Bott-Periodizität für C^*-Algebren

Thomas Schick*
Fakultät für Mathematik
Universität Göttingen
Bunsenstrasse 3
37073 Göttingen
Germany

Last edited May 30, 2002 or later — last compiled: 20. Januar 2004

Zusammenfassung

Hier beweisen wir Bott-Periodizität für die K-Theorie von C^*-Algebren mittels Cuntz'Methode, welche die Toeplitz-Algebra benutzt. Quellen: [1, 9.4.2], [4, 11.2], das Original ist [2, Section 3].

Ehe wir starten, noch ein einfaches Resultat, dass man aus der langen exakten K-Theorie Sequenz einer kurzen exakten Sequenz von C^*-Algebren folgern kann.

theo:split_exactness

1 Theorem. *Sei $0 \to I \to A \xrightarrow{q} B \to 0$ eine spaltende exakte Sequenz von C^*-Algebren, d.h. es existiere $j\colon B \to A$ ein C^*-Algebrenhomomorphismus so dass $q \circ j = \mathrm{id}_B$. Dann zerfällt die lange exakte Sequenz in K-Theorie in spaltende kurze exakte Sequenzen*

$$0 \to K_n(I) \to K_n(A) \to K_n(B) \to 0 \qquad \forall n \geq 0.$$

Proof. Zunächst wissen wir, dass Suspension von C^*-Algebren ein Funktor ist, der aus exakten Sequenzen wieder exakte Sequenzen macht. Natürlichkeit impliziert, dass $K_n(q) \circ K_n(j) = \mathrm{id}_{K_n(B)}$, also ist insbesondere $K_n(q)$ surjektiv. Damit ergibt sich die Behauptung aus der langen exakten Sequenz

$$\cdots \to K_{n+1}(B) \to K_n(I) \to K_n(A) \to K_n(B) \to K_{n-1}(I) \to \cdots$$

□

2 Remark. Beachte, dass ein Spalt für eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to I \to A \to B \to 0$$

nicht impliziert, dass A in der Kategorie der C^*-Algebren als direkte Summe von I und B zerfällt (ähnlich wie in der Kategorie der Gruppen können wir eine Art "semidirekte Produkte" erhalten).

*e-mail: schick@uni-math.gwdg.de
www: http:www.uni-math.gwdg.de/schick

theo:Bott **3 Theorem.** *Es gibt natürlichen Isomorphismus*

$$K_0(A) \xrightarrow{\cong} K_0(S^2A) = K_0(A \otimes C_0(\mathbb{R}^2)) = K_2(A). \qquad (4)$$ eq:bott

Natürlich heißt, dass für einen C^*-Homomorphismus $f\colon A \to B$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} K_0(A) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_*"] & K_0(S^2A) \arrow[d, "f_*"] \\ K_0(B) \arrow[r, "\cong"] & K_0(S^2B). \end{tikzcd}$$

5 Corollary. *Sei $0 \to I \to A \to B \to 0$ eine exakte Sequenz von C^*-Algebren. Dann erhält man eine natürliche zyklische 6-Term exakte Sequenz*

$$\begin{tikzcd} K_0(I) \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] & K_0(B) \arrow[d] \\ K_1(B) \arrow[u] & K_1(A) \arrow[l] & K_1(I). \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Proof. Wir wissen bereits, dass $K_2(B) \to K_1(I) \to K_1(A) \to K_1(B) \to K_0(I) \to K_0(A) \to K_0(B)$ exakt ist. Man muss nun nur noch $K_0(B)$ mit $K_2(B)$ mittels des Bott-Periodizitätsisomorphismus identifizieren. Natürlichkeit folgt, da sowohl Bott-Periodizität als auch die übrigen Abbildungen in der langen exakten Sequenz natürlich sind. □

Nun geht es darum, Theorem 3 zu beweisen. Hierfür gibt es eine ganze Reihe von Beweisen. Die ursprünglichen Beweise wurden für kommutative C^*-Algebren geführt, können aber auf beliebige C^*-Algebren verallgemeinert werden (vergleiche [3, Chapter 11] oder [4, Chapter 9]).

Besonders allgemein sind vielleicht Beweise mittels bivarianter KK-Theorie oder E-Theorie. Man muss dazu zunächst sehr viel technischen Aufwand treiben, um diese Tools zu entwickeln (was wir in dieser Vorlesung vermieden haben). Danach ist allerdings der Beweis nicht mehr gar zu schwierig.

Wir folgen hier einem von Cuntz gegebenen Beweis, der in entscheidender Form die nichtkommutative Toeplitz-Algebra verwendet.

6 Definition. Sei $S\colon l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ der einseitige Verschieber, welcher auf den Standard-Basisvektoren durch

$$S(e_k) = e_{k+1}; \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

definiert ist. Sei $\mathcal{T}$ die von S erzeugte C^*-Unteralgebra von $\mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))$.

lem:Toeplitz_quotient **7 Lemma.** *$\mathcal{T}$ ist eine unitale C^*-Algebra, welche die kompakten Operatoren $\mathbb{K}$ als Ideal enthält. Man hat folgende exakte Sequenz:*

$$0 \to \mathbb{K} \to \mathcal{T} \to C(S^1) \to 0, \qquad (8)$$ eq:Toeplitz_ext

d.h. der Quotient $\mathcal{T}/\mathbb{K}$ ist isomorph zur kommutativen C^*-Algebra $C(S^1)$.

Die Toeplitz-Algebra ist die universelle Algebra mit einer Isometrie in folgendem Sinn: falls A eine unitale C^*-Algebra mit einer Isometrie $s \in A$ (d.h. $s^*s = 1$), dann gibt es genau einen C^*-Algebrenhomomorphismus $f\colon \mathcal{T} \to A$ mit $f(S) = s$.

Proof. $S^*: l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ ist der Linksshift mit $S^*(e_k) = e_{k-1}$ für $k \geq 2$ und $S^*(e_1) = 0$. Es folgt, dass $S^*S = 1 \in \mathcal{T}$. Wir sehen außerdem, dass $1 - S^*S = P_1$, die orthogonale Projektion auf den ersten Basisvektor (bzw. den davon aufgespannten Unterraum). Allgemeiner gilt $1 - S^k(S^*)^k$ ist die Projektion P_k auf den Unterraum, welcher von den ersten k Basisvektoren aufgespannt wird. Durch geeignete Linearkombinationen kann man aus diesen Operatoren jede endliche Matrix bilden, also $M_\infty(\mathbb{C}) \subset \mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))$ liegt in $\mathcal{T}$. Die C^*-Algebra $\mathcal{T}$ ist aber Norm-Abgeschlossen, also gilt

$$\mathbb{K} = \overline{M_\infty(\mathbb{C})} \subset \mathcal{T}.$$

Sei $\pi: \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathbb{K}$ die Projektion. Wie bereits gesehen, gilt $S^*S = 1$ und $SS^* = 1 - P_1$, mit $P_1 \in \mathbb{K}$. Es folgt dass $\pi(S)\pi(S^*) = 1 = \pi(S^*)\pi(S)$. Da die Quotientenalgebra von $\pi(S)$ (und $\pi(S^*)$) erzeugt wird, ist sie also insbesondere kommutativ. $\pi(S)$ ist unitär, insbesondere normal.

$\pi(S)$ kann natürlich auch als unitäres Element in $\mathbb{B}/\mathbb{K}$ aufgefasst werden, und repräsentiert ein nichttriviales Element in $K_1(\mathbb{B}/\mathbb{K})$, da der Index von S genau -1 ist. Zur Erinnerung, die Abbildung

$$K_1(\mathbb{B}/\mathbb{K}) \to K_0(\mathbb{K}) = \mathbb{Z}$$

ist ein Isomorphismus, und ist gegeben dadurch, dass man einen Lift (z.B. S) für einen Repräsentanten (z.B. $\pi(S)$) eines K_1-Elements wählt, und dessen Fredholm-Index berechnet.

Andererseits liegt $[\pi(S)] \in K_1(\mathbb{B}/\mathbb{K})$ im Bild von

$$K_1(C(Spec(\pi(S)))) = K_1(\mathcal{T}/K) \to K_1(\mathbb{B}/\mathbb{K}).$$

Nach Spektralsatz wird der unitäre Operator $\pi(S)$ in $\mathcal{T}/\mathbb{K} = C(Spec(\pi(S)))$ durch die Funktion $z \mapsto z$ repräsentiert. Wäre $Spec(\pi(S)) \neq S^1$, dann könnte man $\pi(S)$ durch Einschränken der Funktion $z \mapsto z$ von einem abgeschlossenen echten Teilinterval I von S^1 (welches ganz $Spec(\pi(S))$ enthält) erhalten.

Insbesondere läge $[\pi(S)] \in K_1(\mathbb{B}/\mathbb{K})$ im Bild einer Abbildung $0 = K_1(C(I)) \to K_1(\mathbb{B}/\mathbb{K})$ (Verknüpfung der Einschränkung von I) auf $Spec(\pi(S))$ mit der Inklusion $\mathcal{T}/\mathbb{K} \to \mathbb{B}/\mathbb{K}$). Dies ist ein Widerspruch.

Für die Universalitätsaussage beachte, dass die Eindeutigkeit von f daraus folgt, dass $\mathcal{T}$ von S als C^*-Algebra erzeugt wird. Es bleibt also, die Existenz des Homomorphismus zu beweisen. Mit der GNS-Konstruktion können wir annehmen, dass $v \in B(H)$ eine Isometrie eines Hilbertraums H ist (also $v^*v = 1$). Dann ist vv^* eine Projektion auf $\mathrm{im}(v) = \ker(v^*)^\perp$. Setze $N := \ker(v^*)$.

Dann gilt $v^i(H) \perp v^j(N)$ für $i > j$,da $\langle v^i x, v^j y\rangle = \langle x, (v^*)^{i-j} y\rangle = 0$ falls $y \in N$. Setze $H_1 := \bigoplus_{i=0}^\infty v^i(N)$. Falls sogar $x \perp v^i(N)$ für alle $i \geq 0$, dann $(v^*)^i x \perp N$. Daraus folgt induktiv (da $vv^*(z) = z$ für $z \in N^\perp$), dass $x = vv^*x = v(vv^*v^*x) = v^i(y)$ mit $y = (v^*)^i x$, also $x \in H_0 := \bigcap_{n=1}^\infty v^n(H)$.

Insgesamt erhalten wir eine orthogonale Zerlegung

$$H = H_0 \oplus H_1,$$

welche von v respektiert wird. Die Einschränkung von v auf H_1 ist ein Shift-Operator, der die Unterräume $v^i(N)$ verschiebt. Die Einschränkung von v auf H_0 ist unitär. Es genügt also, den geforderten C^*-Homomorphismus im Falle v unitär bzw. v ein (verallgemeinerter) shift-Operator zu konstruieren (im allgemeinen wird dann der entsprechende diagonale Homomorphismus genutzt werden).

Falls v unitär, also insbesondere normal, so ist die von v erzeugte C^*-Algebra $C^*(v)$ nach Spektralsatz isomorph zu $C(Spec(v))$, $Spec(v) \subset S^1$, und v entspricht der Funktion $z \mapsto z$. Definiere dann $f\colon \mathcal{T} \to C^*(v)$ als Komposition $\mathcal{T} \xrightarrow{\pi} C(S^1) \xrightarrow{\text{restriction}} C(Spec(v))$. Da $\pi(V)$ die Funktion $z \mapsto z$ ist, gilt $f(V) = v$, wie gefordert.

Ist andererseits v ein Verallgemeinerter shift-Operator auf der orthogonalen Summe $H = \bigoplus_{i=0}^{\infty} v^i(N) \cong l^2(\mathbb{N}) \otimes N$, wobei $v^i\colon N \to v^i(N)$ den Isomorphismus zwischen dem i-ten Summanden N in $l^2(\mathbb{N}) \otimes N$ und $v^i(N)$ liefere, so definiere

$$f\colon \mathcal{T} \to \mathcal{B}(H) = \mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}) \otimes N)\colon T \mapsto T \otimes \mathrm{id}_N\,.$$

Unsere Konstruktion des Isomorphismus liefert, dass $f(V) = v$. □

9 Lemma. *Komponiere $\pi\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathbb{K} \cong C(S^1)$ mit der Auswertung an $1 \in S^1$: $q\colon C(S^1) \to \mathbb{C}$. Bezeichne den Kern mit $\mathcal{T}_0$. Dann gilt:*

(1) $\mathbb{K} \subset \mathcal{T}_0$

(2) $\mathcal{T}_0/\mathbb{K} \cong C_0(\mathbb{R})$.

Proof. Die Projektion $\mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{T}_0$ faktorisiert per Konstruktion von $\mathcal{T}_0$ durch die Projektion nach $\mathcal{T}/\mathbb{K}$, also $\mathbb{K} \subset \mathcal{T}_0$. $\mathcal{T}_0$ ist der Kern von $\mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathbb{K} \to \mathbb{C}$, also ist (Homomorphiesatz) $\mathcal{T}_0/\mathbb{K}$ isomorph zum Kern von $C(S^1) = \mathcal{T}/\mathbb{K} \to \mathbb{C}$, also zu $C_0(\mathbb{R})$. □

Hier sieht man, warum die Toeplitz-Algebra nützlich für das Studium von Suspensionen von C^*-Algebren sein kann: $SA = A \otimes C_0(\mathbb{R})$.

Sei nun A eine beliebige C^*-Algebra. Dann gilt

10 Lemma. *Durch Tensorieren erhält man aus den kurzen exakten Sequenzen*

$$0 \to \mathbb{K} \to \mathcal{T} \to C(S^1) \to 0$$
$$0 \to \mathbb{K} \to \mathcal{T}_0 \to C_0(\mathbb{R}) \to 0$$

die exakten Sequenzen

$$\begin{aligned} &0 \to A \otimes \mathbb{K} \to A \otimes \mathcal{T} \to A \otimes C(S^1) \to 0 \\ &0 \to A \otimes \mathbb{K} \to A \otimes \mathcal{T}_0 \to SA \to 0. \end{aligned} \qquad (11)$$

eq:toeplitz_ex

Proof. Dies ist ein allgemeines Prinzip: jede kommutative C^*-Algebra (wie $C_0(\mathbb{R})$) ist *nuklear*, und wenn der Quotient in einer kurzen exakten Sequenz nuklear ist, dann bleibt Exaktheit nach Tensorieren erhalten. Wir werden uns in einem späteren Abschnitt diesen Tensorprodukt-Fragen widmen (vgl. Abschnitt). □

12 Definition. Definiere die (inverse) Bott-Abbildung als Verknüpfung der Randabbildung

$$K_0(S^2A) \to K_0(A \otimes \mathbb{K})$$

der langen exakten Sequenz für (11) mit dem kanonischen Isomorphismus $K_0(A \otimes \mathbb{K}) \to K_0(A)$ gegeben durch die Einbettung $A \to A \otimes \mathbb{K}\colon a \mapsto a \otimes e_{11}$.

Alle Konstruktionen in der Definition der inversen Bott-Abbildung sind natürlich, also auch diese. Es bleibt zu zeigen, dass es sich um einen Isomorphismus handelt. Wegen der langen exakten Sequenz in K-Theorie ist dies äquivalent dazu, zu zeigen, dass

$$K_1(A \otimes \mathcal{T}_0) = 0 = K_0(A \otimes \mathcal{T}_0). \tag{13}$$

eq:vanish

Beachte, dass $K_1(A \otimes \mathcal{T}_0) = K_0(C_0(\mathbb{R}) \otimes A \otimes \mathcal{T}_0)$. Da A beliebig gewählt wird, reicht es also aus, $K_0(A \otimes \mathcal{T}_0) = 0$ zu zeigen.

Sei $j\colon \mathbb{C} \to \mathcal{T}$ die unitale Einbettung ($j(1) = 1$). Dies liefert einen Spalt für die exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T} \xrightarrow{q} \mathbb{C} \to 0. \tag{14}$$

eq:split_seq

Da $\mathbb{C}$ kommutativ und somit nuklear ist, erhalten wir durch Tensorieren mit A eine spaltende kurze exakte Sequenz

$$0 \to A \otimes \mathcal{T}_0 \to A \otimes \mathcal{T} \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes q} \mathbb{K} \to 0.$$

prop:K_inverse

15 Proposition. *Die Abbildung* $\mathrm{id}_A \otimes q$ *und* $\mathrm{id}_A \otimes j$ *induzieren auf K-Theorie Abbildungen, die invers zueinander sind.*

16 Corollary. $K_0(A \otimes \mathcal{T}_0) = 0$.

Proof. Die lange exakte Sequenz in K-Theorie liefert für (14)

$$K_1(A \otimes \mathcal{T}) \xrightarrow{K_1(\mathrm{id}_A \otimes q)} K_1(A) \to K_0(A \otimes \mathcal{T}_0) \to K_0(A \otimes \mathcal{T}) \xrightarrow{K_0(\mathrm{id}_A \otimes q)} K_0(A).$$

Nach Proposition 15 sind $K_1(q)$ und $K_0(q)$ Isomorphismen, also wegen Exaktheit $K_0(A \otimes \mathcal{T}_0) = 0$. □

Wie oben erklärt, folgt daraus Bott-Periodizität.

sec:bewe-von-prop

Beweis von Proposition 15

Da A beliebig ist, genügt es, die Aussage für K_0 zu beweisen (für K_1 wird A durch $C_0(\mathbb{R}) \otimes A$ ersetzt).

Wir wollen im Prinzip zeigen, dass $j \circ q$ homotop zur Identität ist (natürlich muss die Abbildung mit id_A tensoriert werden), und dann die Homotopieinvarianz von K-Theorie ausnutzen. Um solche Homotopien konstruieren zu können, brauchen wir Platz. Um diesen Platz zu schaffen, benötigen wir zunächst einige Hilfskonstruktionen. Definiere $\hat{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ als die C^*-Algebra, die von $\mathbb{K} \otimes \mathcal{T}$ und $\mathcal{T} \otimes 1$ erzeugt wird (benutze, dass $\mathbb{K}$ ein Ideal von $\mathcal{T}$, also insbesondere enthalten in $\mathcal{T}$ ist). Es folgt, dass $\mathbb{K} \otimes \mathcal{T}$ ein Ideal von $\hat{\mathcal{T}}$, und wir erhalten die exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{K} \otimes \mathcal{T} \to \hat{\mathcal{T}} \to C(S^1) \to 0. \tag{17}$$

eq:hat_Toeplitz_seq

Den Quotienten berechnen wir in folgendem Lemma:

18 Lemma. $\hat{\mathcal{T}}/\mathbb{K} \otimes \mathcal{T} \cong C(S^1)$.

Proof. Die Abbildung $\mathcal{T} \to \hat{\mathcal{T}}/\mathbb{K} \otimes \mathcal{T} \colon a \mapsto [a \otimes 1]$ enthält $\mathbb{K}$ im Kern und ist surjektiv (da der Quotient vom Bild von $S \otimes 1$ erzeugt ist). Wie im Beweis von Lemma 7 müssen wir zeigen, dass das Spektrum von $[S \otimes 1]$ im Quotienten ganz S^1 ist, und wieder reicht es, zu zeigen, dass die von $[S \otimes 1]$ repräsentierte Klasse in $K_1(\hat{\mathcal{T}}/\mathbb{K} \otimes \mathcal{T})$ nicht trivial ist. Folgendes Diagramm ist kommutativ mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
K_1(\mathcal{T}) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(C(S^{})) \arrow[r] \arrow[d] & K_0(\mathbb{K}) = \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & K_0(\mathcal{T}) \arrow[d] \\
K_1(\hat{\mathcal{T}}) \arrow[r] & K_1(\hat{\mathcal{T}}/\mathbb{K} \otimes \mathcal{T}) \arrow[r, "\delta"] & K_0(\mathbb{K} \otimes \mathcal{T}) \arrow[r] & K_0(\hat{\mathcal{T}}) \arrow[d, "(\mathrm{id}_{\mathbb{K}} \otimes q)_*"] \\
 & & & K_0(\mathbb{K} \otimes \mathbb{C}) = \mathbb{Z}.
\end{tikzcd}$$

Das Element $[\pi(S)] = [z \mapsto z] \in K_1(C(S^{}))$ wird dabei unter der Randabbildung auf 1 geschickt, dann weiter nach $\delta[S \otimes 1] \in K_0(\mathbb{K} \otimes \mathcal{T})$ (wegen Kommutativität), dann weiter nach 1 (da $\mathbb{K} \to \mathbb{K} \otimes \mathcal{T} \to \mathbb{K} \otimes \mathbb{C}$ die Identität ist). Folglich ist die Klasse von $[S \otimes 1] \in K_1(\hat{\mathcal{T}}/\mathbb{K} \otimes \mathcal{T})$ nicht trivial, und wie im Beweis von Lemma 7 folgt, dass dieser Quotient isomorph zu $C(S^1)$ ist. $\square$

Da $C(S^1)$ kommutativ und damit nuklear ist, erhalten wir aus (17) durch Tensorieren mit A die exakte Sequenz

$$0 \to A \otimes \mathbb{K} \otimes \mathcal{T} \to A \otimes \hat{\mathcal{T}} \to A \otimes C(S^1) \to 0. \tag{19}$$

eq:tensor_hat_Toep_seq

Wir benötigen $\hat{T}$ hauptsächlich, um eine zweite C^*-Algebra zu definieren:

$$\overline{\mathcal{T}_A} := \{(x, y) \in A \otimes \hat{\mathcal{T}} \oplus A \otimes \mathcal{T} \mid \hat{\pi}(x) = \pi(y)\},$$

wobei $\hat{\pi} \colon A \otimes \hat{\mathcal{T}} \to A \otimes C(S^1)$ die gerade diskutierte Projektion, und $\pi \colon A \otimes \mathcal{T} \to A \otimes C(S^1)$ die Projektion aus (11).

Wir definieren nun

$$\begin{aligned}
i \colon A \otimes \mathbb{K} \otimes \mathcal{T} \to \overline{\mathcal{T}_A} &\colon x \mapsto (x, 0) \\
\overline{\pi} \colon \overline{\mathcal{T}_A} \to A \otimes \mathcal{T} &\colon (x, y) \mapsto y \\
\gamma \colon A \otimes \mathcal{T} \to \overline{\mathcal{T}_A} &\colon y \mapsto (\mathrm{id}_A \otimes j(y), y)
\end{aligned}$$

wobei $j \colon \mathcal{T} \to \hat{\mathcal{T}} \colon a \mapsto a \otimes 1$, so dass aus der Funktorialität des Tensorprodukts $\mathrm{id}_A \otimes j \colon A \otimes \mathcal{T} \to A \otimes \hat{\mathcal{T}}$ eine wohldefinierte Abbildung mit $\hat{\pi} \circ \mathrm{id}_A \otimes j = \pi$. Daraus folgt, dass alle drei Abbildung i, $\overline{\pi}$ und γ wohldefiniert sind. Aus den Definitionen (und Exaktheit von (19)) erhält man dann die spaltende exakte Sequenz

$$0 \to A \otimes \mathbb{K} \otimes \mathcal{T} \xrightarrow{i} \overline{\mathcal{T}_A} \xrightarrow{\overline{\pi}} A \otimes \mathcal{T} 0 \tag{20}$$

eq:split_inclusion

mit Spalt $\gamma \colon A \otimes \mathcal{T} \to \overline{\mathcal{T}_A}$.

Definiere die (Standard)-Einbettung

$$\sigma \colon A \otimes \mathcal{T} \hookrightarrow A \otimes \mathbb{K} \otimes \mathcal{T} \colon a \otimes T \mapsto a \otimes e_{11} \otimes T = a \otimes (1 - SS^*) \otimes T,$$

wenn wir die Einbettung $\mathbb{K} \hookrightarrow \mathcal{T}$ verwenden. Beachte, dass diese Abbildung sich zur üblichen Inklusion $A \otimes \mathcal{T} \hookrightarrow A \otimes \mathcal{T} \otimes \mathbb{K}$ fortsetzt, wenn man den

Isomorphismus $A \otimes \mathcal{T} \otimes \mathbb{K} \to A \otimes \mathbb{K} \otimes \mathcal{T}$ verwendet, der durch vertauschen der letzten beiden Faktoren gegeben wird.

Betrachte nun die Komposition

$$A \otimes \mathcal{T} \xrightarrow{\sigma} A \otimes \mathbb{K} \otimes \mathcal{T} \xrightarrow{i} \overline{\mathcal{T}_A}.$$

Wegen Stabilität der K-Theorie unter Tensorieren mit $\mathbb{K}$ induziert die erste Abbildung einen Isomorphismus in K-Theorie. Wegen Theorem 1 und (20) induziert die zweite Abbildung ein spaltende Injektion in K-Theorie.

Zum Beweis von Proposition 15 müssen wir nur zeigen, dass $\mathrm{id}_A \otimes q \circ j$ und $\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{T}}$ auf $K_0(A \otimes \mathcal{T})$ die gleiche Abbildung induzieren. Wir wissen ja bereits, dass $q \circ j = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

Wegen der erzielten Injektivitätsresultate reicht es also aus, zu zeigen, dass

$$K_0(i \circ \sigma \circ \mathrm{id}_A \otimes (j \circ q)) = K_0(i \circ \sigma). \tag{21}$$ eq:equality

Wir konstruieren nun einige Elemente in $\hat{\mathcal{T}}$, die bei der Konstruktion der Homotopie, die wir suchen, gebraucht werden.

$$v := S \otimes 1, \qquad w := (1 - SS^*) \otimes S, \qquad e := (1 - SS^*) \otimes (1 - SS^*).$$

22 Lemma. *Die Elemente*

$$\begin{aligned} u_0 &:= v^2(v^*)^2 + wv^* + vw^* + e \\ u_1 &:= v^*(v^*)^2 + (1 - vv^*)v^* + v(1 - vv^*) \end{aligned}$$

sind selbstadjungiert und unitär in $\hat{\mathcal{T}}$.

Proof. Selbstadjungiert ist klar. Unitär rechnet man nach. Verwende: $v^*v = 1$, $v^*w = v^*w^* = w^*v = wv = v^*e = ev = w^*e = ew = 0$, $e^2 = 4$, $ww^* = w^*w - e$. Geometrisch vertauscht u_1 den ersten mit dem zweiten Block im Hilbertraum $l^2(\mathbb{N})$ und ist die Identität wenn eingeschränkt auf das Komplement. Eine Interpretation von u_0 ist nicht ganz so leicht, da hier die beiden Richtungen vermischt werden. □

Die selbstadjungierten unitären Elemente liefern uns Homotopien mittels des folgenden Resultats:

lem:Pfad_zw_Symmetrien **23 Lemma.** *Sei A eine unitale C^*-Algebra, $u \in A$ selbstadjungiert und unitär. Dann gibt es eine stetige Abbildung $f\colon [0,1] \to U(A)$ in die unitären Elemente von A mit $f(0) = 1$ und $f(1) = u$.*

Proof. Definiere $f(t) = \exp(i\pi(1-u)/2)$. Dies ist nach Spektralsatz definiert und liefert für jedes t ein unitäres Element, da u selbstadjungiert ist. Es gilt $f(0) = 1$. Da u außerdem unitär gilt $(1-u)^2 = 2(1-u)$, also per Induktion $(1-u)^n = 2^{n-1}(1-u)$.

Damit berechnet man (mit Reihenentwicklung)

$$\begin{aligned} f(1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\pi(1-u)/2)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\pi)^n}{n!} \frac{(u-1)}{2} \\ &= 1 + \frac{(u-1)}{2}(\exp(i\pi) - 1) = u. \end{aligned}$$

□

Wir erhalten also eine Homotopie $(u_t)_{0\le t\le 1}$ von unitären Elementen in $\hat{\mathcal{T}}$ mit u_0 und u_1 den vorher definierten Elementen. Beachte, dass $\hat\pi(u_0) = \hat\pi(u_1) = 1 \in C(C^1)$ (das Bild von v ist unitär, das Bild von w und e Null). Die Konstruktion des Pfades u_t wie im Beweis von Lemma 23 ist funktoriell, und liefert den konstanten Pfad, wenn Anfangs- und Endpunkt bereits 1 sind. Insbesondere gilt $\hat\pi(u_t) = 1$ für alle t.

Mittels der universellen Eigenschaft der Toeplitzalgebra definiert dies nun Homotopien von C^*-Homomorphismen

$$\begin{aligned} \alpha_t\colon \mathcal{T} &\to \hat{\mathcal{T}} && S \mapsto u_t v,\\ \beta_t\colon A\otimes\mathcal{T} &\to \overline{\mathcal{T}_A} && x \mapsto ((\mathrm{id}_A \otimes \alpha_t)(x), x). \end{aligned}$$

Beachte, dass die Abbildung β_t definiert ist, das $\hat\pi(u_t) = 1$ für alle $0 \le t \le 1$.

Entscheidend ist nun, dass β_0 und β_1 homotop sind. Außerdem berechnet man

$$\begin{aligned} \beta_0(a\otimes S) &= (a\otimes(v^2v^* + w), a\otimes S)\\ \beta_1(a\otimes S) &= (a\otimes(v^2v^*(1-vv^*)), a\otimes S). \end{aligned}$$

Wenn $r\colon \mathcal{T}\to\hat{\mathcal{T}}$ durch $r(S) = v^2v^*$ gegeben ist, definiere nun noch

$$\beta\colon A\otimes\mathcal{T} \to \overline{\mathcal{T}_A}\colon x \mapsto ((\mathrm{id}_A \otimes r)(x), x).$$

Damit sieht man

$$\beta + i\circ\sigma = \beta_0, \qquad \beta + i\circ\sigma\circ \mathrm{id}_A \otimes (j\circ q) = \beta_1 \tag{24}$$ eq:comparison

(es genügt, dies für Elemente der Gestalt $a\otimes S$ zu überprüfen, da diese die C^*-Algebra $A\otimes\mathcal{T}$ erzeugen).

lem:additivity **25 Lemma.** *Sei $f, g\colon A\to B$ zwei C^*-Homomorphismen mit $f(a)g(a') = 0$ für alle $a, a' \in A$. Dann ist $f+g\colon A\to B$ auch ein C^*-Homomorphismus, und es gilt*

$$K_0(f) + K_0(g) = K_0(f+g).$$

Proof. Die Orthogonalitätsvoraussetzung impliziert dass $f+g$ multiplikativ und demzufolge ein C^*-Homomorphismus ist. Die Bilder $\mathrm{im}(f)$ und $\mathrm{im}(g)$ sind C^*-Unteralgebren von B, deren direkte Summe wegen der Orthogonalität ebenfalls C^*-Unteralgebra von B ist. Wir erhalten also die Faktorisierung

$$\begin{aligned} f\colon A &\to \mathrm{im}(f) \to \mathrm{im}(f)\oplus\mathrm{im}(g) \hookrightarrow B\\ g\colon A &\to \mathrm{im}(g) \to \mathrm{im}(f)\oplus\mathrm{im}(g) \hookrightarrow B\\ f+g\colon A &\to \mathrm{im}(f)\oplus\mathrm{im}(g) \hookrightarrow B. \end{aligned}$$

Wegen Natürlichkeit genügt es, $K_0(f)+K_0(g) = K_0(f+g)$ als Abbildungen von $K_0(A)$ nach $K_0(\mathrm{im}(f)\oplus\mathrm{im}(g))$ zu zeigen. Dies folgt, da $K_0(\mathrm{im}(f)\oplus\mathrm{im}(g)) = K_0(\mathrm{im}(f))\oplus K_0(\mathrm{im}(g))$ (mittels der kanonischen Projektionen und Injektionen), und $K_0(f+g)$ zerlegt sich bezüglich dieser Dekomposition in der offensichtlichen Weise (all dies folgt ganz abstrakt aus der Exaktheit, man könnte aber natürlich auch direkt die Definitionen zur Begründung benutzen). □

Damit ist der Beweis von Proposition 15 beendet: da β_0 und β_1 homotop sind, sind die induzierten Abbildungen in K_0 gleich. Aus Lemma 25 erhält man damit mittels (24)

$$K_0(i \circ \sigma) = K_0(i \circ \sigma \circ \mathrm{id}_A \otimes (j \circ q)) = K_0(i \circ \sigma) K_0(\mathrm{id}_A \otimes (j \circ q)), \tag{26}$$

eq:final

und wegen der Injektivität von $K_0(i \circ \sigma)$ folgt $K_0(\mathrm{id}_A \otimes (j \circ q)) = \mathrm{id}_{K_0(A \otimes \mathcal{T})}$.

sec:bemerkungen

Bemerkungen

rem:homology_imlies_Bott

27 Remark. Für diesen Beweis von Bott-Periodizität haben wir nicht die explizite Definition von K-Theorie benutzt, sondern nur einige “homologische” Eigenschaften:

(1) Der Isomorphismus $K(A) \to K(A \otimes \mathbb{K})$

(2) Die lange exakte K-Theoriesequenz einer kurzen exakten Sequenz von C^*-Algebren

(3) Homotopieinvarianz: homotope C^*-Homomorphismen induzieren dieselbe Abbildung in K-Theorie.

Es folgt, dass jeder Funktor von der Kategorie der C^*-Algebren in die Kategorie der abelschen Gruppen, welcher diese Eigenschaften erfüllt (im gewissen Sinn sind das die Axiome einer Homologietheorie auf der Kategorie der C^*-Algebren) auch Bott-Periodizität erfüllen muss.

Diese zusätzliche Folgerung ist einer der Pluspunkte dieses speziellen Beweises von Bott-Periodizität.

28 Remark. Unglücklicherweise wird die Bott-Periodizitätsabbildung hier etwas indirekt definiert (mittels der Randabbildung der langen exakten Sequenz einer kurzen Sequenz von C^*-Algebren, ...). Wegen Bemerkung 27 ist dies bei diesem Zugang nicht anders möglich. Man kann alternativ auch direkte Konstruktionen der Bott-Abbildung angeben (im Prinzip kann man eine solche natürlich auch aus unserer Beschreibung herleiten). Die prominenteste Definition ist die folgende:

Sei $p \in M_n(A_+)$ eine Projektion, so dass $[p] - 1_k$ ein Element in $K_0(A)$ repräsentiert. Ordne p folgende Schleife $f \colon S^1 \to U_n(A)$ zu:

$$f_p(z) = zp + (1_n - p) = 1_n p(z - 1).$$

Man rechnet nach, dass $f(z)$ unitär ist mit $f(1) = 1_n$, d.h. f liefert ein unitäres Element in $M_n(SA_+)$, seine Homotopieklasse repräsentiert damit ein Element in $K_1(SA)$.

Die Abbildung $K_0(A) \ni [p] - [q] \mapsto [f_p f_q^*] \in K_1(SA)$ ist die Bott-Abbildung (insbesondere wohldefiniert und ein natürlicher Gruppenisomorphismus).

Da man in der Regel diese konkrete Beschreibung doch nicht benutzen kann, wird diese Aussage nicht bewiesen.

sec:tensor

Tensorprodukte und Nuklearität

Das Ziel dieses Abschnitts ist folgender, oben des öfteren verwendete Satz:

theo:tensor_exact

29 Theorem. *Sei B eine kommutative C^*-Algebra,*

$$0 \to I \to A \to B \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von C^*-Algebren und C eine weitere C^*-Algebra. Dann ist auch

$$0 \to C \otimes I \to C \otimes A \to C \otimes B \to 0$$

exakt.

Leider benötigt man für diesen Satz ein wenig mehr Theorie: wir müssen uns etwas genauer mit Tensorprodukten von C^*-Algebren beschäftigen. Ausgangspunkt ist immer das algebraische Tensorprodukt $A \odot B$. Es handelt sich hierbei um eine $*$-Algebra.

30 Definition. Eine C^*-Algebra A heißt *nuklear*, falls es für jede C^*-Algebra B nur eine Norm auf $A \odot B$ gibt, welche eine C^*-Norm ist.

Wir wissen bereits (mittels der GNS-Konstruktion), dass es eine solche Norm gibt, die entsprechende Vervollständigung nennen wir $A \otimes B$. Wenn es andere C^*-Normen gibt, gibt es andere C^*-Vervollständigungen von $A \odot B$.

Theorem 29 folgt nun aus folgenden beiden Resultaten:

theo:nuklear

31 Theorem. *Jede kommutative C^*-Algebra ist nuklear.*

theo:nuklear_exakt

32 Theorem.

$$0 \to I \to A \to B \to 0$$

sei eine kurze exakte Sequenz von C^*-Algebren und C eine weitere C^*-Algebra. Sei entweder B oder C nuklear. Dann ist auch

$$0 \to C \otimes I \to C \otimes A \to C \otimes B \to 0$$

exakt.

Proof. Betrachte zunächst die algebraischen Tensorprodukte. Es handelt sich einfach um das Tensorprodukt von Vektorräumen. Hierbei bleibt Exaktheit erhalten, d.h. die Sequenz

$$0 \to C \odot I \to C \odot A \to C \odot B \to 0 \qquad (33)$$

eq:algebraic_exact

ist exakt. Insbesondere ist $C \odot A \to C \odot B$ surjektiv. Da $C \odot B$ dicht in $C \otimes B$, und das Bild eines C^*-Homomorphismus immer abgeschlossen ist, ist $C \otimes A \to C \otimes B$ ebenfalls surjektiv.

$C \odot I \to C \odot A$ ist injektiv. Besser noch, die Inklusion $I \to A$ ist isometrisch (da es sich um eine C^*-Inklusion handelt), und die Identität auf C ist sowieso eine Isometrie. Wir verwenden zur Definition von $I \otimes A$ eine Inklusion von $I \hookrightarrow \mathcal{B}(H)$, welche als Einschränkung einer Inklusion $A \to \mathcal{B}(H)$ gegeben ist. Dann ist auch die Inklusion $C \odot I \to C \odot A$ eine isometrische Einbettung (nach Konstruktion) und damit auch die Fortsetzung auf die Vervollständigungen $C \otimes I \to C \otimes A$ isometrische Einbettung, insbesondere injektiv.

Aus Natürlichkeit des Tensorprodukts folgt, dass die Verkettung $C \otimes I \to C \otimes A \to C \otimes B$ die Nullabbildung ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\ker(C \otimes A \to C \otimes B)$ ganz von $\mathrm{im}(C \otimes I \to C \otimes A)$ aufgefüllt wird.

Definiere $I := \operatorname{im}(C \otimes I)$. Dies ist aus folgendem Grund ein Ideal in $C \otimes A$: Beachte, dass $\operatorname{im}(C \odot I) \subset C \odot A) = \ker(C \odot A \to C \odot B)$, also ist das algebraische Bild ein Ideal in $C \odot A$. Die Multiplikation ist stetig und $\operatorname{im}(C \otimes I)$ ist als Bild eines C^*-Homomorphismus abgeschlossen, enthält also insbesondere den Abschluss von $\operatorname{im}(C \odot I)$ (ist sogar gleich). Sei $x \in C \otimes I$, $x = \lim x_i$ mit $x_i \in C \odot I$ und $a \in C \otimes A$ mit $a = \lim a_j$ ($a_j \in C \odot A$). Dann gilt $xa = \lim(x_i a_j)$ und $ax = \lim(a_j x_i)$ liegt im Abschluss von $\operatorname{im}(C \odot I)$, also in $\operatorname{im}(C \otimes I)$.

Bei den algebraischen Tensorprodukten, da wir es mit Vektorräumen zu tun haben, ist die Wir haben nun folgende Kette von Algebrenhomomorphismen

$$\begin{aligned} C \odot B \cong C \odot A / \operatorname{im}(C \odot I) \to C \otimes A / \operatorname{im}(C \otimes I) \\ \to C \otimes A / \ker(C \otimes A \to C \otimes B) \cong C \otimes B. \end{aligned}$$

Die Verknüpfung ist genau die Inklusion von $C \odot B$ in seine C^*-Vervollständigung $C \otimes B$. Insbesondere folgt daraus, dass auch die Abbildung von $C \cdot B$ nach $C \otimes A / \operatorname{im}(C \otimes I)$ eine Inklusion in eine C^*-Algebra ist, und zwar ebenfalls mit dichtem Bild. Da das Bild von $C \odot A$ dicht in $C \otimes A$ liegt, gilt das gleiche für das Bild von $C \odot A / \operatorname{im}(C \odot I)$ in $C \otimes A / \operatorname{im}(C \otimes I)$.

Nach Voraussetzung gibt es aber nur eine C^*-Vervollständigung von $C \odot B$, also muss die Abbildung $C \otimes A / \operatorname{im}(C \otimes I) \to C \otimes A / \ker(C \otimes A \to C \otimes B)$ ein Isomorphismus sein, und somit $\operatorname{im}(C \otimes I) = \ker(C \otimes A \to C \otimes B)$, wie zu zeigen war. □

Es ist etwas aufwendiger, zu zeigen, dass jede kommutative C^*–Algebra nuklear ist. Wir lassen einige Details aus und konzentrieren uns auf die entscheidenden Ideen. Wir benutzen, dass jede kommutative C^*-Algebra von der Gestalt $C_0(X)$ für einen geeigneten lokal kompakten Hausdorffraum X ist.

lem:commutative_tensor

34 Lemma. *Seien X und Y lokalkompakte Hausdorffräume. Dann gibt es nur eine C^*-Norm auf $C_0(X) \odot C_0(Y)$, und die Vervollständigung ist isomorph zu $C_0(X \times Y)$.*

Proof. Die Algebra $C_0(X) \odot C_0(Y)$ ist kommutativ, also ist jede C^*-Vervollständigung isomorph zu $C_0(Z)$ für geeignetes Z. Sei $|\cdot|_Z$ die zugehörige Norm.

Wir konstruieren nun eine Inklusion $Z \to X \times Y$. Nimm zunächst an, dass X und Y kompakt sind. Zu jedem Punkt $z \in Z$ gehört ein $|\cdot||_Z$-stetiger Homomorphismus $C_0(X) \odot C_0(Y) \to \mathbb{C}$, der durch Auswerten an z gegeben ist. Dies liefert einen C^*-Homomorphismus $C_0(X) \to \mathbb{C}\colon f \mapsto f \otimes 1(z)$. Da die C^*-Norm auf $C_0(X)$ (wie auf jeder C^*-Algebra) eindeutig ist, ist dieser Homomorphismus stetig bezüglich der üblichen Norm. Der Struktursatz für kommutative C^*-Algebren sagt, dass er durch auswerten an einem Punkt $x \in X$ gegeben ist. Entsprechend liefert $C_0(Y) \to \mathbb{C}\colon g \mapsto (1 \otimes g)(z)$ einen Punkt $y \in Y$. Der Struktursatz sagt außerdem, dass ein konvergentes Netz von Punkten z_i einem (bezüglich einer geeigneten Topologie) konvergenten Netz von Homomorphismen entspricht, welches wieder (durch Einschränken) konvergente Netze von Punkte x_i und y_i liefert.

Falls X und Y nicht kompakt, modifiziere das Argument mit approximativen Einheiten. Die Abbildung $Z \to X \times Y$ ist nun gegeben, indem wir z auf das Tupel (x, y) abbilden. Dies ist stetig und injektiv, da "Auswerten an z" schon durch die dichte Teilmenge $C_0(X) \odot C_0(Y)$ eindeutig festgelegt ist.

Unser Abschluss $C_0(X)\odot C_0(Y)$ ist also $C_0(Z)$ für eine Teilmenge $Z \subset X\times Y$ (mit der Supremumsnorm), und (nach unserer Konstruktion der Einbettung $Z \hookrightarrow X \times Y$) ist die Abbildung $C_0(X) \odot C_0(Y) \to C_0(Z)$ so gegeben, dass man erst kanonisch nach $C_0(X \times Y)$ geht und dann auf Z einschränkt.

Diese Verknüpfung ist injektiv, somit kann im Komplement von Z in $X \times Y$ keine offene Teilmenge U enthalten sein (sonst bastelte man ein nichttriviales Element von $C_0(X) \odot C_0(Y)$, dessen Träger in U enthalten wäre, und das somit im Kern läge). Andererseits muss $Z \subset X \times Y$ abgeschlossen sein, sonst könnte man für $(x, y \in \overline{Z} \setminus Z$ eine Funktion $f \otimes g \in C_0(X) \odot C_0(Y)$ konstruieren mit $f \otimes g(x, y) \neq 0$, so dass die Einschränkung nicht in $C_0(Z)$ liegen könnte.

Also gilt $Z = X \times Y$, und somit auch $C_0(Z) = C_0(X \times Y)$. □

35 Theorem. *Falls X ein lokalkompakter Hausdorffraum und A eine beliebige C^*-Algebra, dann gibt es nur eine C^*-Norm auf $C_0(X) \odot A$, und ihre Vervollständigung ist isomorph zu $C_0(X; A)$, den stetigen Funktionen auf X mit Werten in A (und mit der Supremumsnorm).*

Proof. Wie im Beweis von Lemma 34 benutzt man “Auswerteabbildungen” bzw. die nichtkommutative Entsprechung, sogenannte reine Zustände. Unter Benutzung von Lemma 34 kann man dann zeigen, dass jede beliebige C^*-Norm auf $C_0(X) \odot A$ dadurch gegeben ist, dass man $f \in C_0(X) \odot A \subset C_0(X; A)$ als Funktion auf X mit Werten in A auffasst, und dann $\sup_{x\in X} |f(x)|_A$ bildet. Es gibt also nur eine C^*-Norm auf $C_0(X) \odot A$. □

36 Remark. Für nicht-nukleare Cj-Algebren A, B stellt sich die Situation wie folgt dar:

Es gibt eine maximale C^*-Norm μ auf $A\otimes B$, und für jede beliebige C^*-Norm α gilt

$$|x| \leq \alpha(x) \leq \mu(x) \qquad \forall x \in A \odot B,$$

wobei $|x|$ die von uns bisher immer benutzte (mit Hilfe des Tensor Produkts von Hilberträumen gebildete) C^*-Norm auf $A \odot B$. Diese wird daher auch *minimale* Norm auf $A \odot B$ genannt.

Für die (verschiedenen) Vervollständigungen von $A \odot B$ ergeben sich dann C^*-Homomorphismen in die umgekehrte Richtung

$$A \otimes_\mu B \to A \otimes_\alpha B \to A \otimes B,$$

die alle surjektiv sind (da die Bilder abgeschlossen sind und die dichte Teilmenge $A \odot B$ enthalten), aber natürlich nicht injektiv, wenn die Normen verschieden sind.

Literatur

blackadar98:_k [1] Bruce Blackadar. *K-theory for operator algebras.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1998.

cuntz84:_k_c [2] Joachim Cuntz. K-theory and C^*-algebras. In *Algebraic K-theory, number theory, geometry and analysis (Bielefeld, 1982)*, pages 55–79. Springer, Berlin, 1984.

roerdam00:_k_c [3] M. Rørdam, F. Larsen, and N. Laustsen. *An introduction to K-theory for C^*-algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

wegge-olsen93:_k_c [4] N. E. Wegge-Olsen. *K-theory and C^*-algebras*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1993. A friendly approach.