem Umkehrsatz, dass jeder Bifurkationspunkt bereits ein konjugierter Punkt ist und im Rahmen der klassischen Indextheoreme kann auch die Umkehrung dieser Aussage gezeigt werden. Für die allgemeine Theorie semi-Riemannscher Geodäten stellt sich diese Definition aber als besonders interessant heraus, da man zeigen kann, dass eine Veränderung der im Morse Index Theorem zu einer Geodäte zugeordneten Indizes auf einem Teilstück der Geodäte bewirken, dass innerhalb des Teilstückes ein Bifurkationspunkt aufzufinden ist. Die Indizes im Morse Index Theorem berücksichtigen nach Definition nicht jeden konjugierten Punkt entlang der betrachteten Geodäte. Mit diesem Resultat ist aber zumindest eine Teilmenge der konjugierten Punkte bestimmt, die eine geometrisch anschauliche Bedeutung haben und auf deren Existenz aus den Indizes des Morse Index Theorems geschlossen werden kann. Damit ist die Untersuchung solcher Bifurkationen in das Interesse der semi-Riemannschen Geometrie gerückt (vgl. z.B. auch [PP05], [GGP04]).

Teil IV

Der Spektralindex als Windungszahl

Kapitel 8

Alternative Definition des Spektralflusses

In diesem Kapitel werden die in Abschnitt 4.2 dargestellten Erkenntnisse zur Topologie gewisser Räume von Operatoren aus dem zweiten Teil der Arbeit zu einer weiteren Definition des Spektralflusses verwendet. Hierzu wird in einem ersten Abschnitt zunächst ein kurzer Überblick über die Resultate gegeben, an denen diese Darstellung orientiert ist. Anschließend wird mit der verallgemeinerten Windungszahl ein für diese Definition des Spektralflusses wesentliches Hilfsmittel definiert, bevor schließlich die eigentliche nun topologische Definition des Spektralflusses im letzten Abschnitt dieses Kapitels betrachtet wird.

8.1 Ein kurzer Überblick über Resultate von Booss und Wojciechowski

In [BW85] wird im ersten Kapitel eine auf [APS76] aufbauende, aber von den bisherigen Definitionen abweichende Darstellung des Spektralflusses für geschlossene Wege selbstadjungierter total indefiniter Fredholmoperatoren auf komplexen Hilberträumen gegeben. Die grundlegende Veränderung besteht in der Ausnutzung der Bijektivität der Abbildungen aus 4.2.12, was nun bei Betrachtung der Fundamentalgruppe von grosser Bedeutung ist. Da dies die grundlegende Idee für sämtliche folgende Ergebnisse zum Spektralfluss ist, sollen die Konstruktionen hier zunächst skizziert werden. Um die Darstellung etwas zu vereinfachen sei angenommen das jeder betrachtete Weg $A : S^1 \rightarrow \hat{\mathcal{F}}$ stets $A(0) = A(1) \in \mathcal{J}$ erfüllt.

Grundlage sind die Deformationen aus dem Abschnitt 4.2.2. Mit ihnen lässt sich jeder Abbildung $A : S^1 \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ eine Abbildung $g : (S^1, 1) \rightarrow (U(n), id)$ zuweisen, mit der kanonisch ein Element

$$\text{a-ind}(A) \in K^{-1}(S^1)$$

definiert werden kann. Wegen der Verwendung von Homotopieäquivalenzen hängt hierbei $\text{a-ind } A$ insbesondere nur von der Homotopieklasse in $\pi_1(\hat{\mathcal{F}}_*, J)$ ab. Desweiteren liefert einem aber der Chern-Charakter einen Isomorphismus

$$\text{ch} : K^{-1}(S^1) \rightarrow H^1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

wobei die Identifizierung mit \mathbb{Z} durch Auswerten auf der Fundamentalklasse bezüglich der kanonischen Orientierung von S^1 gegeben ist. Der Chern-Charakter lässt sich beschreiben als Windungszahl $\text{deg}(g)$, wobei die Abbildung $g : S^1 \rightarrow U(n)$ zunächst zu einer Abbildung $\tilde{g} : S^1 \rightarrow S^1$ deformiert wird. Hiermit erhält man schließlich ein Diagramm von Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\hat{\mathcal{F}}_*, J) & \longrightarrow & \pi_1(S^1, 1) \\ \text{a-ind} \downarrow & & \downarrow \text{deg} \\ K^{-1}(S^1) & \xrightarrow{\text{ch}} & \mathbb{Z} \end{array}$$

und durch Auswerten der Abbildung für einen besonders handlichen Erzeuger von $\pi_1(\hat{\mathcal{F}}_*, J)$ erhält man schließlich das fundamentale Resultat

$$\text{sf}(A_t) = \text{deg}(g) = \text{ch}(\text{a-ind}(A_t))[S^1]$$

womit der Spektralfluss zum einen als Windungszahl einer Abbildung $S^1 \rightarrow S^1$ beschrieben werden kann, andererseits (und das ist der entscheidende Punkt in der Arbeit von Booss und Wojciechowski) aber auch als virtuelles Bündel über S^2 . In der (späteren) Arbeit von Phillips [Phi96] wird zudem analog die Darstellbarkeit des Spektralflusses als Windungszahl wie eben beschrieben im komplexen Fall bemerkt.

8.2 Verallgemeinerte Windungszahl

Es sei H ein komplexer Hilbertraum und man betrachte den im Abschnitt 4.1 definierten Raum

$$U(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(n) \quad \text{mit} \quad U(n) = \{U = id + A \in \mathcal{U}(H) : A \in \mathcal{L}(H_n)\}$$

Für $U = id + A \in U(\infty)$ bezeichne

$$\text{tr}(U - id) = \sum_j \lambda_j(A), \quad \det(U) = \prod_j (1 + \lambda_j(A))$$

die **Spur** und die **Determinante** (vgl. hierzu etwa [GGK90]). Diese Ausdrücke können bekanntlich für jeden Operator endlichen Ranges definiert werden, es ist aber ebenso bekannt, dass man durch sie bei Verwendung der Normtopologie im Allgemeinen keine stetigen Abbildungen erhält. Dieser Mangel wird nun durch die hier vorliegende schwache Topologie behoben.

8.2.1 Lemma. $\det : U(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ und $\text{tr} : U(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ sind stetig.

Beweis. Wegen der schwachen Topologie auf $U(\infty)$ genügt es die Stetigkeit der Abbildungen auf jedem der Räume $U(n)$ zu zeigen, die nach Definition weiterhin die von der Normtopologie induzierten Topologien tragen. Ist nun $A \in U(n)$ gegeben, so findet man wegen 1.2.14 aber zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $B \in U(n)$ mit $\|B - A\| < \delta$ stets

$$\max_{\mu \in \sigma(B), \lambda \in \sigma(A)} |\mu - \lambda| < \varepsilon$$

womit die Stetigkeit der Abbildungen auf $U(n)$ unmittelbar einzusehen ist. □

Hiermit induziert die Determinante nun einen Homomorphismus

$$\det_* : \pi_1(U(\infty), id) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$$

und nach Komposition mit dem durch die gewöhnliche Windungszahl gegebenen Isomorphismus $\text{deg} : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ kann man definieren

8.2.2 Definition. Die Abbildung

$$w : \pi_1(U(\infty), id) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad w = \text{deg} \circ \det_*$$

heißt die **verallgemeinerte Windungszahl**.

8.2.3 Lemma. Die verallgemeinerte Windungszahl ist ein Isomorphismus.

Beweis. Wegen $\pi_1(U(\infty), id) \cong \mathbb{Z}$ genügt es einen geschlossenen Weg γ durch id mit $w(\gamma) = 1$ anzugeben. Hierfür seien mit der zur Definition von $U(\infty)$ gewählten Orthonormalbasis $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

- P_1 die Orthogonalprojektion auf $\text{span}\{e_k : k \neq 0\}$
- P_0 die Orthogonalprojektion auf $\text{span}\{e_0\}$

Man betrachte den Weg

$$\gamma : [-1, 1] \rightarrow U(\infty), \quad \gamma(t) = P_1 + e^{\pi i(1+t)} P_0$$

Damit ist aber offenbar

$$\det(\gamma(t)) = e^{\pi i(1+t)} \in S^1, \quad t \in [-1, 1]$$

womit insgesamt $w(\det \circ \gamma) = 1 \in \mathbb{Z}$. □

Es soll eine weitere Darstellung der verallgemeinerten Windungszahl angegeben werden.

8.2.4 Lemma. *Es sei $A \in \pi_1(U(\infty), id)$ ein Weg mit $A \in C^1([0, 1], U(\infty))$. Dann ist*

$$w(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \text{tr}(A^{-1}(t)A'(t))dt$$

Beweis. Wegen der schwachen Topologie auf $U(\infty)$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A([0, 1]) \subset U(n)$ und nach Definition der Determinante kann nun jedes $A(t)$ als gewöhnliche $n \times n$ -Matrix aufgefasst werden. Ist nun $A(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))$ mit den Spaltenvektoren $b_i(t)$ der Matrix, so ist zunächst

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det A(t) &= \sum_{i=1}^n \det(b_1(t), \dots, b'_i(t), \dots, b_n(t)) \\ &= \det(A(t)) \sum_{i=1}^n \det(A(t)^{-1}(b_1(t), \dots, b'_i(t), \dots, b_n(t))) \\ &= \det(A(t)) \sum_{i=1}^n \det(e_1, \dots, (A(t)^{-1}b'_i(t))_i, \dots, e_n) \\ &= \det(A(t)) \sum_{i=1}^n (A(t)^{-1}A'(t))_{ii} \\ &= \det(A(t)) \text{tr}(A(t)^{-1}A'(t)) \end{aligned}$$

Nach Definition der verallgemeinerten Windungszahl ist nun die gewöhnliche Windungszahl der Funktion

$$[0, 1] \ni t \mapsto \det(A(t)) \in S^1$$

zu berechnen. Nach Definition der Windungszahl erhält man aber

$$w(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{1}{\det A(t)} \frac{d}{dt} \det A(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \text{tr}(A(t)^{-1}A'(t))dt$$

□

8.2.5 Bemerkung. In dem im vorigen Abschnitt erwähnten Artikel [BW85] wird statt der hier verwendeten Determinante jedes Element $g \in \pi_1(U(\infty))$ in eine Abbildung $S^1 \rightarrow U(1) \simeq S^1$ deformiert, womit die gleiche Abbildung auf $\pi_1(U(\infty))$ erhalten wird. Die hier gewählte Definition der verallgemeinerten Windungszahl entstammt natürlich der analogen Definition des Isomorphismus $\pi_1(U(n)) \cong \mathbb{Z}$.

8.3 Übertragung auf allgemeine Wege reeller Fredholmoperatoren auf reellen Hilberträumen

Das Ziel folgender Konstruktionen ist die Übertragung der in 8.1 skizzierten Ideen auf nicht notwendig geschlossene Wege selbstadjungierter total indefiniter Fredholmoperatoren in reellen Hilberträumen. Hierzu sollen zwei mögliche Konstruktionen zur Behandlung nicht notwendig geschlossener Wege vorgestellt werden, die hier in Hinblick auf Anwendung auf den Spektralindex semi-Riemannscher Geodäten nur für reelle Hilberträume präsentiert werden, aber ebenso auch im komplexen Fall angewendet werden können.

Es sei von nun an H stets ein reeller Hilbertraum. Zudem sei an dieser Stelle noch einmal an den Basispunktraum

$$\mathcal{J} = \{J = 2P - 1 \in \mathcal{L}(H) : P \text{ Orthogonalprojektion, } \dim \ker(P) = \dim \operatorname{im}(P) = \infty\}$$

erinnert, dessen Kontrahierbarkeit bereits durch 4.2.17 gezeigt wurde. Im Folgenden werden die Bezeichnungen aus Abschnitt 4.2 übernommen.

Es erweist sich als sinnvoll zunächst die Übertragung der Ideen von Booss und Wojciechowski auf den reellen Fall zu erläutern. Man benötigt hierzu das folgende Resultat

8.3.1 Lemma. *Für jedes $J \in \mathcal{J}$ ist die kanonische Abbildung*

$$\iota_* : \pi_1(\hat{\mathcal{F}}(\infty), J) \rightarrow \pi_1(\hat{\mathcal{F}}(\infty), J^{\mathbb{C}})$$

ein Isomorphismus¹.

Beweis. Man betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\hat{\mathcal{F}}(\infty), J) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_1(\hat{\mathcal{F}}(\infty)^{\mathbb{C}}, J^{\mathbb{C}}) \\ & \searrow \text{sf} & \swarrow \text{sf} \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

Mit den Resultaten aus Abschnitt 4.2 bestehen von den Inklusionen induzierte Isomorphismen

$$\begin{aligned} \pi_1(\hat{\mathcal{F}}(\infty), J) &\cong \pi_1(\hat{\mathcal{F}}_*(H), J) \cong \mathbb{Z} \\ \pi_1(\hat{\mathcal{F}}(\infty), J^{\mathbb{C}}) &\cong \pi_1(\hat{\mathcal{F}}_*(H^{\mathbb{C}}), J^{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

womit sich nun mit 4.4.5 und der ersten Bemerkung in Abschnitt 4.6 die als Spektralfluss angegebenen Abbildungen in obigem Diagramm als Isomorphismen herausstellen. Die Behauptung folgt nun mit der wegen 4.6.1 gewährleisteten Kommutativität des Diagrammes. \square

¹Hier bezeichne $\hat{\mathcal{F}}(\infty)$ sowohl den entsprechenden Teilraum der selbstadjungierten Fredholmoperatoren auf H als auch auf $H^{\mathbb{C}}$!

Hiermit hat man eine Sequenz von Isomorphismen

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(\hat{\mathcal{F}}_*, J) & \longrightarrow & \pi_1(\hat{\mathcal{F}}(\infty), J) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_1(\hat{\mathcal{F}}(\infty), J^{\mathbb{C}}) & (8.3.1) \\
\cong \downarrow & & & & \downarrow \exp(\pi i(\cdot + id))_* \\
\mathbb{Z} & \xleftarrow{w} & \pi_1(U(\infty), id) & \xleftarrow{} & \pi_1(\tilde{U}(\infty), id)
\end{array}$$

in der die erste Abbildung der oberen Zeile durch die Deformationen aus Abschnitt 4.2.2 gegeben ist² und die erste Abbildung der unteren Zeile in 4.2.8 erläutert ist. Insbesondere sind die Umkehrabbildungen dieser Abbildungen von den Inklusionen induziert.

Zur Vereinfachung der Schreibweise bei der Behandlung der Sequenz (8.3.1) wird von nun an die Komplexifizierung eines Operators mit dem gleichem Symbol wie der Operator bezeichnet.

Um die Gleichheit des Isomorphismus (8.3.1) mit dem Spektralfluss nachzuweisen, genügt es die Gleichheit auf einem Erzeuger von $\pi_1(\hat{\mathcal{F}}_*, J)$ nachzuweisen.

Dazu betrachte man den Weg $L = L_1 * L_2 \in \pi_1(\hat{\mathcal{F}}_*, J)$, wobei

$$L_1 : [-1, 1] \rightarrow \hat{\mathcal{F}}(\infty), L_1(t) = P_+ - P_- + tP_0$$

mit Orthogonalprojektoren $P_+, P_-, P_0 \in \mathcal{L}(H)$ mit $P_+ + P_- + P_0 = id_H$, $P_+ - P_- - P_0 = J$ und $\dim \text{im } P_0 = 1$ sowie L_2 ein beliebiger Weg in \mathcal{J} ist, der $P_+ + P_0 - P_- \in \mathcal{J}$ und $P_+ - (P_- + P_0) \in \mathcal{J}$ verbindet. Nun ist aber wegen $\mathcal{J} \subset GL(H)$ mit 4.3.25 und 4.3.27

$$\begin{aligned}
\text{sf}(L) &= \text{sf}(L_1) \\
&= \dim(\text{im } E_-(L_1(-1)) \cap \ker E_-(L_1(1))) - \dim(\text{im } E_-(L_1(1)) \cap \ker E_-(L_1(-1))) = 1
\end{aligned}$$

Betrachtet man andererseits die Windungszahl, so ist aber mit $\exp(\pi i(L_2 + id)) \equiv id$

$$\begin{aligned}
[\exp(\pi i(L + id))] &= [\exp(\pi i(L_1 + id)) * \exp(\pi i(L_2 + id))] \\
&= [\exp(\pi i(L_1 + id))] \in \pi_1(\tilde{U}(\infty), J)
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\exp(\pi i(L_1(t) + id)) &= \exp(\pi i(P_+ - P_- + tP_0 + id)) = \exp(\pi i(P_+ - P_- - P_0 + (1+t)P_0 + id)) \\
&= \exp(\pi i(2P_+ - id + (1+t)P_0 + id)) = \exp(\pi i(2P_+ + (1+t)P_0)) \\
&= \exp(2\pi i P_+) \exp(\pi i(1+t)P_0) = \exp(\pi i(1+t)P_0) = id + (e^{\pi i(1+t)} - 1)P_0 \\
&= P_+ + P_- + e^{\pi i(1+t)}P_0
\end{aligned}$$

ist dieser Weg aber bereits ein Element in $\pi_1(U(\infty), J)$ und als solcher wurde seine Windungszahl bereits im Beweis von 8.2.3 berechnet. Man erhält damit

$$w([\exp(\pi i(L_1 + id))]) = 1 \in \mathbb{Z}$$

²Die Bekanntheit dieser Deformationen wird im Folgenden vorausgesetzt.

und folglich ist die Gleichheit der obigen Sequenz (8.3.1) von Isomorphismen mit dem Spektralfluss nachgewiesen und damit die Konstruktion von Booss und Wojciechowski auf den reellen Fall übertragen. Insbesondere ist die Sequenz damit unabhängig von der zur Definition von $U(\infty)$ benötigten Wahl einer Orthonormalbasis von H .

Es sei jetzt $L : [a, b] \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ ein Weg mit invertierbaren Endpunkten. Desweiteren werde für $T \in \hat{\mathcal{F}}_*$ mit $\tilde{T} \in \hat{\mathcal{F}}(\infty)$ stets das Bild dieses Elementes unter den der ersten Zeile der Sequenz (8.3.1) zugrundeliegenden Abbildungen bezeichnet. Es sollen nun zwei topologische Möglichkeiten der Berechnung des Spektralflusses vorgestellt werden.

Die Methode der unsichtbaren Schließung Hierzu wähle man einen beliebigen Weg $L_1 : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)$ mit $L_1(0) = L(b)$ und $L_1(1) = L(a)$, so dass ein $t_0 \in [0, 1]$ mit $L_1(t_0) \in \mathcal{J}$ existiert. Damit ist $L_c = L * L_1 : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ ein geschlossener Weg mit $L_c(I) \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ und der Spektralfluss dieses Weges kann folglich mittels der obigen topologischen Konstruktion berechnet werden. Wegen 4.3.25 ist $\text{sf}(L * L_1) = \text{sf}(L)$ und daher liefert dieses Vorgehen den Spektralfluss des ursprünglichen Weges L und ist zudem unabhängig von der speziellen Wahl der **unsichtbaren Schließung** L_1 .

Somit ist prinzipiell die Möglichkeit der topologischen Darstellung des Spektralflusses für nicht notwendig geschlossene Wege gegeben. Es ist aber unmittelbar einsichtig, dass dieses Vorgehen in Hinblick der zu wählenden unsichtbaren Schließung im Allgemeinen nicht sonderlich ökonomisch ist. Der Aufwand hierfür kann aber durch eine einfache Überlegung deutlich verringert werden.

Die Methode der reduzierten unsichtbaren Schließung Man wähle beliebige Elemente $J_1, J_2 \in \mathcal{J}$ und Wege $L_1, L_2 : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)$ mit $L_1(0) = J_1, L_1(1) = L(a), L_2(0) = L(b), L_2(1) = J_2$. Der zusammengesetzte Weg $L_{rc} = L_1 * L * L_2$ heiße eine **reduzierte unsichtbare Schließung** von L . Eine entscheidende Beobachtung ist nun, dass der Raum \mathcal{J} unter sämtlichen in der oberen Zeile der Sequenz (8.3.1) vorzunehmenden Deformationen fest bleibt, so dass also $\tilde{J} = J^c$ für alle $J \in \mathcal{J}$. Damit definiert insbesondere bereits $\exp(i\pi(\widetilde{L_{rc}} + id))$ ein Element in $\pi_1(\tilde{U}(\infty), id)$ und die Behauptung ist nun, dass dieses Element unter den verbleibenden Isomorphismen der Sequenz (8.3.1) bereits den Spektralfluss der ursprünglichen Familie L liefert.

Aus der Methode der unsichtbaren Schließung erhält man zunächst, dass mit einem beliebigen Weg $L_3 : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)$ mit $L_3(0) = L_{rc}(1) = J_2, L_3(1) = L_{rc}(0) = J_1$ die Anwendung der Abbildungen aus (8.3.1) auf $L_{rc} * L_3$ den Spektralfluss von L liefern. Wegen des Wegzusammenhangs von \mathcal{J} kann aber der Weg L_3 ganz in \mathcal{J} verlaufend gewählt werden, und wird in diesem

Fall vollständig auf $id \in \tilde{U}(\infty)$ abgebildet. Damit ist

$$\begin{aligned} [\exp(\pi i(\widetilde{L_{rc} * L_3 + id}))] &= [\exp(\pi i(\widetilde{L_{rc} + id}) * \exp(\pi i(L_3 + id)))] \\ &= [\exp(\pi i(\widetilde{L_{rc} + id})] \in \pi_1(\tilde{U}(\infty), id) \end{aligned}$$

und folglich der Spektralfluss von L bereits durch Anwendung des verbleibenden Teils der Sequenz auf $[\exp(\pi i(\widetilde{L_{rc} + id})] \in \pi_1(\tilde{U}(\infty), id)$ gegeben. Insbesondere ist die Konstruktion damit auch unabhängig von den gewählten Wegen L_1 und L_2 .

Aus dieser Konstruktion erhält man eine Folgerung die es sich lohnt gesondert zu formulieren.

8.3.2 Bemerkung. Für jeden Weg $L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)$ mit $L(0), L(1) \in \mathcal{J}$ ist

$$[\exp(\pi i(\tilde{L} + id))] = id \in \pi_1(\tilde{U}(\infty), id)$$

Wegen der Überlegungen zur reduzierten unsichtbaren Schließung ist das Element $[\exp(\pi i(\widetilde{L_{rc} + id}))] \in \pi_1(\tilde{U}(\infty), id)$ unabhängig von den gewählten Wegen L_1 und L_2 . Hiermit ist folgende Definition sinnvoll.

8.3.3 Definition. Es sei $L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ ein Weg mit invertierbaren Endpunkten. Mit einer reduzierten unsichtbaren Schließung L_{rc} von L heiße

$$[\exp(\pi i(\widetilde{L_{rc} + id}))] \in \pi_1(\tilde{U}(\infty), id)$$

die **Spektralklasse** von L .

Damit ist also jedem Weg ein Element in $\pi_1(\tilde{U}(\infty), id)$ zugeordnet, das durch den Spektralfluss der Familie bestimmt ist. Man kann nun 8.2.4 anwenden und so eine Integraldarstellung für den Spektralfluss erhalten.

8.3.4 Folgerung. Es sei $L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ ein Weg mit invertierbaren Endpunkten und es bezeichne $\hat{L} \in \pi_1(\tilde{U}(\infty), id)$ die Spektralklasse von L . Mit dem Isomorphismus $\pi_1(\tilde{U}(\infty), id) \cong \pi_1(U(\infty), id)$ ist dieser Weg homotop zu einem geschlossenen Weg $\hat{L} : [0, 1] \rightarrow U(n)$, der zudem nach weiterer Deformation als glatt angenommen werden kann. Dann ist

$$\text{sf}(L) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \text{tr}(\hat{L}^{-1}(t)\hat{L}'(t))dt$$

8.3.5 Bemerkung. In der Darstellung des Spektralflusses mittels (8.3.1) sind zur Bildung der reduzierten unsichtbaren Schließung zwei Wege zu wählen, die jeweils einen Endpunkt des betrachteten Weges mit einem Element in \mathcal{J} verbinden. Die Existenz dieser Wege erhält man unmittelbar aus dem Wegzusammenhang von $\hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)$, bisher ist aber keinerlei Bemerkung zu ihrer Konstruktion gemacht worden. Eine Möglichkeit besteht darin den zu betrachtenden Weg zunächst den notwendigen Deformationen zu unterwerfen, so dass er sich in $\hat{\mathcal{F}}(\infty)$ befindet.

Betrachtet man nun einen der invertierbaren Endpunkte dieses Weges³, so kann wegen der Offenheit der Resolventenmenge eine Homotopie $H : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gewählt werden, die das gesamte Spektrum dieses Operators auf das aus 1 und -1 bestehende essentielle Spektrum des Operators deformiert. Eine solche Homotopie induziert einen Weg in $\hat{\mathcal{F}}(\infty)$ der den betrachteten Endpunkt des deformierten Weges mit \mathcal{J} verbindet. Aus der Definition der reduzierten unsichtbaren Schließung ist unmittelbar einzusehen, dass die Verwendung dieser Wege ebenfalls die Spektralklasse des ursprünglichen Weges liefert.

Auch wenn sie für den hier behandelten Kontext nicht sonderlich wichtig erscheint, soll auch die Idee der Identifizierung des Spektralflusses mit dem Chern-Charakter eines gewissen virtuellen Bündels wie in [BW85] kurz in dem hier geschaffenen Zusammenhang erläutert werden. Bekanntlich liefert jede Abbildung $g : (S^1, 1) \rightarrow (U(\infty), id)$ durch Verkleben der trivialen Bündel auf oberer und unterer Hemisphäre entlang des Äquators mittels dieser ein Bündel E_g über $\Sigma S^1 = S^2$.

8.3.6 Lemma. *Es existiert ein kanonischer Gruppenisomorphismus*

$$F : \pi_1(\tilde{U}(\infty), id) \xrightarrow{\cong} K^{-1}(S^1)$$

Beweis. Wegen 4.2.8 ist $\pi_1(\tilde{U}(\infty), id) \cong \pi_1(U(\infty), id)$. Die verbleibende Abbildung ist durch das obige Verkleben trivialer Bündel induziert. Ihre Bijektivität ist beispielsweise in [Swi02, 11.40-11.43] bewiesen. \square

Es sei $L : [a, b] \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ ein Weg mit invertierbaren Endpunkten.

8.3.7 Definition. Das Bild $\text{a-ind}(L)$ der Spektralklasse von L unter F heie der **analytische Index** von L .

Mit dieser Definition ist also jedem, in dem hier behandelten Sinne geeigneten, Weg ein virtuelles Bündel über S^2 zugeordnet, das nun mit dem Spektralfluss des Weges in Verbindung gebracht werden kann.

8.3.8 Satz. *Die Evaluation des Chern-Charakters des analytischen Index auf der Fundamentalklasse der S^1 bezüglich der kanonischen Orientierung ist der Spektralfluss*

$$\text{sf}(L) = \text{ch}(\text{a-ind}(L))[S^1]$$

Beweis. Offenbar ist $\text{ch}([E_g] - n) = c_1(E_g) \in H^2(S^2, \mathbb{Z})$ wobei c_1 die erste Chern-Klasse bezeichne. Aus [McDsa98, S. 75-78] erhält man nun, dass $c_1(E_g)[S^1]$ die Windungszahl der Determinante von g und folglich mit (8.3.1) der Spektralfluss von L ist. \square

³Unter den hier betrachteten Deformationen von $\hat{\mathcal{F}}_*$ wird $\hat{\mathcal{F}}_* \cap GL(H)$ in sich abgebildet.

Kapitel 9

Die Spektralklasse perturbierter semi-Riemannscher Geodäten

Im vorigen Abschnitt wurde eine Darstellung des Spektralflusses angegeben, die es erlaubt (theoretisch) für jeden Weg selbstadjungierter total indefiniter Fredholmoperatoren den Spektralfluss zu berechnen. Insbesondere sind hierbei die Schritte zum Erhalt der Spektralklasse recht explizit angebar. Wie bei allen bisherigen Definitionen des Spektralflusses ist aber dennoch kein Rahmen geschaffen, der es erlaubt für einen konkret auf einem Hilbertraum gegebenen Weg selbstadjungierter total indefiniter Fredholmoperatoren direkt seinen Spektralfluss aufzuschreiben. Die Übertragung der grundlegenden Idee von Booss und Wojciechowski auf nicht notwendig geschlossen Wege erfolgte hier vor dem Hintergrund einer neuen Darstellung des Spektralindex für perturbierte Geodäten auf semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Im Grunde kann der bisher dargestellte Zugang natürlich als solcher dienen, dennoch hat man aber in diesem Fall statt eines allgemeinen Weges selbstadjungierter Fredholmoperatoren mit (7.4.4) immerhin eine recht genaue Darstellung des Weges quadratischer Formen, deren Riesz-Darstellungen nach Definition zur Berechnung des Spektralindex verwendet werden. Demnach wird man versuchen diese Riesz-Darstellungen der Operatoren zu berechnen, um hiermit eventuell genauere Aussagen über das Spektrum treffen zu können und mit diesen Erkenntnissen die Berechnung der Spektralklasse zu vereinfachen.

9.1 Der darstellende Operator

9.1.1 Berechnung des darstellenden Operators

Es sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit vom Index ν und $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine p -Geodäte. Man betrachte den Weg der quadratischen Formen (7.4.4)

$$\hat{h}_t(u) = \int_0^1 \langle Ju'(x), u'(x) \rangle dx - \int_0^1 \langle S_t(x)u(x), u(x) \rangle dx, \quad u \in H_0^1(I, \mathbb{R}^n)$$

Zunächst soll der Weg der Riesz-Darstellungen dieser quadratischen Formen bestimmt werden, wobei wie gewöhnlich das Skalarprodukt 6.2.4 mit $t_0 = 0$ verwendet wird. Man erhält nun unter Verwendung von 6.2.10

$$\begin{aligned} \hat{h}_t(u) &= \int_0^1 \langle Ju'(x), u'(x) \rangle dx - \int_0^1 \langle S_t(x)u(x), u(x) \rangle dx \\ &= \int_0^1 \langle Ju'(x), u'(x) \rangle dx + \int_0^1 \left\langle \int_0^x S_t(\tau)u(\tau) d\tau + c_1, u'(x) \right\rangle dx \\ &= \int_0^1 \langle Ju'(x) + \int_0^x S_t(\tau)u(\tau) d\tau + c_1, u'(x) \rangle dx \end{aligned}$$

Folglich genügt es aber eine Stammfunktion F von $Ju'(x) + \int_0^x S_t(\tau)u(\tau) d\tau + c_1$ anzugeben, die zudem die Randbedingungen $F(0) = F(1) = 0$ erfüllt. Eine Stammfunktion ist aber durch

$$Ju(x) + \int_0^x \int_0^s S_t(\tau)u(\tau) d\tau ds + c_1 x + c_2$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gegeben und die zu erfüllenden Randbedingungen erfordern $c_2 = 0$ und

$$c_1 = \int_0^1 \int_0^s S_t(\tau)u(\tau) d\tau ds$$

Somit erhält man als Riesz-Darstellung des Weges quadratischer Formen

$$\begin{aligned} L_t : H_0^1(I, \mathbb{R}^n) &\rightarrow H_0^1(I, \mathbb{R}^n), \\ (L_t u)(x) &= Ju(x) + \int_0^x \int_0^s S_t(\tau)u(\tau) d\tau ds - x \int_0^1 \int_0^s S_t(\tau)u(\tau) d\tau ds \end{aligned} \quad (9.1.1)$$

9.1.1 Bemerkung. Mit dem in (6.2.5) definierten Projektionsoperator $p : H^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_0^1(I, \mathbb{R}^n)$ ist unmittelbar einzusehen, dass

$$p(Ju(x) + \int_0^x \int_0^s S_t(\tau)u(\tau) d\tau ds) = (L_t u)(x), \quad u \in H^1(I, \mathbb{R}^n)$$

9.1.2 Eigenschaften und Spektrum

Man betrachte nun $L_t : H_0^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_0^1(I, \mathbb{R}^n)$ mit $(L_t u)(x) = Ju(x) + (K_t^1 u)(x) - (K_t^2 u)(x)$ wobei

$$(K_t^1 u)(x) = \int_0^x \int_0^s S_t(\tau) u(\tau) d\tau ds$$

$$(K_t^2 u)(x) = x \int_0^1 \int_0^s S_t(\tau) u(\tau) d\tau ds$$

Desweiteren sei nun stets $1 \leq \nu \leq n - 1$. Damit ist aber offenbar $J \in \mathcal{J} \subset GL(H_0^1(I, \mathbb{R}^n))$ und wegen des Beweises von 7.4.7 zudem $K_t^1 - K_t^2 \in \mathcal{K}(H_0^1(I, \mathbb{R}^n))$. Eine unmittelbare, aber ebenso wichtige Erkenntnis ist nun, dass L_t als Weg ein konstanter invertierbarer Operator ist, der durch einen Weg kompakter selbstadjungierter Operatoren gestört wird. Es lassen sich nun die folgenden Beobachtungen machen

- Unabhängig von $t \in [0, 1]$ ist stets $\sigma_{ess}(L_t) = \{-1, +1\}$.
- Man erhält aus (7.4.5) $S_0 = 0$ und folglich ist $(L_0 u)(x) = Ju(x)$, also insbesondere $L_0 \in \mathcal{J}$.
- Wegen 4.3.27 hängt der Spektralfluss des Weges L_t nur von den Endpunkten $L_0, L_1 \in GL(H_0^1(I, \mathbb{R}^n))$ ab und ist durch

$$sf(L_t) = \mu_{rel}(L_0, L_1) = \dim(\text{im } E_-(L_0) \cap \ker E_-(L_1)) - \dim(\text{im } E_-(L_1) \cap \ker E_-(L_0))$$

gegeben.

Man beachte, dass die kompakten Operatoren K_t^1, K_t^2 einzeln betrachtet keine Operatoren auf $H_0^1(I, \mathbb{R}^n)$ definieren. In der Hoffnung genauere Aussagen über das Spektrum von L_t zu gewinnen, soll nun diese Familie von Operatoren auf dem größeren Raum $H^1(I, \mathbb{R}^n)$ betrachtet werden, auf dem eine Zerlegung in die drei Summanden möglich ist. Bedauerlicherweise verliert man hierbei die Selbstadjungiertheit der Operatoren. Neben der weiterhin gültigen Stetigkeit der Operatoren auf $H^1(I, \mathbb{R}^n)$ soll insbesondere gezeigt werden, dass die Fortsetzung von L_t auf $H^1(I, \mathbb{R}^n)$ weiterhin eine Störung eines konstanten invertierbaren Operators durch eine Familie kompakter Operatoren ist. Im Folgenden wird die Fortsetzung eines Operators auf $H^1(I, \mathbb{R}^n)$ durch das Symbol $\hat{\cdot}$ von dem ursprünglich betrachteten Operator unterschieden.

9.1.2 Lemma. Die Operatoren

$$\hat{K}_t^i : H^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H^1(I, \mathbb{R}^n), \quad i = 1, 2$$

sind für jedes $t \in [0, 1]$ kompakt.

Beweis. Man betrachte zunächst \hat{K}_t^1 . Es ist unter Verwendung des Skalarproduktes 6.2.3 für

$u \in H^1(I, \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\|\hat{K}_t^1 u\|_{H^1(I, \mathbb{R}^n)}^2 &= \left\| \int_0^x \int_0^s S_t(\tau) u(\tau) d\tau ds \right\|_{H^1(I, \mathbb{R}^n)}^2 \\
&= \int_0^1 \left\| \int_0^x \int_0^s S_t(\tau) u(\tau) d\tau ds \right\|^2 dx + \int_0^1 \left\| \int_0^x S_t(\tau) u(\tau) d\tau \right\|^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^x \int_0^s \|S_t(\tau)\| \|u(\tau)\| d\tau ds \right)^2 dx + \int_0^1 \left(\int_0^x \|S_t(\tau)\| \|u(\tau)\| d\tau \right)^2 dx \\
&\leq \|S_t\|_\infty^2 \|u\|_\infty^2 \int_0^1 \frac{1}{4} x^4 + x^2 dx = \frac{23}{60} \|S_t\|_\infty^2 \|u\|_\infty^2 \leq c \|u\|_\infty^2
\end{aligned}$$

und folglich $\hat{K}_t^1 : C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H^1(I, \mathbb{R}^n)$ stetig. Da aber wegen 6.2.14 die Einbettung $H^1(I, \mathbb{R}^n) \hookrightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$ kompakt ist, erhält man insgesamt die Kompaktheit des Operators

$$\hat{K}_t^1 : H^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H^1(I, \mathbb{R}^n)$$

Für $\hat{K}_t^2 : H^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H^1(I, \mathbb{R}^n)$ ist $\text{rk}(\hat{K}_t^2) \leq n$ für alle $t \in [0, 1]$ und somit sind diese Operatoren insbesondere kompakt. \square

Offenbar ist für alle $t \in [0, 1]$

$$\text{im}(\hat{L}_t) \subset H_0^1(I, \mathbb{R}^n)$$

und da auch bei Betrachtung der Operatoren auf $H^1(I, \mathbb{R}^n)$ das essentielle Spektrum stets durch $\{-1, 1\}$ gegeben ist, erhält man aus der definierenden Gleichung eines Eigenwertes die Beziehung

$$\sigma(\hat{L}_t) = \sigma(L_t), \quad t \in [0, 1]$$

Hiermit kann also das Spektrum des Operators L_t ebensogut auf dem größeren Raum $H^1(I, \mathbb{R}^n)$ untersucht werden. Da folgende Betrachtungen sich ausschließlich auf das Spektrum konzentrieren, soll obige Unterscheidung der Operatoren nach zugrundeliegendem Hilbertraum nicht weiter verwendet werden.

9.1.3 Lemma. $\sigma(J + K_t^1) = \sigma_{ess}(J + K_t^1) = \{-1, 1\}$ für alle $t \in [0, 1]$

Beweis. Es sei $\lambda \neq -1, 1$ und $u \in H^1(I, \mathbb{R}^n)$ mit

$$Ju(x) + \int_0^x \int_0^s S_t(\tau) u(\tau) d\tau ds = \lambda u(x)$$

Man definiere $M := \sup_{x,t \in [0,1]} \|S_t(x)\|$ und $N(\lambda) := \|(J - \lambda id)^{-1}\|$ und hiermit soll induktiv die Ungleichung

$$\|u(x)\| \leq \frac{M^n N(\lambda)^n \|u\|_\infty}{n!} x^n, \quad x \in [0, 1], n \in \mathbb{N} \quad (9.1.2)$$

gezeigt werden. Damit ist natürlich $u = 0$ und folglich $\lambda \notin \sigma(J + K_t^1)$.

Wegen $\lambda \neq -1, 1$ ist nun zunächst $J - \lambda id \in Gl(n, \mathbb{R})$ und folglich

$$u(x) + (J - \lambda id)^{-1} \int_0^x \int_0^s S_t(\tau) u(\tau) d\tau ds = 0 \quad (9.1.3)$$

Damit ist aber

$$\begin{aligned} \|u(x)\| &\leq \|(J - \lambda id)^{-1}\| \int_0^x \int_0^s \|S_t(\tau)\| \|u(\tau)\| d\tau ds \\ &\leq N(\lambda)M \|u\|_\infty \frac{1}{2} x^2 \leq N(\lambda)M \|u\|_\infty x, \quad x \in [0, 1] \end{aligned}$$

und die Aussage gilt für $n = 1$. Ist nun die Gültigkeit für ein $n \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt, so erhält man für $x \in [0, 1]$ aus (9.1.3)

$$\begin{aligned} \|u(x)\| &\leq \|(J - \lambda id)^{-1}\| \int_0^x \int_0^s \|S_t(\tau)\| \|u(\tau)\| d\tau ds \leq N(\lambda)M \int_0^x \int_0^s \|u(\tau)\| d\tau ds \\ &\leq \frac{M^{n+1}N(\lambda)^{n+1} \|u\|_\infty}{n!} \int_0^x \int_0^s \tau^n d\tau ds \\ &= \frac{M^{n+1}N(\lambda)^{n+1} \|u\|_\infty}{(n+1)!} \frac{1}{n+2} x^{n+2} \leq \frac{M^{n+1}N(\lambda)^{n+1} \|u\|_\infty}{(n+1)!} x^{n+1} \end{aligned}$$

Damit ist aber die Ungleichung (9.1.2) nachgewiesen und wegen obiger Bemerkung die Aussage bewiesen. \square

9.1.4 Folgerung. *Es ist $\sigma(K_t^1) = \{0\}$ für alle $t \in [0, 1]$.*

Beweis. Mit einem vollkommen analogen Beweis kann gezeigt werden, dass stets $\sigma(id + K_t^1) = \sigma_{ess}(id + K_t^1) = \{1\}$. Die Behauptung folgt aus $\sigma(K_t^1) = \sigma(id + K_t^1) - 1$. \square

Wie bereits bemerkt ist $\text{rk}(K_t^2) \leq n$ für jedes $t \in [0, 1]$. Wegen 9.1.3 hat man damit zunächst das an sich interessante Resultat, dass im Fall des Weges der darstellenden Operatoren der Hesseschen semi-Riemannscher Geodäten sämtliche Verantwortung für nicht verschwindenden Spektralfluss bei einem Operator endlichen Ranges liegt. Diese Beobachtung gipfelt nun in der Fragestellung ob dies weitere Aussagen über das Spektrum von L_t erbringt. Insbesondere wäre man natürlich an Resultaten interessiert, die einem eine möglichst geringe Mächtigkeit des Spektrums, oder zumindest gewissen Teilen des Spektrums, beschert. Immerhin sichert $\sigma_{ess}(L_t) = \{-1, 1\}$ die Einsparung wenigstens eines Schrittes bei denen zum Erhalt der Spektralklasse notwendigen Deformationen. Eine Einschränkung des gesamten Spektrums könnte vielleicht zu weiteren Vereinfachungen führen. Die vielleicht intuitiv auftretende Vermutung, dass $\sigma(L_t)$ tatsächlich recht "zahn" ist, könnte man durch zwei weitere Beobachtungen stützen.

- Wegen 9.1.1 ist stets $p(J + K_t^1) = L_t$ mit der kanonischen Projektion $p : H^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_0^1(I, \mathbb{R}^n)$, wobei wegen 9.1.3 $\sigma(J + K_t^1) = \{-1, 1\}$.

- Mit [GGK90, Corollary 4.5] und 9.1.4 existiert zu jedem der Operatoren K_t^1 eine Folge $\{F_t(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Operatoren endlichen Ranges mit $\|F_t(n) - K_t^1\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ und $\sigma(F_t(n)) = \{0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wegen der ersten Bemerkung stellt sich nun die Frage, ob Aussagen über das Spektrum der Operatoren L_t als Bilder von $J + K_t^1$ unter der Projektion gemacht werden können¹. Die zweite Bemerkung mag dazu verleiten die Operatoren $J + K_t^1$ durch Störungen endlichen Ranges des Operators J zu approximieren und hiermit die Wirkung auf das Spektrum durch K_t^2 als eine weitere Störung endlichen Ranges zu untersuchen.

Jeder dieser Punkte hat natürlich zum Ziel das Spektrum der Operatoren L_t als möglichst einfach, oder eventuell gar endlich, nachzuweisen. Dass diese Ideen leider aussichtslos sind, kann hingegen durch ein einfaches Beispiel nachgewiesen werden.

Ein Gegenbeispiel zur Zahmheit des Spektrums Es sei $n \geq 4$, $2 \leq \nu \leq n - 2$ und $J = \text{diag}\{\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq n}$ mit

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n - \nu \\ -1, & n - \nu < i \leq n \end{cases}$$

sowie

$$A = \text{diag}\{-1, 1, \dots, 1, -1\}$$

Man betrachte hiermit den Integraloperator

$$L : H_0^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_0^1(I, \mathbb{R}^n)$$

$$(Lu)(x) = Ju(x) + \int_0^x \int_0^s Au(\tau) d\tau ds - x \int_0^1 \int_0^s Au(\tau) d\tau ds$$

Das Eigenwertproblem dieses Operators zerfällt nun in die n Eigenwertprobleme

$$\varepsilon_i u(x) + \int_0^x \int_0^s \kappa_i u(\tau) d\tau ds - x \int_0^1 \int_0^s \kappa_i u(\tau) d\tau ds = \lambda u(x) \quad (9.1.4)$$

mit

$$\kappa_i = \begin{cases} 1 & 1 < i < n \\ -1 & i = 1, n \end{cases}$$

Bei Bestehen der Gleichung (9.1.4) ist unmittelbar einsichtig, dass jede Eigenfunktion bereits glatt sein muss, und durch zweimaliges Differenzieren dieser Gleichung erhält man für $\lambda \neq -1, 1$

¹Bedauerlicherweise ist p keine Orthogonalprojektion.

stets ein zu der Integralgleichung äquivalentes Sturmches Eigenwertproblem, das sich mit bekannten Mitteln der Lösungstheorie linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lösen lässt. Man erhält so die diskreten Eigenwerte und Eigenvektoren des Operators $L : H_0^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_0^1(I, \mathbb{R}^n)$. Um diesen Vorgang hier etwas abzukürzen sei einfach behauptet, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$u_k \in H_0^1(I, \mathbb{R}^n) \text{ mit } u_k(x) = \sin(k\pi x), \quad x \in [0, 1]$$

ein Eigenvektor des durch die Gleichung (9.1.4) gegebenen skalaren Integraloperators zum Eigenwert

$$\lambda_k = \varepsilon_i - \frac{\kappa_i}{k^2\pi^2}$$

ist. Diese Aussage bestätigt man durch die einfache Rechnung

$$\begin{aligned} & \varepsilon_i u_k(x) + \int_0^x \int_0^s \kappa_i \sin(k\pi\tau) d\tau ds - x \int_0^1 \int_0^s \kappa_i \sin(k\pi\tau) d\tau ds \\ &= \varepsilon_i u_k(x) + \int_0^x \frac{\kappa_i}{k\pi} - \frac{\kappa_i}{k\pi} \cos(k\pi s) ds - x \int_0^1 \frac{\kappa_i}{k\pi} - \frac{\kappa_i}{k\pi} \cos(k\pi s) ds \\ &= \varepsilon_i u_k(x) + \frac{\kappa_i x}{k\pi} - \frac{\kappa_i}{k^2\pi^2} \sin(k\pi x) - \frac{\kappa_i x}{k\pi} \\ &= \left(\varepsilon_i - \frac{\kappa_i}{k^2\pi^2}\right) u_k(x) \end{aligned}$$

Damit ist für obigen Operator L

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ -1 - \frac{1}{k^2\pi^2}, -1 + \frac{1}{k^2\pi^2}, 1 - \frac{1}{k^2\pi^2}, 1 + \frac{1}{k^2\pi^2} \right\} \subset \sigma(L)$$

und folglich besitzt der Operator nicht nur unendlich viele Eigenwerte, sondern sogar in jedem der offenen Intervalle $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$ unendlich viele. Folglich besitzt das Spektrum des Operators L die höchste Komplexität, die bei Gültigkeit von $\sigma_{ess}(L) = \{-1, 1\}$ möglich ist und insbesondere bestehen damit im Allgemeinen keine weiteren Möglichkeiten weitere zum Erhalt der Spektralklasse notwendige Deformationen auszulassen.

Man beachte, dass die eingangs gestellten Bedingungen an ν und n lediglich zur Konstruktion eines Operators dessen Spektrum sämtliche vier Möglichkeiten der Häufung aufweist gemacht wurden. Man sieht aber aus der Konstruktion, dass auch bei Verzicht auf diese Bedingungen stets ein Operator existiert, dessen Spektrum zumindest einen Häufungspunkt besitzt.

9.2 Zur Berechnung der Spektralklasse semi- Riemannscher Geodäten

9.2.1 Definition. Es sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit vom Index $1 \leq \nu \leq n-1$, $V : I \times M \rightarrow \mathbb{R}$ ein glattes Potential und $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine nicht entartete p-Geodäte. Dann heiÙe die Spektralklasse des zugehörigen Weges (9.1.1) der Riesz-Darstellungen der Hesseschen die **Spektralklasse** von γ .

Es bezeichne nun wie in obiger Definition $L_t : H_0^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_0^1(I, \mathbb{R}^n)$ den zugehörigen Weg der Riesz-Darstellungen des Weges der Hesseschen einer p-Geodäte.

Im vorigen Abschnitt wurden bereits die folgenden Eigenschaften des Weges L_t ermittelt:

- $\sigma_{ess}(L_t) = \{-1, 1\}$ für alle $t \in [0, 1]$.
- Es ist stets $L_0 \in \mathcal{J}$.

Für die notwendigen Deformationen zur Berechnung der Spektralklasse einer p-Geodäte hat man folglich zwei Vereinfachungen. Zum Einen muss keine das essentielle Spektrum betreffende Deformation vorgenommen werden, zum Anderen genügt es einen zusätzlichen Weg zur Konstruktion einer reduzierten unsichtbaren Schließung zu bestimmen.

Mit der zusätzlichen Information, dass für die hier betrachteten Wege keinerlei essentielles Spektrum in $(-1, 1)$ auftritt, und folglich auch kein Häufungspunkt des Spektrums in diesem Intervall ist, kann nun versucht werden die Deformationen weiter zu vereinfachen. Hierzu benötigt man zunächst folgendes Resultat, das anschaulich unmittelbar einsichtig sein sollte.

9.2.2 Lemma. *Es sei $A : [a, b] \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ ein Weg mit invertierbaren Endpunkten und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, monoton wachsende Funktion mit $f^{-1}(0) = \{0\}$. Dann ist*

$$\text{sf}(A_t) = \text{sf}(f(A_t))$$

Beweis. Hierfür erscheint die Definition des Spektralflusses nach Phillips aus Abschnitt 4.5 geeignet zu sein. Es ist hier somit von Nutzen die Gleichheit beider Definitionen nachgewiesen zu haben.

Es seien nun (x_i, a_i) und $(\tilde{x}_i, \tilde{a}_i)$ Paare reeller Zahlen für A_t und $f(A_t)$ wie in der Definition des Spektralfluss nach Phillips. Zunächst kann nach Verfeinerung der Zerlegung des Intervalls $x_i = \tilde{x}_i$ angenommen werden. Nun ist aber unter den Voraussetzungen an die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stets $[f^{-1}(-\tilde{a}_i), f^{-1}(\tilde{a}_i)]$ ein 0 enthaltendes Intervall, auf dem f Maximum und Minimum auf dem Rand annimmt. Unter Verwendung von 1.2.10 erhält man

$$\chi_{[-\tilde{a}_i, \tilde{a}_i]}(f(S_t)) = (\chi_{[-\tilde{a}_i, \tilde{a}_i]} \circ f)(S_t) = \chi_{[f^{-1}(-\tilde{a}_i), f^{-1}(\tilde{a}_i)]}(S_t)$$

und diese Funktion ist somit nach Voraussetzung auf $[x_{i-1}, x_i]$ stetig. Desweiteren erhält man aus dem Spektralabbildungssatz (vgl. 1.2.10) nach Wahl der \tilde{a}_i in der Konstruktion des Spektralflusses nach Phillips, dass $\tilde{a}_i \notin \sigma(f(S_t)) = f(\sigma(S_t))$ und folglich $f^{-1}(\tilde{a}_i) \notin \sigma(S_t)$ für alle

$t \in [x_{i-1}, x_i]$. Mit $a_i \notin \sigma(S_t)$ für alle $t \in [x_{i-1}, x_i]$ ist nun aber auch

$$\begin{aligned}\chi_{[0, a_i]}(S_t) - \chi_{[0, \bar{a}_i]}(f(S_t)) &= \chi_{[0, a_i]}(S_t) - \chi_{[0, f^{-1}(\bar{a}_i)]}(S_t) \\ &= \pm \chi_{(\min\{a_i, f^{-1}(\bar{a}_i)\}, \max\{a_i, f^{-1}(\bar{a}_i)\})}(S_t)\end{aligned}$$

stetig auf $[x_{i-1}, x_i]$ und folglich von konstantem Rang n . Man erhält damit

$$\begin{aligned}\operatorname{rk}(\chi_{[0, a_i]}(S_{x_i})) - \operatorname{rk}(\chi_{[0, a_i]}(S_{x_{i-1}})) &= (\operatorname{rk}(\chi_{[0, \bar{a}_i]}(f(S_{x_i}))) \pm n) - (\operatorname{rk}(\chi_{[0, \bar{a}_i]}(f(S_{x_{i-1}}))) \pm n) \\ &= \operatorname{rk}(\chi_{[0, \bar{a}_i]}(f(S_{x_i}))) - \operatorname{rk}(\chi_{[0, \bar{a}_i]}(f(S_{x_{i-1}})))\end{aligned}$$

und die Behauptung direkt aus der Definition des Spektralflusses nach Phillips. \square

Dieses Resultat führt in Hinblick auf Anwendungen für die Spektralklasse von Geodäten auf folgende Definiton.

9.2.3 Definition. Für $\delta \in (0, 1]$ sei eine **zählende Funktion** zum Wert δ eine stetige, monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(0) = \{0\}$ und

$$\operatorname{supp}(f^2 - 1) \subset (-\delta, \delta)$$

9.2.4 Bemerkung. Bekanntlich existiert zu jedem $\delta \in (0, 1]$ sogar eine glatte zählende Funktion zum Wert δ .

Die Anwendung dieses Begriffes liegt nun auf der Hand:

Ist allgemein $A : [a, b] \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ ein Weg der bereits mit einer reduzierten unsichtbaren Schließung versehen worden sei, so existiert wegen der Kompaktheit von $[a, b]$ ein $\delta > 0$, so dass $\sigma_{ess}(A_t) \cap (-\delta, \delta) = \emptyset$ für alle $t \in [a, b]$. Ist nun $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zählende Funktion zum Wert $\delta > 0$, so ist wegen 9.2.2 $\operatorname{sf}(A_t) = \operatorname{sf}(f(A_t))$ und zudem $f(A_a) = A_a$, $f(A_b) = A_b$ wegen $A_a, A_b \in \mathcal{J}$. Der Weg $f(A_t)$ verläuft aber wegen des Spektralabbildungssatzes bereits vollständig in $\hat{\mathcal{F}}(\infty)$ und ist demnach keiner weiteren Deformation zu unterziehen. Damit kann nun die Spektralklasse des Weges A direkt als

$$[\exp(\pi i(f(A_t) + id))] \in \pi_1(\tilde{U}(\infty), id)$$

angegeben werden.

In diesem Fall ist allerdings das gewählte $\delta > 0$ abhängig von dem betrachteten Weg A_t und kann sicherlich nicht uniform für alle Wege in $\hat{\mathcal{F}}_*$ gewählt werden. Dieser Missstand tritt aber nun im Fall der Spektralklassen von Geodäten nicht auf und folglich kann mit der Wahl einer beliebigen zählenden Funktion der Weg der Riesz-Darstellungen jeder p-Geodäte behandelt werden. Selbstverständlich entbindet dies im Allgemeinen nicht von der Wahl des einen verbleibenden Weges zum Erhalt einer reduzierten unsichtbaren Schließung. Man kann die gewonnenen Erkenntnisse nun wie folgt zusammenfassen.

9.2.5 Satz. *Es sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit vom Index $1 \leq \nu \leq n - 1$, $V : I \times M \rightarrow \mathbb{R}$ ein glattes Potential und $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine nicht entartete p -Geodäte. Zudem bezeichne $L_t : H_0^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_0^1(I, \mathbb{R}^n)$ den Weg (9.1.1) der Riesz-Darstellungen der Hesseschen. Dann kann die Spektralklasse von γ wie folgt berechnet werden:*

- *Man wähle eine (aus maximal einem zusätzlichen Weg bestehende) reduzierte unsichtbare Schließung L_{rc} von L und eine beliebige zähmende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist die Spektralklasse von γ gegeben durch*

$$[\exp(\pi i(f(L_{rc}) + id))] \in \pi_1(\tilde{U}(\infty), id)$$

- *Man wähle unter Verwendung von $L_1 \in GL(H)$ ein $\delta > 0$ mit $\sigma(L_1) \cap (-\delta, \delta) = \emptyset$ und eine beliebige zähmende Funktion zum Wert δ . Dann ist die Spektralklasse von γ gegeben durch*

$$[\exp(\pi i(f(L) + id))] \in \pi_1(\tilde{U}(\infty), id)$$

In diesem Fall ist die gewählte zähmende Funktion abhängig von der betrachteten p -Geodäte.

Es sollen zunächst einige Bemerkungen zu diesem Resultat gemacht werden.

9.2.6 Bemerkung. Bei sämtlichen Betrachtungen zur Spektralklasse von p -Geodäten wurden bisher die Fälle $\nu = 0$ und $\nu = n$ ausgeschlossen. Diese Einschränkung diente hier nicht nur einer zwischenzeitlichen Vereinfachung der Schreibweisen. Falls man eine unsichtbare Schließung L_c eines Weges $L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_{\pm}$ wählt, so erhält man aus der Kontrahierbarkeit von $\hat{\mathcal{F}}_{\pm}$ stets $\text{sf}(L_c) = 0$ und wegen der Additivität und des Verschwindens des Spektralflusses für Wege invertierbarer Operatoren erhalte man das im Allgemeinen unsinnige Resultat $\text{sf}(L) = 0$. Folglich kann aber eine unsichtbare Schließung nicht existieren, also $\hat{\mathcal{F}}_{\pm} \cap GL(H)$ nicht wegzusammenhängend sein. Am Ende des Abschnittes 4.3 wurde allerdings gezeigt wie einem Weg in $\hat{\mathcal{F}}_{\pm}$ unter Beibehaltung des Spektralflusses ein Weg in $\hat{\mathcal{F}}_*$ zugewiesen werden kann (vgl. 4.3.34). Mittels dieser Prozedur kann nun die Definition von Spektralklassen auch auf solche Wege ausgedehnt werden und so können obige Überlegungen unmittelbar auch auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten und den wohl eher bedeutungslosen Fall $\nu = n$ übertragen werden.

9.2.7 Bemerkung. Mit dem Resultat 9.2.5 ist eine in gewisser Weise topologische Darstellung des Spektralindex einer p -Geodäten bestimmt. Denn bezeichnet nun $[L(\gamma)] \in \pi_1(U(\infty), id)$ das Bild der Spektralklasse der p -Geodäte in der Sequenz (8.3.1), so ist mit den Überlegungen aus Abschnitt 8.3

$$i_{spec}(\gamma) = -w([L(\gamma)]) \tag{9.2.1}$$

Dabei ist zu beachten, dass damit eine Darstellung des **Spektralindex als verallgemeinerte Windungszahl** vorliegt. Alternativ zeigt ein Blick in die Definition der verallgemeinerten Windungszahl, dass nach Anwendung der Determinantenabbildung zunächst ein Element in $\pi_1(S^1, 1)$ zugewiesen wird aus dem nun der Spektralindex der p -Geodäte durch Bildung der klassischen Windungszahl erhalten wird. Dieses Vorgehen ist demnach eine Darstellung des **Spektralindex perturbierter semi-Riemannscher Geodäten als Windungszahl**.

9.2.8 Bemerkung. Wie bereits in 7.4.13 vorgestellt, ist ein wichtiger Bestandteil des Beweises des Morse-Theorems von Musso, Pejsachowicz und Portaluri die Darstellung des konjugierten Index in der Form (7.4.11), die von der Form an die Integraldarstellung der verallgemeinerten Windungszahl in 8.2.4 erinnert.

9.2.9 Bemerkung. Man betrachte die zur Definition des konjugierten Index verwendete Abbildung $\rho : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$ (vgl. (7.4.10)). Nach Wahl eines Homöomorphismus $\partial\mathcal{O} \approx S^1$ erhält man hieraus eine stetige Kurve $g : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \simeq S^1$. Wegen [Dei85, 6.6] ist nun der konjugierte Index der betrachteten p-Geodäte γ gerade die klassische Windungszahl der Kurve g . Mit der hier präsentierten Darstellung des Spektralindex als Windungszahl ist das eigentlich so analytisch formulierte Morse Theorem als Gleichheit zweier Windungszahlen für Elemente in $\pi_1(S^1, 1)$ dargestellt. Man erinnere sich hierbei an die Ausführungen zum Morse Theorem von Piccione und Tausk, in der eine zentrale Idee des Beginns der Morse Theorie semi-Riemannscher Geodäten der klassische Beweis eines Resultates der Sturm-Theorie war, in dem die Gleichheit der den hier entsprechenden Indizes durch die Gleichheit zweier Windungszahlen von Elementen in $\pi_1(S^1, 1)$ gezeigt wurde. Das Sturm-Theorem ist, wie dort angemerkt, ein Spezialfall des klassischen Morse Index Theorems und folglich auch in dem Morse Theorem von Musso, Pejsachowicz und Portaluri enthalten.

9.2.10 Bemerkung. In 7.4.14 wurde der Begriff der Bifurkation für Geodäten in semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten definiert. Damit erhält man aus dem Nichtverschwinden der Indizes des Morse Theorems, dass die betrachtete Geodäte einen Bifurkationspunkt enthält. Mit (9.2.1) erhält man nun, dass dementsprechend aus der Nichttrivialität der Spektralklasse in $\pi_1(\tilde{U}(\infty), id)$ stets auf die Existenz eines Bifurkationspunktes der Geodäte geschlossen werden kann. Dies kann nun natürlich auch für Teilstücke von Geodäte angewendet werden, die selber als Geodäten nicht entartet sind.

Wegen der in der letzten Bemerkung dargestellten Anwendung der Spektralklasse auf die Untersuchung des Auftretens von Bifurkationspunkten von semi-Riemannschen Geodäten, ist es natürlich wünschenswert eine möglichst explizite Beschreibung der verallgemeinerten Windungszahl für die Spektralklassen von Geodäten zu erlangen. Daher soll abschließend eine Möglichkeit zur weiteren Vereinfachung eher spekulativen Charakters gegeben werden.

Man betrachte hierzu die differentielle Formel zur Berechnung der verallgemeinerten Windungszahl in 8.2.4. Beachtet man, dass die hier einzusetzenden Operatoren, abgesehen von einer weiteren Deformation, von der Form $\exp(\pi i(L_t + id))$ unitär sind, so erhält man nach einer kurzen formalen Rechnung unter Missachtung aller wegen des Vorliegens operatorwertiger Funktionen gebotenen Vorsicht, eine durchaus handliche Formel. Diese Idee ist die Grundlage der folgenden Überlegungen, wobei obige "formale" Rechnung natürlich so nicht zulässig sein kann, und sofern das betrachtete Integral überhaupt existiert noch einige vielleicht durchaus nicht triviale Details zu klären sind.

Es sei $L : I \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_*$ ein Weg der Klasse C^1 , der bereits mit einer unsichtbaren Schließung versehen sei und $f \in C^1(\mathbb{R})$, so dass

- $\exp(\pi i(f(L_t) + id)) \in C^1(I, U(\infty))$ mit $f(L_0), f(L_1) \in \mathcal{J}$
- $\exp(\pi i(f + 1))$ besitzt eine Fortsetzung als holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Die erste Bedingung fordert insbesondere, dass der dort betrachtete Weg bereits in $U(\infty)$ verläuft, wobei zu beachten ist, dass zur Definition von $U(\infty)$ eine Orthonormalbasis des zugrundeliegenden Hilbertraumes zu wählen ist. Die zweite Forderung wird es erlauben den Dunford-Kalkül zu benutzen, um obige heuristische Betrachtung zur Differentiation auf eine solide Basis zu stellen.

Zunächst benötigt man zwei weitere Hilfsergebnisse.

9.2.11 Lemma. *Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $L_t : I \rightarrow \mathcal{S}(H)$ ein differenzierbarer Weg von Operatoren. Dann ist*

$$\left[\left(\frac{d}{dt}L_t\right), f(L_t)\right] = \left(\frac{d}{dt}L_t\right)f(L_t) - f(L_t)\left(\frac{d}{dt}L_t\right) = 0$$

Beweis. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit genügt es die Aussage für $f = id$ zu zeigen. Denn damit kommutiert $\frac{d}{dt}L_t$ mit jedem Polynom $p(L_t)$ und der allgemeine Fall kann durch Grenzübergang erhalten werden. Hierfür ist aber

$$2L_t\left(\frac{d}{dt}L_t\right) = \frac{d}{dt}(L_t^2) = \left(\frac{d}{dt}L_t\right)L_t + L_t\left(\frac{d}{dt}L_t\right)$$

also $\left[\frac{d}{dt}L_t, L_t\right] = 0$. □

9.2.12 Lemma. *Ist $\lambda \in \rho(L_t)$ für alle $t \in [0, 1]$, so ist*

$$\frac{d}{dt}(L_t - \lambda)^{-1} = -(L_t - \lambda)^{-1}\left(\frac{d}{dt}L_t\right)(L_t - \lambda)^{-1}$$

Beweis. Bekanntlich gilt für Operatoren $S, T \in \mathcal{L}(H)$ und $\lambda \in \rho(S) \cap \rho(T)$ stets die Resolventengleichung

$$(\lambda - S)^{-1} - (\lambda - T)^{-1} = (\lambda - S)^{-1}(S - T)(\lambda - T)^{-1}$$

Man erhält hieraus

$$(L_{t+h} - \lambda)^{-1} - (L_t - \lambda)^{-1} = -(L_{t+h} - \lambda)^{-1}(L_{t+h} - L_t)(L_t - \lambda)^{-1}$$

und damit unter der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von L_t das Resultat. □

Unter Verwendung der ersten Voraussetzung besitzt mit 8.2.4 die verallgemeinerte Windungszahl eine Darstellung

$$w(L_t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \operatorname{tr} \left(\exp(\pi i(f(L_t) + id))^* \frac{d}{dt}(\exp(\pi i(f(L_t) + id))) \right) dt \quad (9.2.2)$$

Nun ist $\exp(\pi i(f(L_t) + id))^* = \exp(-\pi i(f(L_t) + id))$. Zudem besteht unter Verwendung des Dunford-Kalküls mit der obigen zweiten Voraussetzung und einem geeigneten Integrationsweg $\Gamma \subset \mathbb{C}$ eine Darstellung

$$\exp(\pi i(f(L_t) + id)) = g(L_t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(\lambda)(L_t - \lambda)^{-1} d\lambda$$

Mit der möglichen Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration (vgl. [La93, Theorem 8.1]) erhält man unter Verwendung von 9.2.12

$$\frac{d}{dt}(\exp(\pi i(f(L_t) + id))) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(\lambda)(L_t - \lambda)^{-1} \left(\frac{d}{dt}L_t\right)(L_t - \lambda)^{-1} d\lambda$$

Mit (9.2.2) erhält man hiermit zunächst

$$w(L_t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \operatorname{tr} \left(\exp(-\pi i(f(L_t) + id)) \int_{\Gamma} g(\lambda)(L_t - \lambda)^{-1} \left(\frac{d}{dt}L_t\right)(L_t - \lambda)^{-1} d\lambda \right) dt$$

und unter zweimaliger Anwendung von 9.2.11 ist

$$w(L_t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \operatorname{tr} \left(\left(\frac{d}{dt}L_t\right) \exp(-\pi i(f(L_t) + id)) \int_{\Gamma} g(\lambda)(L_t - \lambda)^{-2} d\lambda \right) dt \quad (9.2.3)$$

Da nun mit der Cauchy-Integralformel

$$\int_{\Gamma} g(\lambda)(L_t - \lambda)^{-2} d\lambda = -g'(L_t)$$

und

$$g'(\lambda) = \pi i e^{\pi i(f(\lambda)+1)} f'(\lambda)$$

erhält man aus (9.2.3) abschließend das Resultat

$$w(L_t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \operatorname{tr} \left(\left(\frac{d}{dt}L_t\right) f'(L_t) \right) dt \quad (9.2.4)$$

Die folgende Aussage ist nun eine erste Anwendung dieser Integraldarstellung.

9.2.13 Satz. *Es sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit vom Index $1 \leq \nu \leq n-1$, $V : I \times M \rightarrow \mathbb{R}$ ein glattes Potential und $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine nicht entartete p -Geodäte. Zudem sei mit dem reduziert unsichtbar geschlossenem Weg $L_t : H_0^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_0^1(I, \mathbb{R}^n)$ der Riesz-Darstellungen der Hesseschen bereits $\exp(\pi i(L_t + id)) \in C^1(I, U(\infty))$ ein Repräsentant der Spektralklasse. Dann ist*

$$i_{\text{spec}}(\gamma) = -\frac{1}{2} \int_0^1 \operatorname{tr} \left(\frac{d}{dt}L_t \right) dt$$

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen genügt es in (9.2.4) $f = id$ zu setzen. \square

Ist nun $f \in C^1(\mathbb{R})$ eine zählende Funktion mit $\exp(\pi i(f(L_t) + id)) \in C^1(I, U(\infty))$, so kann unter dieser Voraussetzung die Integraldarstellung 8.2.4 zur Berechnung des Spektralindex verwendet werden. Bedauerlicherweise ist die hier gegebene Herleitung der Beziehung (9.2.4) unter diesen Voraussetzungen nicht anwendbar, da zählende Funktionen die Möglichkeit einer holomorphen Fortsetzung wie oben gefordert ausschließen.

Mit diesen Überlegungen stellen sich nun zwei naheliegende Fragen mit deren Formulierung dieses letzte Kapitel und damit die vorliegende Arbeit ein Ende finden soll:

Es sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit vom Index $1 \leq \nu \leq n - 1$, $V : I \times M \rightarrow \mathbb{R}$ ein glattes Potential und $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine nicht entartete p-Geodäte. Zudem bezeichne $L_t : H_0^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_0^1(I, \mathbb{R}^n)$ den bereits reduziert unsichtbar geschlossenen Weg der Riesz-Darstellungen der Hesseschen.

- Existiert zu L_t stets eine Orthonormalbasis des Hilbertraumes $H_0^1(I, \mathbb{R}^n)$ und eine zählende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\exp(\pi i(f(L_t) + id)) \in C^1(I, U(\infty))$?
- Ist mit einer solchen Wahl einer zählenden Funktion stets die Integraldarstellung

$$i_{spec}(\gamma) = -\frac{1}{2} \int_0^1 \text{tr}\left(\left(\frac{d}{dt}L_t\right)f'(L_t)\right)dt$$

gültig?

Literaturverzeichnis

- [Abb01] A. Abbondandolo, **Morse Theory for Hamiltonian systems**, Chapman&Hall/CRC Research Notes in Mathematics **425**, Chapman&Hall/CRC, 2001
- [AHP05] W.O. Amrein, A.M. Hinz, D.B. Pearson, **Sturm-Liouville Theory-Past and Present**, Birkhäuser, 2005
- [Ama90] H. Amann, **Ordinary Differential Equations-An Introduction to Nonlinear Analysis**, de Gruyter, 1990
- [APS76] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, **Spectral Asymmetry and Riemannian Geometry III**, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **79**, 1976, 71-99
- [Arn67] I.V. Arnold, **Characteristic Class Entering in Quantization Conditions**, Funct. Anal. Appl., 1967, 1-13
- [Arv02] W. Arveson, **A Short Course on Spectral Theory**, Springer-Verlag, New York, 2002
- [At89] M.F. Atiyah, **K-Theory**, Addison-Wesley, 1989
- [AS69] M.F. Atiyah, I.M. Singer, **Index theory for skew-adjoint Fredholm Operators**, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **37**, 1969, 5-26
- [ASS94] J. Avron, R. Seiler, B. Simon, **The Index of a Pair of Projections**, J. Funct. Anal. **120**, 1994, 220-237
- [BB85] B. Booss, D.D. Bleecker, **Topology and Analysis-The Atiyah-Singer Index Formula and Gauge Theoretic Physics**, Springer-Verlag, 1985
- [BEE96] J.K. Beem, P.E. Ehrlich, K.L. Easley, **Global Lorentzian Geometry**, Marcel Dekker, 1996
- [BF98] B. Boß-Bavnbek, K. Furutani, **The Maslov Index: a Functional Analytical Definition and the Spectral Flow Formula**, Tokyo J. Math. **21**, 1998, 1-34

- [BM92] V. Benci, A. Masiello, **A Morse Index for Geodesics in static Lorentzian Manifolds**, *Math. Ann.* **293**, 1992, 433-442
- [Bo59] R. Bott, **The Stable Homotopy of the Classical Groups**, *Annals of Mathematics* **70**, 1959, 313-337
- [BW85] B. Booß, K. Wojciechowski, **Desuspension of Splitting Elliptic Symbols I**, *Ann. Glob. Analysis and Geometry* **3**, 1985, 337-383
- [BW93] B. Booß-Bavnbek, K. P. Wojciechowski, **Elliptic Boundary Problems for Dirac Operators**, Birkhäuser, 1993
- [BT82] R. Bott, L.W. Tu, **Differential Forms in Algebraic Topology**, Springer-Verlag, 1982
- [Bre93] G.E. Bredon, **Topology and Geometry**, Springer-Verlag, 1993
- [Bro68] R. Brown, **Elements of Modern Topology**, McGraw-Hill, 1968
- [Bro04] R.F. Brown, **A Topological Introduction to Nonlinear Analysis**, Birkhäuser, 2004
- [CEPPT02] J.C. Correa Eidam, A.L. Pereira, P. Piccione, D.V. Tausk, **On the Equality between the Maslov Index and the Spectral Index for Semi-Riemannian Jacobi Operator**, *J. Math. Anal. Appl.* **268**, 2002, 564-589
- [Cha93] K.C. Chang, **Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems**, Birkhäuser Boston, 1993
- [CFP00] E. Ciriza, P.M. Fitzpatrick, J. Pejsachowicz, **Uniqueness of Spectral Flow**, *Mathematical and Computer Modelling* **32**, 2000, 1495-1501
- [ES52] E. Eilenberg, N.E. Steenrod, **Foundations of Algebraic Topology**, Princeton University Press, 1952
- [CL55] E.A. Coddington, N. Levinson, **Theory of Ordinary Differential Equations**, McGraw-Hill, 1955
- [CMP04] E. Caponio, A. Masiello, P. Piccione, **Maslov Index and Morse Theory for the relativistic Lorentz Force Equation**, *Manuscripta Math.* **113**, 2004, 471-506
- [Dei85] K. Deimling, **Nonlinear Functional Analysis**, Springer-Verlag, 1985
- [FPR99] P.M. Fitzpatrick, J. Pejsachowicz, L. Recht, **Spectral Flow and Bifurcation of Critical Points of Strongly-Indefinite Functionals; Part I: General Theory**, *J. Funct. Anal.* **162**, 1999, 52-95

- [GGK90] I. Gohberg, S. Goldberg, M.A. Kaashoek, **Classes of Linear Operators Vol. I**, Operator Theory: Advances and Applications Vol. 49, Birkhäuser, 1990
- [GGK00] I. Gohberg, S. Goldberg, N. Krupnik, **Traces and Determinants of Linear Operators**, Birkhäuser, 2000
- [GGK03] I. Gohberg, S. Goldberg, M.A. Kaashoek, **Basic Classes of Linear Operators**, Birkhäuser, 2003
- [GGP04] R. Giambo, F. Giannoni, P. Piccione, **Gravitational Lensing in General Relativity via Bifurcation Theory**, Nonlinearity **17**, 2004, 117-132
- [GHL04] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, **Riemannian Geometry**, Springer-Verlag, 2004
- [GMPT01] F. Giannoni, A. Masiello, P. Piccione, D.V. Tausk, **A Generalized Index Theorem for Morse-Sturm Systems and Applications to Semi-Riemannian Geometry**, Asian J. Math. **5**, 2001, 441-472
- [Hel94] A.D. Helfer, **Conjugate Points on Spacelike Geodesics or Pseudo-Selfadjoint Morse-Sturm-Liouville Systems**, Pacific J. Math. **164**, 1994, 321-340
- [Heu92] H. Heuser, **Funktionalanalysis**, 3. Auflage, Teubner, 1992
- [Hil71] P. Hilton, **General Cohomology Theory and K-Theory**, Cambridge University Press, 1971
- [Hir97] M.W. Hirsch, **Differential Topology**, Springer-Verlag, 1997
- [JLJ98] J. Jost, X. Li-Jost, **Calculus of Variations**, Cambridge University Press, 1998
- [Jo02] J. Jost, **Riemannian Geometry and Geometric Analysis**, Springer-Verlag, 2002
- [Ka95] T. Kato, **Perturbation Theory for Linear Operators**, Corrected Printing of the Second Edition, Springer-Verlag, 1995
- [KRB05] A.M. Kholkin, F.S. Rofe-Beketov, **Spectral Analysis of Differential Operators**, World-Scientific, 2005
- [Kli82] W. Klingenberg, **Riemannian Geometry**, de Gruyter, 1982
- [Kui65] N.H. Kuiper, **The Homotopy Type of the Unitary Group of Hilbert Space**, Topology **3**, 1965, 19-30
- [La93] S. Lang, **Real and Functional Analysis**, third edition, Springer-Verlag, 1993
- [La95] S. Lang, **Differential and Riemannian Manifolds**, Springer-Verlag, 1995

- [Lee97] J.M. Lee, **Riemannian Manifolds**, Springer-Verlag, 1997
- [Lee03] J.M. Lee, **Introduction to Smooth Manifolds**, Springer-Verlag, 2003
- [Les05] M. Lesch, **The Uniqueness of the Spectral Flow on Spaces of Unbounded Self-adjoint Fredholm Operators**, Contemporary Mathematics **366**, 2005, 193-224
- [Li03] B. Li, **Real Operator Algebras**, World Scientific, 2003
- [Ma94] A. Masiello, **Variational methods in Lorentzian geometry**, Pitman Research Notes in Mathematics **309**, Longman, London, 1994
- [McDSa98] D. McDuff, D. Salamon, **Introduction to Symplectic Topology**, Oxford University Press, 1998
- [Mi57] J.W. Milnor, **On Spaces having the Homotopy Type of a CW-Complex**, Trans. Amer. Math. Soc. **90**, 1957, 272-280
- [Mi69] J.W. Milnor, **MORSE THEORY**, Princeton University Press, 1969
- [MiSta74] J.W. Milnor, J.D. Stasheff, **Characteristic Classes**, Princeton University Press, 1974
- [MLa72] S. Mac Lane, **Kategorien-Begriffssprache und mathematische Theorie**, Springer-Verlag, 1972
- [Mo73] M. Morse, **Variational Analysis**, Wiley-Interscience, 1973
- [MPP05] M. Musso, J. Pejsachowicz, A. Portaluri, **A Morse Index Theorem for Perturbed Geodesics on Semi-Riemannian Manifolds**, Topological Methods in Nonlinear Analysis **25**, 2005, 69-99
- [MPT00] F. Mercuri, P. Piccione, D. Tausk, **Stability of the Focal and the Geometric Index in Semi-Riemannian Geometry via the Maslov-Index**, arxiv:math.DG/9905096 v3, 2000
- [MPT01] F. Mercuri, P. Piccione, D. Tausk, **Classical and Modern Morse Theory with Applications**, 2001, erhältlich unter:
[http://www.ime.usp.br/~piccione/Downloads/Mercuri_Piccione_Tausk\(pdf\).zip](http://www.ime.usp.br/~piccione/Downloads/Mercuri_Piccione_Tausk(pdf).zip)
- [MPT02] F. Mercuri, P. Piccione, D. Tausk, **Stability of the Focal and the Geometric Index in Semi-Riemannian Geometry via the Maslov-Index**, Pacific J. Math. **206**, 2002, 375-400
- [ONei83] B. O' Neill, **Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity**, Academic Press, 1983

- [Nic96] L.I. Nicolaescu, **Lectures on the Geometry of Manifolds**, World Scientific, 1996
- [Pa63] R.S. Palais, **Morse Theory on Hilbert Manifolds**, *Topology* **2**, 1963, 299-340
- [Pa65] R.S. Palais, **On the Homotopy Type of Certain Groups of Operators**, *Topology* **3**, 1965, 271-279
- [Phi96] J. Phillips, **Self-Adjoint Fredholm Operators and Spectral Flow**, *Canad. Math. Bull.* **39**, 1996, 460-467
- [PP05] P. Piccione, A. Portaluri, **A Bifurcation Result for Semi-Riemannian Trajectories of the Lorentz Force Equation**, *J. Diff. Equ.* **210**, 2005, 233-262
- [PPT04] P. Piccione, A. Portaluri, D.V. Tausk, **Spectral Flow, Maslov Index and Bifurcation of Semi-Riemannian Geodesics**, *Ann. Glob. Ana. Geom.* **25**, 2004, 121-149
- [PT88] R.S. Palais, C-l Terng, **Critical Point Theory and Submanifold Geometry**, Springer-Verlag, 1988
- [PT00] P. Piccione, D.V. Tausk, **The Maslov Index and a Generalized Morse Index Theorem for Non-Positive Definite Metrics**, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **331**, Serie 1, 2000, 385-389
- [PT00a] P. Piccione, D.V. Tausk, **On the Geometry of Grassmannians and the Symplectic Group: the Maslov Index and its Applications**, *Notes for a short course given at the XI Escola de Geometria Diferencial, Universidade Federal Fluminense, Niteroi, RJ, Brazil*, 2000, erhältlich unter:
<http://www.ime.usp.br/~piccione/Downloads/NotasXIEscola.pdf>
- [PT01] P. Piccione, D.V. Tausk, **On the Banach Differential Structure for Sets of Maps on Non-Compact Domains**, *Nonlinear Analysis* **46**, 2001, 245-265
- [PT02] P. Piccione, D.V. Tausk, **The Morse Index Theorem in Semi-Riemannian Geometry**, *Topology* **41**, 2002, 1123-1159
- [PT03] P. Piccione, D.V. Tausk, **On the Distribution of Conjugate Points along Semi-Riemannian Geodesics**, *Comm. Anal. Geom.* **11**, 2003, 33-48
- [Rud99] W. Rudin, **Reelle und Komplexe Analysis**, Oldenbourg Verlag, 1999
- [Ruz04] M. Ruzicka, **Nichtlineare Funktionalanalysis**, Springer-Verlag, 2004
- [RS93] J. Robbin, D. Salamon, **The Maslov Index for Paths**, *Topology* **32**, 1993, 827-844

- [RS95] J. Robbin, D. Salamon, **The Spectral Flow and the Maslov Index**, Bull. London Math. Soc. **27**, 1995, 1-33
- [Sch93] M. Schwarz, **Morse Homology**, Birkhäuser, 1993
- [Ste51] N. Steenrod, **The Topology of Fibre-Bundles**, Princeton University Press, 1951
- [Swi02] R. M. Switzer, **Algebraic Topology-Homology and Homotopy**, Springer-Verlag, 2002
- [Te01] G. Teschl, **Nonlinear Functional Analysis**, Vorlesungsmanuskript, erhältlich unter: <http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-nlfa/nlfa.pdf>
- [Var84] V.S. Varadarajan, **Lie Groups, Lie Algebras and their Representations**, Springer-Verlag, 1984
- [Wal98] W. Walter, **Ordinary Differential Equations**, Springer-Verlag, 1998
- [Wei80] J. Weidmann, **Linear Operators in Hilbert Space**, Springer-Verlag, 1980
- [Wer05] D. Werner, **Funktionalanalysis**, 5. Auflage, Springer-Verlag, 2005
- [Zie89] W.P. Ziemer, **Weakly Differentiable Functions**, Springer-Verlag, 1989