Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen

Katharina Habermann

Dieses Skript entstand aus einer einführenden Vorlesung über gewöhnliche Differentialgleichungen, die ich in den Sommersemestern 2000 und 2001 für Studenten der ersten beiden Jahrgänge des in Greifswald neu eingerichteten Studienganges Biomathematik gehalten habe. Dementsprechend nehmen Beispiele und elementare Integrationsmethoden ein breiten Raum ein. Nach der Abhandlung der elementaren Integrationsmethoden erfolgt ein kurzer Einblick in einfachste Modelle der mathematischen Biologie. Der nächste Schwerpunkt liegt bei den fundamentalen Sätzen über Existenz– und Eindeutigkeitsaussagen sowie den Sätzen über die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Eingangsdaten. Weiterhin wird kurz auf die geometrische Veranschaulichung der Differentialgleichungen und ihrer Lösungen eingegangen. Bei der Behandlung linearer Differentialgleichungen habe ich mich dafür entschieden, beginnend bei den linearen Differentialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten, fortfahrend mit den Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten erst am Ende zu behandeln. Zum einen kann man die Gleichungen mit konstanten Koeffizienten noch explizit lösen, wogegen man für die Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten keine vollständige Lösungstheorie hat. Zum anderen hat es sich für den Übungsbetrieb als günstig erwiesen, in dieser Reihenfolge vorzugehen.

Da diese einsemestrige Vorlesung nur einen Zeitrahmen von zwei Wochenstunden Vorlesung und einer Wochenstunde Übung umfasst, habe ich bei der Stoffauswahl den Schwerpunkt darauf gelegt, eine Reihe praktischer Lösungsmethoden zur Verfügung zu stellen. Die dargelegten allgemeinen Existenz-, Eindeutigkeits- und Abhängigkeitsresultate sind auch unter diesem praktischen Gesichtspunkt zu sehen, da die Beweismethode mit Hilfe des Kontraktionsprinzips (Banachscher Fixpunktsatz) ein praktisches Berechnungsverfahren liefert und es für numerische Berechnungen wichtig ist, dass bei kleinen Störungen der Anfangsdaten und der Differentialgleichung die Lösung nur wenig variiert.

Im allgemeinen ist die explizite Lösbarkeit von Differentialgleichungen eher die Ausnahme. Vielmehr ist man neben allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitsresultaten an qualitativen Aussagen über das Verhalten der Lösungen, wie Stabilität, Oszillationseigenschaften, Beschränktheit oder Langzeitverhalten, interessiert. Auf Stabilitätsaspekte wurde in der Vorlesung an geeigneter Stelle hingewiesen, Stabilitätstheorie selbst war aber nicht Bestandteil der Vorlesung. Auf den ganzen Komplex der numerischen Lösung von Differentialgleichung wird in dieser Vorlesung nicht eingegangen. Es sei nur erwähnt, dass dabei außerordentlich schwierige numerische Problem auftreten können.

Im Anhang habe ich eine Reihe von Übungsaufgaben zusammengestellt, die zur Vertiefung und Festigung des Stoffes durchgearbeitet werden sollten.

Greifswald, im August 2001 — Katharina Habermann

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Aufgabenstellung

Was ist eine gewöhnliche Differentialgleichung?

Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist eine Gleichung, in die eine reelle unabhängige Variable t, eine Funktion $x(t)$ und ihre Ableitungen $x'(t)$, $x''(t)$, usw. nach t eingehen, also

$$F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k)}(t)) = 0 \ .$$

Die Aufgabe besteht darin, solche Funktionen $x(t)$ zu finden, welche eingesetzt diese Gleichung erfüllen. Diese Funktionen heißen dann Lösungen der Differentialgleichung.

Beispiel 1.1.1 Wir betrachten die Differentialgleichung $x'(t) = x(t)$. Dabei ist t die unabhängige Variable und x die gesuchte Funktion. Offensichtlich sind $x(t) \equiv 0$, $x(t) = e^t$ und $x(t) = ce^t$ mit einer beliebigen reellen Konstante c Lösungen dieser Differentialgleichung. Später werden wir sehen, dass **alle** Lösungen dieser Differentialgleichung von der Gestalt $x(t) = ce^t$ sind. $\square$

Treten mehrere unabhängige Variablen und somit partielle Ableitungen auf, so spricht man von partiellen Differentialgleichungen.

Beispiel 1.1.2 In der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = x + y$$

sind x und y die unabhängigen Variablen und $u = u(x, y)$ die gesuchte Funktion. Man sieht sofort, dass $u(x, y) = xy$ eine spezielle Lösung dieser Differentialgleichung ist. $\square$

Mit solchen, d.h. mit partiellen Differentialgleichungen werden wir uns in dieser Vorlesung nicht befassen.

Aufgabenstellung
Es sei $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{k+1 \text{ mal}}$ eine offene Teilmenge und $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion.

Man finde eine k-mal differenzierbare Funktion $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k)}(t)) \in \mathcal{O}$ für alle $t \in I$ und

$$F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k)}(t)) = 0 \quad \text{für alle } t \in I \ . \tag{1.1.1}$$

Dabei ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dieses darf offen, halboffen, abgeschlossen, eine Halbgerade oder auch ganz $\mathbb{R}$ sein.

Tritt die k-te Ableitung $x^{(k)}(t)$ von $x(t)$ in der Gleichung (1.1.1) als höchste Ableitung auf, so heißt die Gleichung (1.1.1) **gewöhnliche Differentialgleichung k-ter Ordnung**. Ist die Gleichung nach der höchsten Ableitung aufgelöst, so heißt die Differentialgleichung **explizit**, anderenfalls **implizit**. Im Falle $n \geq 2$ heißt (1.1.1) **gewöhnliches Differentialgleichungssystem**.

Anfangswertproblem
Es sei $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{k+1 \text{ mal}}$ eine offene Teilmenge und $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion.

Weiterhin seien $t_0 \in \mathbb{R}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

Man finde eine k-mal differenzierbare Funktion $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit

(i) $(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k)}(t)) \in \mathcal{O}$ und $F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k)}(t)) = 0$ für alle $t \in I$

(ii) und den Anfangsbedingungen $x^{(j)}(t_0) = a_j$ für $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

Dabei ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $t_0 \in I$.

Beispiel 1.1.3 Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $x'(t) = x(t)$ ist von der Gestalt $x(t) = ce^t$. Haben wir zusätzlich die Anfangsbedingung $x(t_0) = 2$ für $t_0 = 0$, so muss offenbar $x(t_0) = x(0) = ce^0 = c = 2$ gelten. Also ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch $x(t) = 2e^t$ mit $t \in \mathbb{R}$. $\square$

1.2 Motivation

Die Theorie der Differentialgleichungen ist ein zentrales Gebiet der Mathematik, insbesondere der Analysis. Gewöhnliche Differentialgleichungen findet man häufig in den Anwendungen der Mathematik, z.B. in der Geometrie, in der Physik oder in den Ingenieurwissenschaften aber auch bei der Erklärung elementarer Naturphänomene, die sich zeitlich verändern, wie z.B. Populationsmodelle, Ausbreitungstheorien für Epedemien oder ökologische Modelle. Man will diese Vorgänge modellieren, um Vorhersagen machen und um Konsequenzen ableiten zu können.

2 Elementare Integrationsmethoden

2.1 Trennung der Variablen

Wir betrachten eine Differentialgleichung der Gestalt

$$x'(t) = f(t)\, g(x(t)) \quad \text{mit der Anfangsbedingung } x(t_0) = x_0 \ .$$

Dabei haben wir Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und $x_0 \in J$ und stetige Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$.

Satz 2.1.1 *(i) Ist $g(x_0) = 0$, so ist $x(t) \equiv x_0$ eine Lösung des Anfangswertproblems.*

(ii) Ist $g(x_0) \neq 0$, so existiert zu jedem genügend kleinen $\varepsilon > 0$ genau eine Lösung $x :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ des Problems. Diese ist gegeben durch

$$x(t) = G^{-1}\left(G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds\right) \ ,$$

wobei G eine in einer Umgebung von x_0 definierte Stammfunktion von $1/g$ ist.

Beweis. (i) In diesem Fall gilt für $x(t) \equiv x_0$ offenbar $x'(t) = 0$ und $f(t)\, g(x(t)) = f(t)\, g(x_0) = 0$.

(ii) Wir überprüfen zunächst, dass die angegebene Lösung die Anfangsbedingung erfüllt. Es ist

$$x(t_0) = G^{-1}\left(G(x_0) + \int_{t_0}^{t_0} f(s)ds\right) = G^{-1}(G(x_0)) = x_0 \ .$$

Weiterhin schlussfolgern wir aus

$$x(t) = G^{-1}\left(G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds\right) ,$$

dass

$$G(x(t)) = G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds .$$

Ableiten nach t liefert

$$G'(x(t))\, x'(t) = f(t) .$$

Nun war aber $G'(x(t)) = 1/g(x(t))$ und folglich ist

$$\frac{1}{g(x(t))} x'(t) = f(t) .$$

Also gilt

$$x'(t) = f(t)\, g(x(t)) .$$

Das heißt, $x(t)$ ist tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems.

Nun zeigen wir die Eindeutigkeit. Es sei $x(t)$ eine Lösung von $x'(t) = f(t)\, g(x(t))$ mit $x(t_0) = x_0$. Wegen $g(x_0) \neq 0$ ist $g(x(t)) \neq 0$ in einer kleinen Umgebung von t_0. Daraus folgt

$$f(t) = \frac{x'(t)}{g(x(t))} \quad \text{für alle } t \text{ in einer kleinen Umgebung von } t_0 .$$

Integration mit Substitution $\xi = x(s)$, $d\xi = x'(s)ds$, liefert dann

$$\int_{t_0}^{t} f(s)ds = \int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)\, ds}{g(x(s))} = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{d\xi}{g(\xi)} = G(x(t)) - G(x_0) .$$

Dann ist

$$G(x(t)) = G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

und folglich

$$x(t) = G^{-1}\left(G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds\right) .$$

□

Bemerkung 2.1.2 Die Lösung $x(t) \equiv x_0$ im Fall (i) ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt (siehe nachfolgendes Beispiel).

Die Aussage (ii) ist Eindeutigkeitsaussage und zugleich explizite Berechnungsvorschrift. Diese Berechnungsvorschrift besagt, dass sich $x(t)$ aus

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

bestimmen lässt. □

Beispiel 2.1.3 Für das Anfangswertproblem $x'(t) = 3\sqrt[3]{x^2(t)}$ und $x(0) = 0$ ist sowohl $x(t) \equiv 0$ als auch $x(t) = t^3$ eine Lösung. □

Beispiel 2.1.4 Wir betrachten die Differentialgleichung $x'(t) = x(t)/t$ mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ für $t_0 \neq 0$. Diese Differentialgleichung löst man mittels Trennung der Variablen, wobei $f(t) = 1/t$ und $g(x) = x$ ist. Für $t_0 > 0$ sei $I =]0,\infty[$ und für $t_0 < 0$ sei $I =]-\infty, 0[$. Dann ist f auf I stetig. g ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Der vorhergehende Satz liefert $x(t) \equiv 0$, falls $x_0 = 0$. Im Falle $x_0 \neq 0$ erhalten wir die Lösung nach der im vorhergehenden Satz angegebenen Lösungsvorschrift aus

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{\xi} = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{s} \ .$$

Dann ist

$$\ln\left|\frac{x(t)}{x_0}\right| = \ln|x(t)| - \ln|x_0| = \ln|t| - \ln|t_0| = \ln\left|\frac{t}{t_0}\right| \ ,$$

und somit

$$\left|\frac{x(t)}{x_0}\right| = \left|\frac{t}{t_0}\right| \ ,$$

das heißt

$$x(t) = \pm t\frac{x_0}{t_0} \ .$$

Mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ erhalten wir als Lösung die auf I definierte Funktion

$$x(t) = t\frac{x_0}{t_0} \ .$$

Diese Lösung $x(t)$ kann auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden. □

Beispiel 2.1.5 Wir betrachten die Differentialgleichung $x'(t) = -t/x(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$. Dann liefert

$$\int_{x_0}^{x(t)} \xi d\xi = -\int_{t_0}^{t} s ds$$

die Gleichung

$$x^2(t) - x_0^2 = -t^2 + t_0^2$$

und wir erhalten schließlich die Kreisgleichung

$$x^2(t) + t^2 = t_0^2 + x_0^2 \geq 0 \ .$$

Die Funktionen

$$x(t) = \pm\sqrt{t_0^2 + x_0^2 - t^2}$$

sind für $t \in \left[-\sqrt{t_0^2 + x_0^2}, \sqrt{t_0^2 + x_0^2}\right]$ definiert.

Wie sieht es hier mit der Eindeutigkeit aus?

Für die Funktion $g(x) = 1/x$ wählen wir im Falle $x_0 > 0$ das Intervall $J =]0,\infty[$ und im Falle $x_0 < 0$ das Intervall $J =]-\infty, 0[$. Für $1/g(x) = x$ auf $]0,\infty[$ ist $G^{-1}(y) = \sqrt{y}$ die Inverse der Stammfunktion und wir haben die Lösung

$$x(t) = \sqrt{t_0^2 + x_0^2 - t^2}$$

mit

$$x(t_0) = \sqrt{x_0^2} = |x_0| = x_0 \ , \qquad \text{da } x_0 > 0 \ .$$

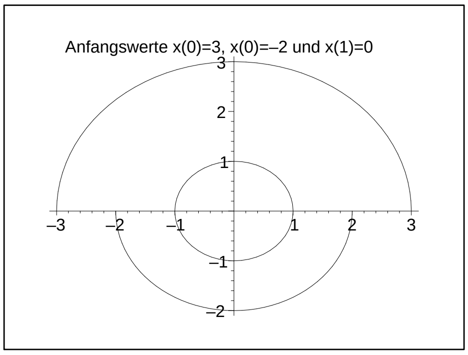
Dagegen ist für $1/g(x) = x$ auf $]-\infty, 0[$ die Inverse der Stammfunktion gerade $G^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ und die Lösung ist

$$x(t) = -\sqrt{t_0^2 + x_0^2 - t^2}$$

mit

$$x(t_0) = -\sqrt{x_0^2} = -|x_0| = x_0 \ , \qquad \text{da } x_0 < 0 \ .$$

Problematisch ist nur der Fall $x_0 = 0$. Die Funktion $g(x) = 1/x$ ist für $x = 0$ nicht definiert. Hier ist sowohl die Funktion $x(t) = \sqrt{t_0^2 + x_0^2 - t^2}$ als auch die Funktion $x(t) = -\sqrt{t_0^2 + x_0^2 - t^2}$ eine Lösung des Anfangswertproblems.



□

Beispiel 2.1.6 Wir betrachten die Differentialgleichung $x'(t) = \dfrac{1}{2}\left(x^2(t) - 1\right)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$.

In den Fällen $x_0 = 1$ und $x_0 = -1$ ist $x(t) \equiv x_0$ eine Lösung des Anfangswertproblems.

Im folgenden betrachten wir den Fall $x_0 \neq \pm 1$. Wir lösen die Differentialgleichung mittels Trennung der Variablen. Zunächst berechnen wir die unbestimmten Integrale

$$2\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x-1| - \ln|x+1| + c = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$$

und

$$\int dt = t + d$$

mit Konstanten c und d. Aus

$$2\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x^2-1} = \int_0^t ds$$

erhalten wir damit

$$\ln\left|\frac{x(t)-1}{x(t)+1}\right| - \ln\left|\frac{x_0-1}{x_0+1}\right| = t \ .$$

Daraus folgt

$$\ln\left|\frac{x(t)-1}{x(t)+1}\right| = \ln\left|\frac{x_0-1}{x_0+1}\right| + t$$

und somit

$$\left|\frac{x(t)-1}{x(t)+1}\right| = \left|\frac{x_0-1}{x_0+1}\right| e^t \ .$$

Also ist

$$\frac{x(t)-1}{x(t)+1} = \pm\frac{x_0-1}{x_0+1}\, e^t \ .$$

Setzen wir in diese Gleichung die Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ ein, so erhalten wir

$$\frac{x_0-1}{x_0+1} = \frac{x(0)-1}{x(0)+1} = \pm\frac{x_0-1}{x_0+1} \ .$$

Also muss

$$\frac{x(t)-1}{x(t)+1} = \frac{x_0-1}{x_0+1}\,e^t$$

sein. Stellen wir diese Gleichung nach $x(t)$ um, so erhalten wir

$$x(t) = \frac{1+\dfrac{x_0-1}{x_0+1}\,e^t}{1-\dfrac{x_0-1}{x_0+1}\,e^t}$$

als Lösung des Anfangswertproblems.

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist diese Lösung definiert?

1. Fall: $-1 < x_0 < 1$ In diesem Fall gilt $0 < x_0 + 1$ und $x_0 - 1 < 0$. Daraus folgt

$$\frac{x_0-1}{x_0+1} < 0 \quad \text{beziehungsweise} \quad -\frac{x_0-1}{x_0+1} > 0\ .$$

Folglich gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$1 - \frac{x_0-1}{x_0+1}\,e^t > 0\ .$$

Demnach ist in diesem Fall die Lösung $x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert. Außerdem gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $-1 < x(t) < 1$. Aufgrund der Differentialgleichung ist stets $x'(t) < 0$, das heißt, $x(t)$ ist monoton fallend. Weiterhin gilt

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = -1\ .$$

2. Fall: $1 < x_0$ In diesem Fall gilt $x_0 - 1 > 0$ und $x_0 + 1 > 2 > 0$. Daraus folgt

$$\frac{x_0-1}{x_0+1} > 0\ .$$

Außerdem ist $x_0 + 1 > x_0 - 1 > 0$, woraus

$$\frac{x_0+1}{x_0-1} > 1$$

folgt. Die Funktion $x(t)$ ist in diesem Fall **nicht** definiert für

$$t = T_0 := \ln\left(\frac{x_0+1}{x_0-1}\right)\ .$$

Dabei ist $T_0 > 0$. Da $0 \in\ ]-\infty, T_0[$, ist $x(t)$ als Lösung des Anfangswertproblems auf diesem Intervall definiert.

Außerdem gilt für alle t in diesem Intervall $x(t) > 1$ und wir haben $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 1$. Und schließlich sind auf diesem Intervall Zähler und Nenner von $x(t)$ positiv, woraus für den linksseitigen Grenzwert für t gegen T_0 folgt, dass

$$\lim_{t\to T_0^-} x(t) = +\infty\ .$$

Die Differentialgleichung liefert in diesem Fall $x'(t) > 0$, das heißt, die Funktion $x(t)$ ist monoton wachsend.

3. Fall: $x_0 < -1$ In diesem Fall haben wir $x_0 - 1 < -2 < 0$ und $x_0 + 1 < 0$, woraus

$$\frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} > 0$$

folgt. Außerdem ist $x_0 - 1 < x_0 + 1 < 0$, was

$$0 < \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1} < 1$$

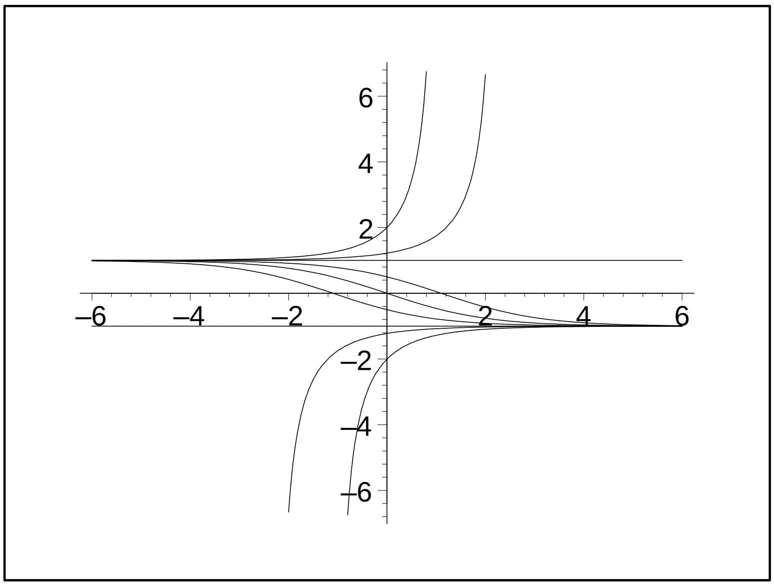
impliziert. Auch in diesem Fall ist die Lösung $x(t)$ **nicht** definiert für

$$t = T_0 := \ln\left(\frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}\right) .$$

Hier ist aber $T_0 < 0$. Wegen $0 \in]T_0, +\infty[$ ist die Lösung auf diesem Intervall definiert. Weiterhin gilt $x(t) < -1$ für alle t aus diesem Intervall, $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = -1$ und

$$\lim_{t \to T_0{}^+} x(t) = -\infty .$$

Schließlich liefert die Differentialgleichung, dass $x'(t) > 0$ ist. Demnach ist die Lösung $x(t)$ monoton wachsend.



□

2.2 Homogene Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Gestalt $x'(t) = h\left(\frac{x(t)}{t}\right)$, wobei h eine stetige Funktion ist, heißt homogene Differentialgleichung.

Diese liefert nach der Substitution $u(t) := x(t)/t$ die Differentialgleichung

$$u'(t) = \frac{1}{t}\left(h(u(t)) - u(t)\right)$$

für $u(t)$.

Tatsächlich ist nach Quotientenregel

$$u'(t) = \frac{x'(t)\,t - x(t)}{t^2} = \frac{1}{t}\left(x'(t) - \frac{x(t)}{t}\right) = \frac{1}{t}\left(h(u(t)) - u(t)\right) \ .$$

Somit erhalten wir eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen, wobei $f(t) = 1/t$ und $g(u) = h(u) - u$ ist.

Beispiel 2.2.1 Wir betrachten das Anfangswertproblem $x'(t) = 1 + x(t)/t$ und $x(1) = x_0$. Für $u(t) = x(t)/t$ erhalten wir

$$u'(t) = \frac{x'(t)\,t - x(t)}{t^2} = \frac{1}{t}\left(x'(t) - \frac{x(t)}{t}\right) = \frac{1}{t} \ .$$

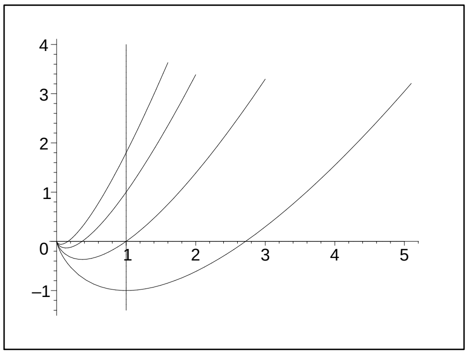
Daraus folgt

$$u(t) = \ln(t) + c \qquad \text{für eine Konstante } c \in \mathbb{R} \text{ und mit } t \in \,]0,\infty[\ .$$

Allgemein hat die Lösung der Ausgangsgleichung die Gestalt

$$x(t) = t\,u(t) = t(\ln(t) + c) \qquad \text{mit } x(1) = c \text{ und } t \in \,]0,\infty[\ .$$

Die Anfangsbedingung $x(1) = x_0$ liefert dann $x(t) = t(\ln(t) + x_0)$. Die Lösung ist definiert für alle $t \in \,]0,\infty[$ und es gilt $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = 0$.



□

2.3 Homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist eine Differentialgleichung der Gestalt

$$x'(t) + f(t)\,x(t) = 0 \ ,$$

wobei f eine stetige Funktion ist. Wegen $x'(t) = -f(t)\,x(t)$ ist dies aber eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen für $-f(t)$ und $g(x) = x$.

2.4 Inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist eine Differentialgleichung der Gestalt

$$x'(t) + f(t)\,x(t) + h(t) = 0 \ .$$

Dabei sind f und h stetige Funktionen.

Wir betrachten das Anfangswertproblem für $x(t_0) = x_0$.

Die Lösungsmethode für diese Differentialgleichung heißt ***Variation der Konstanten***. Die Idee zu dieser Methode stammt von Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Dabei wird wie folgt in zwei Schritten vorgegangen.

1. Schritt: Man löse die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$x'(t) = -f(t)\,x(t)$$

mittels Trennung der Variablen. Bezeichnet F eine Stammfunktion von f, so ist

$$-\int f(t)dt = -F(t) + d_1$$

mit einer Konstanten d_1. Weiterhin ist

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + d_2$$

mit einer Konstanten d_2. Insgesamt erhalten wir also

$$x(t) = c\,e^{-F(t)}$$

mit einer Konstanten c.

2. Schritt: In der allgemeinen Lösung $x(t) = c\,e^{-F(t)}$ der homogenen Gleichung wird die Konstante c durch eine Funktion $c(t)$ ersetzt. Nun versucht man durch passende Wahl von $c(t)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden. Dies geschieht dadurch, dass man mit dem Ansatz $x(t) = c(t)\,e^{-F(t)}$ in die inhomogene Differentialgleichung hineingeht und $c(t)$ berechnet. Meist erhält man für $c'(t)$ einen Ausdruck, den man einfach integrieren kann.

Für $x(t) = c(t)\,e^{-F(t)}$ ist

$$\begin{aligned} x'(t) &= c'(t)\,e^{-F(t)} + c(t)\,e^{-F(t)}(-F'(t)) \\ &= c'(t)\,e^{-F(t)} - f(t)\,x(t)\ , \end{aligned}$$

also muss

$$x'(t) + f(t)\,x(t) + h(t) = c'(t)\,e^{-F(t)} + h(t) = 0$$

erfüllt sein. Daraus folgt

$$c'(t) = -h(t)\,e^{F(t)}\ ,$$

und somit

$$c(t) = -\int h(t)e^{F(t)}dt + c \qquad \text{mit einer Konstanten } c\ .$$

Damit die Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ erfüllt ist, muss

$$x(t_0) = c(t_0)e^{-F(t_0)} = x_0$$

gelten. Als Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir folglich

$$\begin{aligned} x(t) &= \left\{-\int_{t_0}^{t} h(s)e^{F(s)}ds + x_0e^{F(t_0)}\right\} e^{-F(t)} \\ &= \left\{-\int_{t_0}^{t} h(s)e^{F(s)-F(t_0)}ds + x_0\right\} e^{F(t_0)-F(t)}\ . \end{aligned}$$

Bei konkret gegebener Aufgabenstellung ist es immer besser, diesem Lösungsweg zu folgen und nicht die Formel für $x(t)$ zu benutzen. Die Rechnungen sind dann einfacher und übersichtlicher.

Beispiel 2.4.1 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'(t) + \frac{x(t)}{t} - 2 = 0 \quad \text{mit der Anfangsbedingung } x(t_0) = x_0 \ .$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit $f(t) = 1/t$ und $h(t) \equiv -2$. Die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $x'(t) = -x(t)/t$ erhalten wir mittels Trennung der Variablen aus

$$-\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + d_1$$

und

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + d_2$$

mit Konstanten d_1 und d_2. Dann ist

$$x(t) = \frac{c}{t}$$

für eine entsprechende Konstante c. Für den Ansatz $x(t) = \dfrac{c(t)}{t}$ folgt

$$x'(t) = \frac{c'(t)\,t - c(t)}{t^2} = \frac{c'(t)}{t} - \frac{c(t)}{t^2}$$

und eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhalten wir

$$x'(t) + \frac{x(t)}{t} - 2 = \frac{c'(t)}{t} - 2 = 0 \ .$$

Daraus folgt $c'(t) = 2t$, also

$$c(t) = t^2 + c \ .$$

Damit ist

$$x(t) = t + \frac{c}{t} \ .$$

Setzen wir die Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ ein, so folgt

$$c = t_0(x_0 - t_0) \ .$$

Schließlich ist

$$x(t) = t + \frac{t_0(x_0 - t_0)}{t}$$

die Lösung des Anfangswertproblems. $\square$

Sowohl im Abschnitt 2.2 als auch im Abschnitt 2.3 taucht der Begriff "homogene Differentialgleichung" auf. Da es sich dabei um verschiedene Typen von Differentialgleichungen handelt, sei in der folgenden Bemerkung kurz auf die entsprechenden Begriffe der "Homogenität" eingegangen.

Bemerkung 2.4.2 Ein Polynom $p(t,x)$ in t und x heißt **homogen vom Grad** k, falls die Gleichung

$$p(st, sx) = s^k p(t,x)$$

erfüllt ist.

So ist zum Beispiel $p(t,x) = x^3 - t^3$ homogen vom Grad 3, da offenbar $p(st,sx) = s^3 p(t,x)$ gilt.

Im Beispiel $p(t,x) = x^2 + tx - t^2$ ist $p(st,sx) = s^2 p(t,x)$, d.h. $p(t,x)$ ist homogen vom Grad 2.

Sind die beiden Polynome $p(t,x)$ und $q(t,x)$ homogen vom selben Grad k, so kann die Differentialgleichung

$$x'(t) = \frac{p(t,x(t))}{q(t,x(t))}$$

als homogene Differentialgleichung im Sinne von Abschnitt 2.2 geschrieben werden. Mit

$$h(x/t) := \frac{p(1,x/t)}{q(1,x/t)}$$

ist nämlich

$$\frac{p(t,x)}{q(t,x)} = \frac{p(t\cdot 1, t\cdot x/t)}{q(t\cdot 1, t\cdot x/t)} = \frac{t^k p(1,x/t)}{t^k q(1,x/t)} = \frac{p(1,x/t)}{q(1,x/t)} = h(x/t)\ ,$$

und die obige Differentialgleichung lautet

$$x'(t) = h(x(t)/t)\ .$$

Der Begriff der homogenen lineraren Differentialgleichung nach Abschnitt 2.3 rührt dagegen von der Algebra her. Dort heißt ein lineares Gleichungssystem der Gestalt $Ax = b$ für $b = 0$ homogen und für $b \neq 0$ inhomogen. Die homogene lineare Differentialgleichung $x'(t) + f(t)\,x(t) = 0$ lässt sich mit Hilfe des linearen Operators L, welcher durch

$$L(x(t)) := x'(t) + f(t)\,x(t)$$

gegeben ist, schreiben als

$$L(x(t)) = 0\ .$$

Dagegen hat die inhomogene lineare Differentialgleichung $x'(t) + f(t)\,x(t) + h(t) = 0$ mit L die Gestalt

$$L(x(t)) = -h(t)\ .$$

□

2.5 Bernoullische Differentialgleichung

Differentialgleichungen der Gestalt

$$x'(t) = f(t)\,x(t) + h(t)\,(x(t))^k \qquad \text{mit } k \in \mathbb{R}\ ,\ k \neq 1$$

und stetigen Funktionen f und h heißen nach Jacob Bernoulli (1654-1705) Bernoullische Differentialgleichungen. Diese Differentialgleichungen lassen sich auf lineare Differentialgleichungen zurückführen. Dies geschieht folgendermaßen. Die Substitution $z(t) := (x(t))^{1-k}$ liefert mit der Differentialgleichung $x'(t) = f(t)\,x(t) + h(t)\,(x(t))^k$ für $z(t)$

$$\begin{aligned} z'(t) &= (1-k)(x(t))^{-k} x'(t) \\ &= (1-k)(x(t))^{-k}\left\{f(t)\,x(t) + h(t)\,(x(t))^k\right\} \\ &= (1-k)\left\{f(t)(x(t))^{1-k} + h(t)\right\}\ , \end{aligned}$$

also

$$z'(t) = (1-k)\left\{f(t)z(t) + h(t)\right\}\ .$$

Diese Differentialgleichung für $z(t)$ ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung und kann nach Abschnitt 2.4 mittels Variation der Konstanten gelöst werden.

Beispiel 2.5.1 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'(t) = -x(t) + t\sqrt{x(t)} \qquad \text{mit der Anfangsbedingung } x(t_0) = x_0 \geq 0\ .$$

Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit $k = 1/2$. Wir substituieren $z(t) := \sqrt{x(t)}$ und erhalten für $z(t)$ die Differentialgleichung

$$z'(t) = -\frac{z(t)}{2} + \frac{t}{2} \qquad \text{mit der Anfangsbedingung } z(t_0) = \sqrt{x_0}\ .$$

Die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung $z'(t) = -z(t)/2$ lösen wir mittels Trennung der Variablen. Aus

$$-\frac{1}{2}\int dt = -\frac{t}{2} + d_1$$

und

$$\int \frac{dz}{z} = \ln|z| + d_2$$

mit reellen Konstanten d_1 und d_2 erhalten wir

$$z(t) = ce^{-t/2}$$

mit einer entsprechenden Konstanten c. Variation der Konstanten liefert für $z(t) = c(t)e^{-t/2}$

$$z'(t) = c'(t)e^{-t/2} - \frac{z(t)}{2} = -\frac{z(t)}{2} + \frac{t}{2} ,$$

also

$$c'(t) = \frac{t}{2}e^{t/2} .$$

Mittels partieller Integration berechnet man das unbestimmte Integral

$$\begin{aligned} c(t) &= \int \frac{t}{2}e^{t/2}dt \\ &= \int t\left(e^{t/2}\right)' dt \\ &= te^{t/2} - \int e^{t/2}dt \\ &= te^{t/2} - 2e^{t/2} + c \\ &= (t-2)e^{t/2} + c . \end{aligned}$$

Folglich ist

$$z(t) = (t-2) + ce^{-t/2} .$$

Einsetzen der Anfangsbedingung liefert

$$c = (2 - t_0 + \sqrt{x_0})e^{t_0/2} .$$

Als Lösung des Anfangsproblems für $z(t)$ erhalten wir daraus

$$z(t) = t - 2 + (2 - t_0 + \sqrt{x_0})e^{(t_0-t)/2} .$$

Schließlich ist

$$x(t) = \left(t - 2 + (2 - t_0 + \sqrt{x_0})e^{(t_0-t)/2}\right)^2 .$$

□

Abschließend sei noch bemerkt, dass die Voraussetzung $k \neq 1$ für uns keine Einschränkung darstellt, da die Differentialgleichung für $k = 1$ von der Gestalt $x'(t) = (f(t) + h(t))x(t)$, also eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist, die wir mittels Trennung der Variablen lösen können.

2.6 Riccatische Differentialgleichung

Wir betrachten hier Differentialgleichungen der Gestalt

$$x'(t) = f(t)\,x^2(t) + g(t)\,x(t) + h(t)$$

mit stetigen Funktionen f, g und h. Dieser Typ von Differentialgleichungen ist nach dem italienischen Mathematiker Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) benannt. Die Lösungen lassen sich, von Sonderfällen abgesehen, nicht in geschlossener Form angeben. Kennt man jedoch eine Lösung, so sind die übrigen Lösungen explizit berechenbar. Ist $\overline{x}(t)$ eine spezielle Lösung der obigen Differentialgleichung, so erhält man alle übrigen Lösungen aus dem Ansatz

$$x(t) = \overline{x}(t) + \frac{1}{z(t)} \; .$$

Dabei ist $z(t)$ Lösung einer Differentialgleichung, die wir wie folgt aus der Riccatischen Differentialgleichung ableiten. Einerseits ist

$$x'(t) = \overline{x}'(t) - \frac{z'(t)}{z^2(t)}$$

und andererseits haben wir

$$\begin{aligned}
x'(t) &= f(t)\,x^2(t) + g(t)\,x(t) + h(t) \\
&= f(t)\left(\overline{x}(t) + \frac{1}{z(t)}\right)^2 + g(t)\left(\overline{x}(t) + \frac{1}{z(t)}\right) + h(t) \\
&= f(t)\left(\overline{x}^2(t) + 2\frac{\overline{x}(t)}{z(t)} + \frac{1}{z^2(t)}\right) + g(t)\left(\overline{x}(t) + \frac{1}{z(t)}\right) + h(t) \\
&= f(t)\overline{x}^2(t) + g(t)\overline{x}(t) + h(t) + f(t)\left(2\frac{\overline{x}(t)}{z(t)} + \frac{1}{z^2(t)}\right) + \frac{g(t)}{z(t)} \\
&= \overline{x}'(t) + \frac{1}{z^2(t)}\left(2f(t)\overline{x}(t)z(t) + f(t) + g(t)z(t)\right) \; ,
\end{aligned}$$

da $\overline{x}(t)$ die Riccatische Differentialgleichung löst. Daraus erhalten wir für $z(t)$ die Differentialgleichung

$$z'(t) + \left(2f(t)\overline{x}(t) + g(t)\right) z(t) + f(t) = 0 \; .$$

Diese Differentialgleichung ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung und kann mittels Variation der Konstanten gelöst werden.

Beispiel 2.6.1 Wir betrachten die Riccatische Differentialgleichung

$$x'(t) = x^2(t) + 3x(t) - 4 \; .$$

Die Funktion $\overline{x}(t) \equiv 1$ ist offenbar eine spezielle Lösung der Differentialgleichung. Der Ansatz

$$x(t) = \overline{x}(t) + \frac{1}{z(t)} = 1 + \frac{1}{z(t)} = \frac{z(t)+1}{z(t)}$$

liefert für $z(t)$ die Differentialgleichung

$$z'(t) = -5z(t) - 1 \; .$$

Dies ist formal zwar auch eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung, kann aber mittels Trennung der Variablen gelöst werden. Es ist

$$-\int dt = -t + c_1$$

für eine Konstante c_1. Andererseits ist

$$\int \frac{dz}{5z+1} = \frac{1}{5}\int \frac{5dz}{5z+1} = \frac{1}{5}\ln|5z+1| + c_2$$

mit einer Konstanten c_2. Für $z(t)$ folgt daraus

$$\ln|5z(t)+1| = -5t + c_3 \; ,$$

also

$$z(t) = -\frac{1}{5} + c_4 e^{-5t}$$

mit entsprechenden Konstanten c_3 und c_4. Für $x(t) = \dfrac{z(t)+1}{z(t)}$ erhalten wir schließlich

$$x(t) = \frac{4/5 + c_4 e^{-5t}}{-1/5 + c_4 e^{-5t}} = \frac{4 + 5c_4 e^{-5t}}{-1 + 5c_4 e^{-5t}} = \frac{4e^{5t} + 5c_4}{-e^{5t} + 5c_4} ,$$

also

$$x(t) = \frac{c + 4e^{5t}}{c - e^{5t}} \qquad \text{mit einer Konstanten } c \in \mathbb{R} .$$

Falls $c \leq 0$ gilt, ist die Lösung $x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert. Im Falle $c > 0$ ist $x(t)$ für alle $t \neq \ln(c)/5$ definiert. □

2.7 Exakte Differentialgleichungen

Es seien I_1 und I_2 offene Intervalle in $\mathbb{R}$ und $p = p(t,x)$, $q = q(t,x) : I_1 \times I_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbare Funktionen. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$p(t, x(t)) + q(t, x(t))\, x'(t) = 0 .$$

Bemerkung 2.7.1 Ist $u = u(t,x) : I_1 \times I_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und $x : I_1 \to I_2$ differenzierbar, so ist $u(t, x(t))$ eine von t abhängige reellwertige Funktion auf I_1 und es gilt

$$\frac{d}{dt} u(t,x(t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x(t))\frac{d}{dt}t + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x(t))\frac{d}{dt}x(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x(t)) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x(t))x'(t) .$$

□

Definition 2.7.2 *Die Differentialgleichung $p(t,x(t)) + q(t,x(t))\,x'(t) = 0$ heißt* **exakt**, *falls eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $u = u(t,x)$ mit*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = p(t,x) \qquad \textit{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = q(t,x)$$

existiert. Die Funktion u heißt dann **Potential**.

Bemerkung 2.7.3 (i) Ist $u = u(t,x)$ ein Potential für die exakte Differentialgleichung $p(t,x(t)) + q(t,x(t))\,x'(t) = 0$, so ist auch $u(t,x) + c$ für jede reelle Konstante c ein Potential für diese Differentialgleichung.

(ii) Bis auf Addition einer reellen Konstanten ist das Potential einer exakten Differentialgleichung eindeutig bestimmt.

□

Satz 2.7.4 *(i) Die Differentialgleichung $p(t,x(t)) + q(t,x(t))\,x'(t) = 0$ ist genau dann exakt, wenn*

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial t} .$$

(ii) Ein Potential $u = u(t,x)$ berechnet sich aus der Formel

$$u(t,x) = \int_{t_*}^{t} p(s,x_*)ds + \int_{x_*}^{x} q(t,\xi)d\xi ,$$

wobei $(t_*, x_*) \in I_1 \times I_2$ ein beliebig fixierter Punkt ist.

(iii) Die Funktion $x(t)$ löst die exakte Differentialgleichung $p(t,x(t)) + q(t,x(t))\,x'(t) = 0$ genau dann, wenn $u(t,x(t))$ für alle t konstant ist. Das heißt, durch das Auflösen der Gleichung $u(t,x(t)) = c$ nach $x(t)$ erhält man sämtliche Lösungen der Differentialgleichung.

Beweis. (i) Es sei u ein zugehöriges Potential, das heißt, es ist

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = q\ .$$

Dann ist offenbar

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial q}{\partial t}\ .$$

Dies zeigt die einfache Richtung der ersten Behauptung. Die Umkehrung folgt aus dem so genannten Lemma von Poincaré. Die Voraussetzungen des Lemmas von Poincaré sind in unserer Situation erfüllt, da das Produkt zweier offener Intervalle eine offene und sternförmige Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist. Zum Beweis des Lemmas von Poincaré verweisen wir auf Walter, Analysis 2, Abschnitt 6.17.

(ii) Zunächst gilt, dass $u(t,x)$ auf folgende Weise berechnet werden kann

$$u(t,x) - u(t_*,x_*) = \int_\gamma \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)dt + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)dx \right)\ .$$

Dabei ist γ ein Weg in $I_1 \times I_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, welcher im Punkt (t_*,x_*) beginnt und im Punkt (t,x) endet. Das rechte Integral ist ein so genanntes Wegintegral. Dazu verweisen wir z.B. auf Walter, Analysis 2, Abschnitt 5.10 und Abschnitt 6.12. Ist die Differentialgleichung $p(t,x(t))+q(t,x(t))\,x'(t) = 0$ exakt, das heißt, ist

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = p(t,x) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = q(t,x)\ ,$$

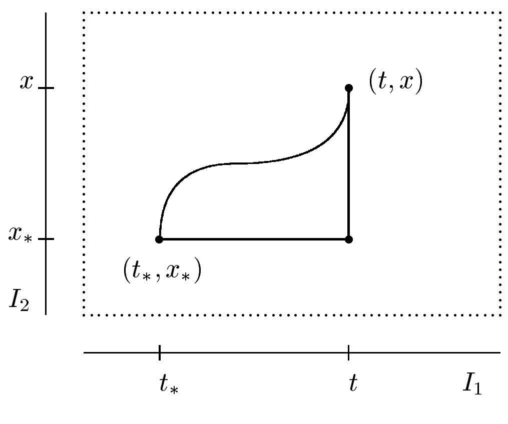
so erhalten wir

$$u(t,x) - u(t_*,x_*) = \int_\gamma (p(t,x)dt + q(t,x)dx)\ .$$

Im folgenden wollen wir das Wegintegral auf der rechten Seite berechnen. Ist beispielsweise eine differenzierbare Parametrisierung $s \in [a,b] \mapsto (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ von γ gegeben, so ist

$$\int_\gamma (p(t,x)dt + q(t,x)dx) = \int_a^b (p(\gamma_1(s),\gamma_2(s))\gamma_1'(s) + q(\gamma_1(s),\gamma_2(s))\gamma_2'(s))\, ds\ .$$

Im allgemeinen reicht es aber aus, stückweise differenzierbare Parametrisierungen zu betrachten und dann über die einzelnen Teilstücke zu integrieren. In unserer konkreten Situation wählen wir den Weg von (t_*,x_*) nach (t,x) so, dass er aus zwei Geradenstücken zusammengesetzt ist.



Die erste Strecke ist parametrisiert durch $s \in [t_*, t] \mapsto (s, x_*)$ und die zweite Strecke ist parametrisiert durch $s \in [x_*, x] \mapsto (t, s)$. Das gesamte Wegintegral ergibt sich dann folgendermaßen als Summe der Wegintegrale über diese beiden Strecken

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma (p(t,x)dt + q(t,x)dx) = \\
&= \int_{t_*}^{t} \left(p(s,x_*)\frac{d}{ds}s + q(s,x_*)\frac{d}{ds}x_* \right) ds + \int_{x_*}^{x} \left(p(t,s)\frac{d}{ds}t + q(t,s)\frac{d}{ds}s \right) ds \\
&= \int_{t_*}^{t} (p(s,x_*)\cdot 1 + q(s,x_*)\cdot 0)\, ds + \int_{x_*}^{x} (p(t,s)\cdot 0 + q(t,s)\cdot 1)\, ds \\
&= \int_{t_*}^{t} p(s,x_*)ds + \int_{x_*}^{x} q(t,s)ds \;.
\end{aligned}$$

Also haben wir insgesamt tatsächlich

$$u(t,x) - u(t_*,x_*) = \int_{t_*}^{t} p(s,x_*)ds + \int_{x_*}^{x} q(t,s)ds \;.$$

Nun ist $u(t_*, x_*)$ eine Konstante. Das Potential ist aber nur bis auf die Addition einer reellen Konstante eindeutig. Und somit können wir o.B.d.A. $u(t_*, x_*) = 0$ setzen, was die zweite Behauptung des Satzes liefert.

(iii) Für das Potential u der exakten Differentialgleichung $p(t, x(t)) + q(t, x(t))\, x'(t) = 0$ ist wie in Bemerkung 2.7.1

$$\frac{d}{dt}u(t,x(t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x(t)) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x(t))x'(t) = p(t,x(t)) + q(t,x(t))\,x'(t) \;.$$

Also ist $x(t)$ eine Lösung der exakten Differentialgleichung genau dann, wenn $\frac{d}{dt}u(t, x(t)) = 0$ ist. Und dies ist wiederum äquivalent dazu, dass $u(t, x(t))$ für alle t konstant ist. □

Bemerkung 2.7.5 Um die Bedingung in Satz 2.7.4(i) leicht überprüfen zu können, kann man die Differentialgleichung $p(t, x(t)) + q(t, x(t))\, x'(t) = 0$ mittels $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ nach "Multiplikation mit dt" in der Form $p(t, x)\, dt + q(t, x)\, dx = 0$ schreiben. Die Bedingung $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial t}$ aus Satz 2.7.4(i) besagt dann, dass man den Ausdruck vor dt nach x und den Ausdruck vor dx nach t ableiten muss. In diesem Kontext kann leider nicht erläutert werden, was die Objekte dt und dx mathematisch genau sind. Die hier angegebene Gleichung ist deshalb **rein formal** zu verstehen. Aber den Lösungsweg für die exakten Differentialgleichungen kann man sich auf diese Weise vielleicht besser einprägen. □

Beispiel 2.7.6 Wir betrachten die Differentialgleichung $(x(t) + t)x'(t) + x(t) + t + 1 = 0$. Das heißt, wir haben in diesem Beispiel $q(t, x) = x + t$ und $p(t, x) = x + t + 1$. Offensichtlich ist

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial t} = 1 \;.$$

Folglich ist die Differentialgleichung exakt. Mit $(t_*, x_*) = (0, 0)$ berechnen wir nach Satz 2.7.4(ii)

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \int_{t_*}^{t} p(s,x_*)ds + \int_{x_*}^{x} q(t,\xi)d\xi \\
&= \int_{0}^{t} (0 + s + 1)ds + \int_{0}^{x} (\xi + t)d\xi \\
&= \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}x^2 + tx \;.
\end{aligned}$$

Stellen wir die Gleichung

$$u(t,x(t)) = \frac{t^2}{2} + t + \frac{x^2(t)}{2} + tx(t) = c$$

nach $x(t)$ um, so erhalten wir als Lösung der Differentialgleichung

$$x(t) = -t \pm \sqrt{2(c-t)}$$

für eine reelle Konstante c. □

Ist die Differentialgleichung $p(t,x(t))+q(t,x(t))\,x'(t) = 0$ nicht exakt, so kann man in einigen Fällen durch Multiplikation eines geeigneten Faktors eine exakte Differentialgleichung daraus machen.

Definition 2.7.7 *Eine nirgends verschwindende Funktion $m(t,x)$ heißt* **integrierender Faktor** *der Differentialgleichung*

$$p(t,x(t)) + q(t,x(t))\,x'(t) = 0 \;,$$

falls die Differentialgleichung

$$m(t,x(t))p(t,x(t)) + m(t,x(t))q(t,x(t))\,x'(t) = 0$$

exakt ist.

Beispiel 2.7.8 Die Differentialgleichung $x(t) + 2t\,x'(t) = 0$ ist nicht exakt, da mit $p(t,x) = x$ und $q(t,x) = 2t$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial q}{\partial t} = 2$$

gilt. Betrachten wir jedoch mit $m(t,x) = x$ die Differentialgleichung

$$x^2(t) + 2tx(t)\,x'(t) = 0 \;,$$

so haben wir

$$\frac{\partial(m\cdot p)}{\partial x} = 2x \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial(m\cdot q)}{\partial t} = 2x \;.$$

Die Differentialgleichung

$$x^2(t) + 2tx(t)\,x'(t) = 0$$

ist demzufolge exakt. Mit $(t_*, x_*) = (0,0)$ erhalten wir aus Satz 2.7.4(ii)

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_{t_*}^{t} m(s,x_*)p(s,x_*)ds + \int_{x_*}^{x} m(t,\xi)q(t,\xi)d\xi \\ &= \int_0^t 0^2 ds + \int_0^x 2t\xi d\xi \\ &= tx^2 \;. \end{aligned}$$

Die Gleichung $u(t,x(t)) = c$ liefert dann

$$x(t) = \frac{c}{\sqrt{|t|}}$$

für eine reelle Konstante c. □

3 Differentialgleichungen in der mathematischen Biologie

3.1 Einfache Populationsmodelle

Die reellwertige Funktion $p(t)$ bezeichne die Populationsgröße einer gegebenen Art, das heißt, die Anzahl der Individuen der Population zur Zeit t. Dabei macht man die sinnvolle Annahme, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ die Relation $p(t) \geq 0$ gilt und dass $p \not\equiv 0$ ist. Die zeitliche Änderung $p'(t)$ bezogen auf die Gesamtpopulation $p(t)$ ist die Änderungs- oder Wachstumsrate r. Diese wird im allgemeinen selbst von der Zeit t und der Populationsgröße $p(t)$ abhängig sein, das heißt, $r = r(t, p(t))$. Also haben wir die Gleichung

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = r(t, p(t)) \ .$$

Diese Differentialgleichung für $p(t)$ ist äquivalent zu $p'(t) = r(t, p(t))p(t)$ und heißt **Populations-** oder **Wachstumsmodell**. Die Problematik in der Modellierung besteht darin, die konkrete Gestalt von $r(t, p(t))$ zu bestimmen.

Beispiel 3.1.1 Ein einfaches Wachstumsmodell ist durch **konstante Wachstumsrate** charakterisiert. Hier macht man die Annahme

$$r(t, p(t)) \equiv r \in \mathbb{R} \ .$$

Das führt auf die Differentialgleichung

$$p'(t) = r\, p(t) \ .$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind von der Gestalt

$$p(t) = c\, e^{rt}$$

für eine reelle Konstante c und sind für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert.

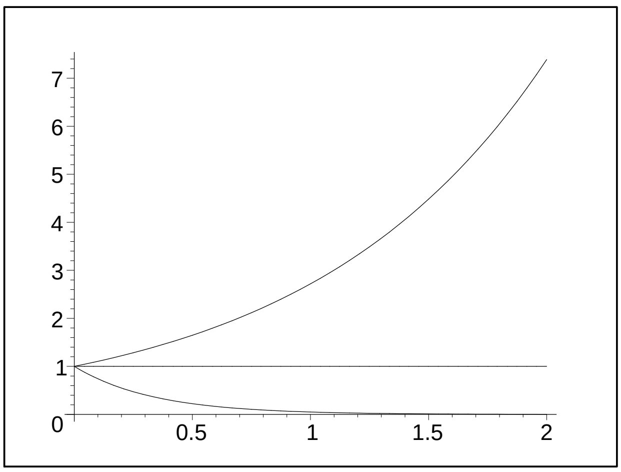
Man erhält diese Lösungen zum Beispiel mittels Trennung der Variablen.

In Abhängigkeit von der Wachstumsrate r besitzt dieses Modell unterschiedliches qualitatives Verhalten.

1. Fall: $r = 0$ In diesem Fall lautet die Lösung $p(t) \equiv c$, das heißt, wir haben eine konstante Populationsgröße.

2. Fall: $r > 0$ In diesem Fall gilt für die Lösung $\lim_{t \to \infty} p(t) = \infty$, das heißt, dieses Modell beschreibt unbeschränktes Wachstum.

3. Fall: $r < 0$ Hier gilt für die Lösung $\lim_{t \to \infty} p(t) = 0$, das heißt, dieses Modell beschreibt das Aussterben der Population.



Dieses exponentielle Wachstumsmodell für $r > 0$ beschreibt ein System mit unbeschränkten Ressourcen. Das Wachstum für positive Wachstumsrate verläuft wie biologische Vermehrung ohne die Auswirkungen von Ressourcenverknappung oder andere hemmende Faktoren. Das heißt, äußere Einflüsse werden nicht berücksichtigt. Die Populationsgröße nimmt zu, wobei der Zuwachs selbst von der Populationsgröße und der Zeit abhängt. Damit ensteht eine positive Rückkopplung, das heißt, je größer die Population ist, desto größer ist auch der Zuwachs. Exponentielles Wachstum kann bei begrenzten Ressourcen nicht über längere Zeiträume vorkommen. Daher ist es lediglich zur Beschreibung von Anfangsphasen einer Populationsentwicklung geeignet. Im allgemeinen, das heißt, für alle Zeiten, ist dieses Modell nicht realistisch. □

Beispiel 3.1.2 In diesem Beispiel stellen wir das **logistische Wachstumsmodell** vor. Das Wort *logis* hat seinen Ursprung im Französischen und bedeutet soviel wie Wohnung oder Unterkunft. Das französische Wort *logistique* heißt Nachschubwesen bzw. Versorgung. Inzwischen ist auch dafür im Deutschen das Wort "Logistik" üblich.

Bei diesem Modell handelt es sich um ein Wachstumsmodell mit beschränktem Wachstum. Es beschreibt das Wachstum einer Population bei vorgegebener Wachstumsgrenze bzw. Sättigungsgrenze. Äußere Einflüsse werden dabei nicht berücksichtigt. Die obere Grenze für die Population $p(t)$ sei $p_M > 0$. Wenn $p(t)$ diese Grenze überschreitet, wird die Wachstumsrate negativ, das heißt,

$$r(t, p(t)) \leq 0 \qquad \text{falls } p(t) \geq p_M \ .$$

Die einfachste Weise, auf welche sich dieses realisieren lässt, ist der Ansatz

$$r(t, p(t)) := k\,(p_M - p(t)) \qquad \text{mit einer positiven Konstante } k > 0 \ .$$

Dann haben wir die Differentialgleichung

$$p'(t) = k\,(p_M - p(t))\,p(t) \ .$$

Diese Differentialgleichung wurde bereits 1838 von dem belgischen Mathematiker Pierre-Francois Verhulst (1804-1849) vorgeschlagen. Integration mittels Trennung der Variablen liefert

$$p(t) = \frac{p_M}{1 + a\,e^{-kp_M t}}$$

für eine reelle Konstante a. Tatsächlich ist

$$k \int dt = kt + c_1$$

und

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{p(p_M - p)} &= \frac{1}{p_M} \int \frac{dp}{p} - \frac{1}{p_M} \int \frac{dp}{p - p_M} \\ &= \frac{1}{p_M} \ln \left| \frac{p}{p - p_M} \right| + c_2 \end{aligned}$$

für reelle Konstanten c_1 und c_2. Daraus folgt

$$\ln \left| \frac{p(t)}{p(t) - p_M} \right| = p_M kt + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Also ist

$$p(t) = \pm(p(t) - p_M) e^c\, e^{kp_M t} \ .$$

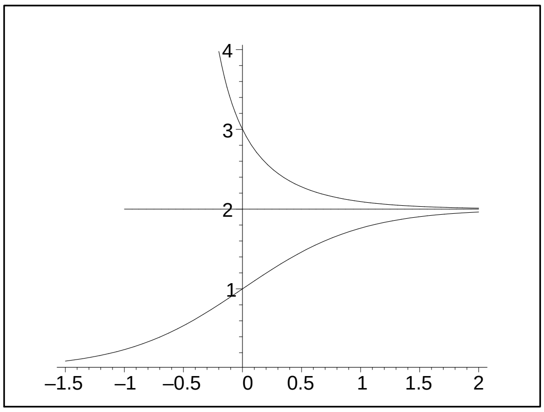
Umstellen nach $p(t)$ liefert schließlich

$$p(t) = \frac{p_M}{1 + a\,e^{-kp_M t}}$$

für eine Konstante $a \in \mathbb{R}$.

Offenbar ist ist der "Startwert" zum Zeitpunkt $t = 0$ gerade $p(0) = \dfrac{p_M}{1+a}$.

In dem hier abgebildeten Beispiel ist $p_M = 2$.



Es gelten die folgenden drei Beziehungen

- $p(0) = p_M \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p(t) \equiv p_M$
- $p(0) > p_M \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{1}{1+a} > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + a < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a < 0$
- $0 < p(0) < p_M \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{1}{1+a} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < 1 + a \quad \Longleftrightarrow \quad a > 0$

In jedem Fall ist $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t) = p_M$.

Der Zuwachs der Population hängt in diesem Modell von der noch verbleibenden Kapazität zur Wachstumsgrenze ab. Wird die verbleibende Kapazität kleiner, nimmt auch der Zuwachs ab. Solange die Population klein gegenüber der Kapazitätsgrenze ist, wächst sie exponentiell. Mit größer werdender Population wächst sie asymptotisch an die Wachstumsgrenze. Das heißt genauer: bei einem Startwert, welcher kleiner ist als die obere Grenze für die Populationsgröße, nähert sich die Populationsgröße für große t von unten asymptotisch dieser Grenze an. Für große t haben wir in diesem Modell also eine exponentielle Sättigung, wie sie zum Beispiel bei Ressourcenverknappung auftritt. Liegt der Startwert dagegen oberhalb der Grenze für die Populationsgröße, so verringert sich die Populationsgröße, fällt monoton und nähert sich von oben asymptotisch dieser Grenze an. □

Beispiel 3.1.3 Das logistische Modell kann derart verallgemeinert werden, dass das Wachstum der Population erst einsetzt, wenn die Populationsgröße oberhalb eines Schwellenwertes liegt. Dieses **logistische Modell mit Schwellenwert** wird durch die Differentialgleichung

$$p'(t) = k(p_M - p(t))(p(t) - p_m) \qquad \text{mit einer positiven Konstante } k > 0$$

beschrieben. Dabei ist p_m der Schwellenwert und p_M die obere Grenze der Populationsgröße. Außerdem macht man die sinnvolle Annahme, dass $0 < p_m < p_M$.

Setzt man nun

$$q(t) := p(t) - p_m \ ,$$

so erhält man für $q(t)$ die Differentialgleichung

$$q'(t) = k(p_M - p_m - q(t))q(t) \ .$$

Das ist die Differentialgleichung des logistischen Wachstumsmodells aus dem vorangegangen Beispiel (Beispiel 3.1.2) mit $p_M - p_m$ anstelle von p_M und wir erhalten

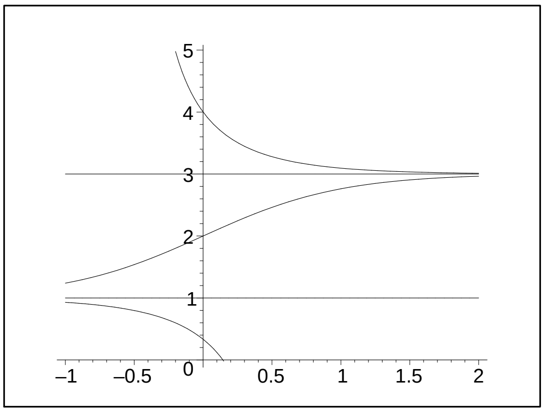
$$q(t) = \frac{p_M - p_m}{1 + a\,e^{-k(p_M - p_m)t}}$$

für eine reelle Konstante a. Folglich ist

$$p(t) = p_m + \frac{p_M - p_m}{1 + a\,e^{-k(p_M - p_m)t}}$$

für eine reelle Konstante a.

In dem hier abgebildeten Beispiel ist $p_m = 1$ und $p_M = 3$.

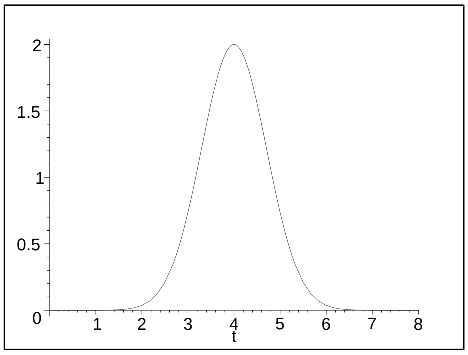


□

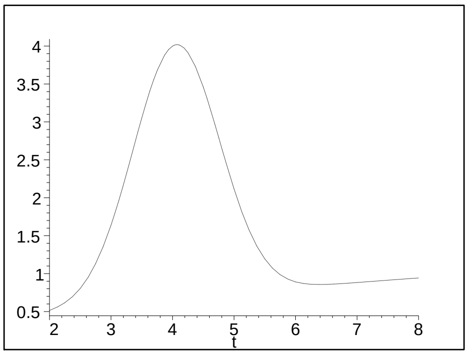
Die angegebenen Beispiele sind die in der Literatur am häufigsten genannten Wachstumsmodelle für einzelne Populationen.

Als Anregung zum Nachdenken, seien im folgenden einige weitere Phänomene genannt. Wie könnten Modelle aussehen, welche diese Phänomene beschreiben?

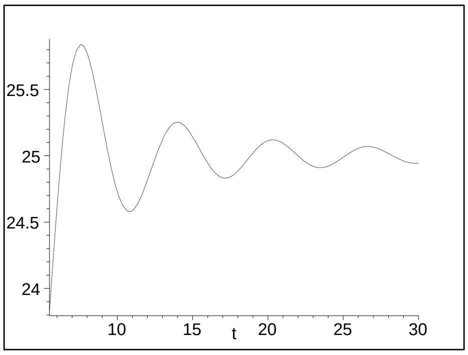
Wachstum mit Selbstvergiftung: Dieses Modell beschreibt die Entwicklung einer Population, die sich durch Abgabe von Umweltgiften selbst vergiftet. In Abhängigkeit von der Populationsgröße werden Umweltgifte (z.B. Stoffwechselendprodukte) abgegeben. Diese verbleiben im System und werden nicht abgebaut. Die Giftmenge wird im zeitlichen Verlauf immer größer und bewirkt die Abnahme der Population. Die Population wächst zunächst bis zu einem Maximum, anschließend nimmt sie wieder ab und stirbt schließlich aus.



Wachstum mit Selbstvergiftung und Gewöhnung an das Gift: Bis zu einem maximalen Wert wächst die Populationsgröße an und ist danach wieder abfallend bis zu einem Niveau, ab welchem sich die Populationsgröße nur schwach ansteigend weiterentwickelt. Dieses Verhalten kann man zum Beispiel bei Mikroorganismen beobachten, welche nach gewisser Zeit gegen Gifte resistent werden.



Wachstum mit Selbstvergiftung und Abbau des Giftes: Dieses Modell beschreibt die Entwicklung einer Population, die sich durch Produktion von Umweltgiften zunächst selbst vergiftet. Im Unterschied zum Wachstum mit Selbstvergiftung baut sich die Giftmenge aber wieder ab. Die Population wächst zunächst, das heißt, ohne Gift, stark an und produziert dadurch Gift in erheblichem Umfang. Dadurch wird die Population wieder dezimiert, was auch die Produktion von Gift verringert und damit die Abnahme der Population. Dann steigt die Population wieder an, was zu einem schwingenden Verhalten führt, das sich allmählich auf einen Gleichgewichtszustand einpendelt.



□

Bisher wurden nur Differentialgleichungen erster Ordnung für **eine** gesuchte Funktion betrachtet.

In den beiden folgenden Abschnitten betrachten wir Differentialgleichungssysteme mit **zwei** Gleichungen und **zwei** gesuchten Funktionen. Dabei wird das Zusammenspiel zweier miteinander wechselwirkender Populationen beschrieben.

3.2 Räuber–Beute–Modelle

Im folgenden bezeichnet $x(t)$ die Populationsgröße der Beutespezies zur Zeit t und $y(t)$ die Populationsgröße der Räuberspezies zur Zeit t. Die Wachstumgleichungen für jede der beiden Populationen lauten

$$x'(t) = r\,x(t) \qquad \text{und} \qquad y'(t) = p\,y(t)\ .$$

Dabei werden die Wachstumsraten r und p der beiden Populationen jeweils auch von der anderen Population beeinflusst, das heißt

$$r = r(t, x(t), y(t)) \qquad \text{und} \qquad p = p(t, x(t), y(t)) \ .$$

Insgesamt erhalten wir also ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen

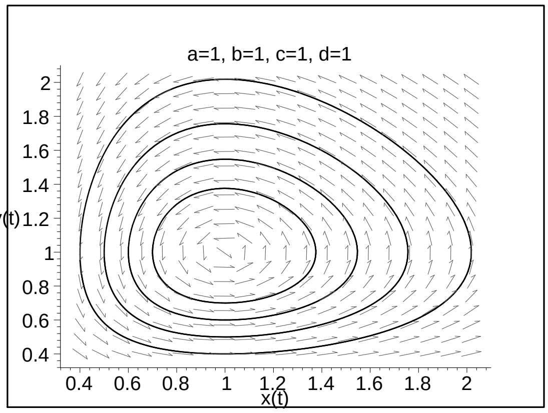
$$\begin{aligned} x'(t) &= r(t, x(t), y(t))\, x(t) \\ y'(t) &= p(t, x(t), y(t))\, y(t) \ . \end{aligned}$$

Beispiel 3.2.1 In diesem Beispiel wird das sogenannte **Lotka–Volterra–Modell**, ein **Räuber–Beute–Modell mit konstanten Wachstumsraten**, vorgestellt. Die Differentialgleichungen gehen auf den amerikanischen Biophysiker Alfred J. Lotka (1880-1949) und den italienischen Mathematiker Vito Volterra (1860-1940) zurück und lauten

$$\begin{aligned} x'(t) &= (a - b\, y(t))\, x(t) \\ y'(t) &= (-c + d\, x(t))\, y(t) \end{aligned}$$

mit reellen Konstanten $a, b, c, d > 0$.

Die Beutepopulation verfügt über unbeschränkte Ressourcen, zum Beispiel pflanzliche Nahrung. Sind keine Räuber vorhanden, das heißt $y(t) \equiv 0$, vermehrt sie sich nach der Wachstumsgleichung $x'(t) = a\, x(t)$. Diese Gleichung beschreibt exponentielles unbeschränktes Wachstum mit konstanter Wachstumsrate $a > 0$. Bei der Anwesenheit von Räubern verringert sich die Wachstumsrate proportional zur Größe der Räuberpopulation von a auf $a - b\, y(t)$. Dagegen stirbt die Räuberpopulation ohne Beute gemäß der Wachstumsgleichung $y'(t) = -c\, y(t)$ mit $c > 0$ aus. Die Anwesenheit von Beute ermöglicht eine größere Wachstumsrate. Je nach Umfang der vorhandenen Beute nimmt der Nahrungsvorrat zu und die Wachstumsrate steigt auf $-c + d\, x(t)$ an. Bei Abwesenheit einer der beiden Populationen haben wir jeweils einen Übergang zu einem einfachen Einpopulationenmodell.

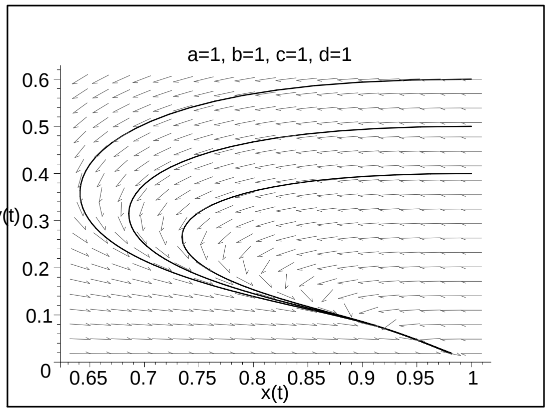


Die Lösungen dieser Gleichungen sind periodisch, die Lösungskurven machen geschlossene Umläufe und hören nirgends auf. □

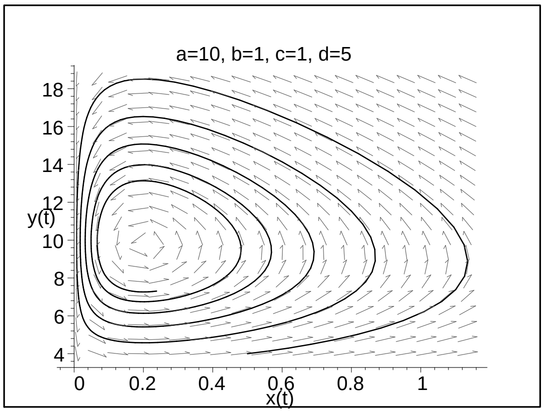
Beispiel 3.2.2 Dieses Beispiel beschreibt ein **Räuber–Beute–Modell mit beschränktem Wachstum**. Das oben angegebene Lotka–Volterra–Modell kann in der Weise modifiziert werden, dass sich die Beute ohne Räuber nach dem logistischen Wachstumsmodell entwickelt. Die Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} x'(t) &= (a - b\, y(t) - x(t))\, x(t) \\ y'(t) &= (-c + d\, x(t))\, y(t) \end{aligned}$$

mit reellen Konstanten $a, b, c, d > 0$.



Sind die Konstanten a, b, c, d wie oben angegeben, so reicht das beschränkte Wachstum der Beutepopulation nicht aus, um genügend Nahrung für die Räuberpopulation zur Verfügung zu stellen. Die Räuberpopulation stirbt schließlich aus.



Bei dieser Wahl der Konstanten nähert sich das System asymptotisch einem Gleichgewichtszustand an. Das heißt, das System pendelt sich allmählich auf einen Zustand ein, in dem sich die Anteile beider Populationen nicht mehr verändern. □

3.3 Konkurrenz–Modelle

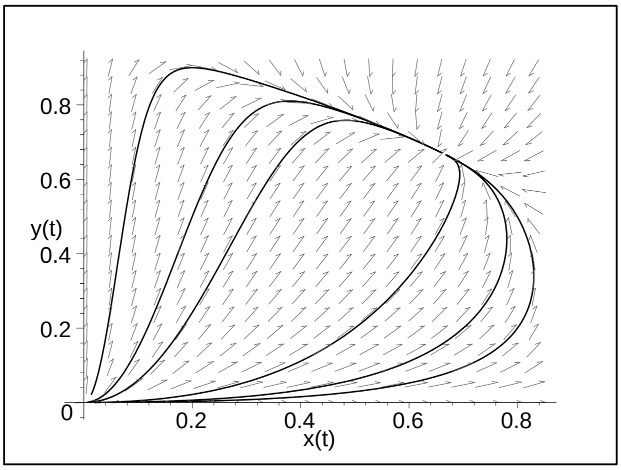
Nutzen zwei Populationen die gleichen Ressourcen, so treten sie in Konkurrenz zueinander. Dies wird durch die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)\frac{r}{k_1}\left(k_1 - x(t) - \alpha_{12}y(t)\right) \\ y'(t) &= y(t)\frac{p}{k_2}\left(k_2 - y(t) - \alpha_{21}x(t)\right) \end{aligned}$$

beschrieben. Hier bezeichnen $r > 0$ und $p > 0$ die entsprechenden Wachstumsraten der Populationen. Für jede der beiden Populationen gilt ohne das Vorhandensein der anderen Population ein logistisches Wachstumsmodell. Dabei entsprechen $k_1, k_2 > 0$ den Sättigungsgrenzen. Schließlich beschreiben die Konstanten $\alpha_{12}, \alpha_{21} > 0$ die Konkurrenz.

In Abhängigkeit von den Konstanten erhält man drei generische Fälle. Das heißt, diese drei Fälle beschreiben die allgemeinen Situationen, die auftreten können. Es gibt zwar entartete Grenzfälle, die aber praktisch nicht möglich sind.

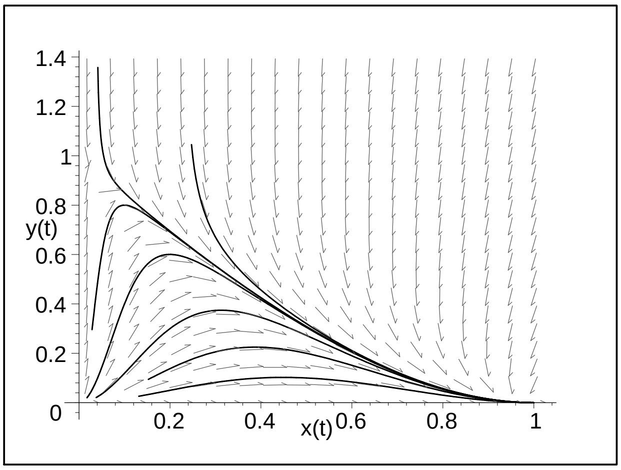
1. Fall: $\alpha_{12} < \dfrac{k_1}{k_2} < \dfrac{1}{\alpha_{21}}$



In diesem Fall besitzt das System einen asymptotisch stabilen Gleichgewichtspunkt. Das heißt, alle Lösungskurven dieses Konkurrenzmodells streben zu dem einen Gleichgewichtspunkt hin.

Biologisch heißt das, dass beide Populationen koexistieren und sich diesem Gleichgewichtszustand asymptotisch annähern.

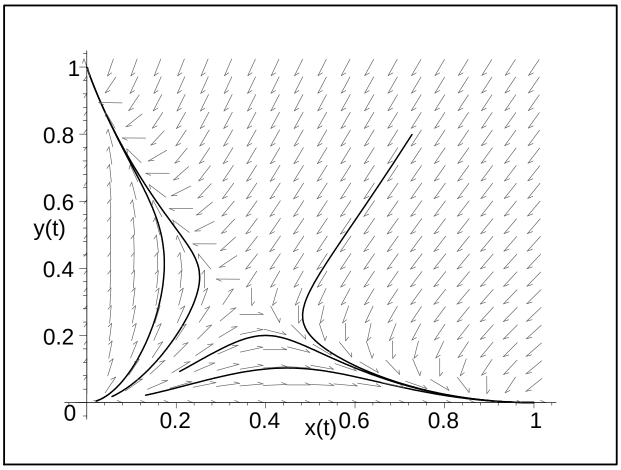
2. Fall: $\alpha_{12} < \dfrac{k_1}{k_2}$ und $\dfrac{1}{\alpha_{21}} < \dfrac{k_1}{k_2}$



In diesem Fall besitzt das System ebenfalls einen asymptotisch stabilen Gleichgewichtspunkt. Dieser Punkt bei $(x, y) = (1, 0)$ heißt, dass eine Art verschwunden ist.

Biologisch bedrängen sich die beiden Arten sich so stark, dass eine von beiden ausgeschlossen ist, das heißt wir haben hier Ausschluss durch Konkurrenz und somit das Aussterben einer Population.

3. Fall: $\frac{1}{\alpha_{21}} < \frac{k_1}{k_2} < \alpha_{12}$



In diesem Fall gibt es zwei asymptotisch stabile Gleichgewichtspunkte. Im Inneren gibt es noch einen instabilen Gleichgewichtspunkt, in dem beide Arten koexistieren würden. Diese unsichere Koexistenz verlangt, dass die Anfangswerte des Systems ganz präzise gewählt sein müssen, was schlicht unmöglich ist.

Biologisch haben wir die Situation, dass es von den Anfangsbedingungen abhängig ist, welche Population vernichtet wird. Außerdem widerspiegelt sich hier das Volterrasche Exklusionsprinzip, welches besagt, dass eine der beiden Arten aussterben muss, falls die Konkurrenz hinreichend stark ist.

Bemerkung 3.3.1 Die hier angegebenen Beispiele sind offenbar allereinfachste Modelle. Sie beschreiben die tatsächlichen Vorgänge in der Natur nur in sehr beschränktem Maße. Will man darüberhinaus räumliche Verteilungen oder Wanderungseffekte beschreiben, wie sie beispielsweise bei der Ausbreitung von Epidemien auftreten, so führt das auf partielle Differentialgleichungen. □

4 Existenz– und Eindeutigkeitssätze

4.1 Reduktion einer Differentialgleichung k–ter Ordnung auf ein äquivalentes System erster Ordnung

Da wir in diesem Kapitel einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung beweisen werden, soll in diesem Abschnitt kurz erläutert werden, wie eine Differentialgleichung beziehungsweise ein Differentialgleichungssystem k–ter Ordnung auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung reduziert wird.

Beispiel 4.1.1 Wir betrachten die so genannte Schwingungsgleichung, das heißt die Differentialgleichung $x''(t) = -x(t)$. Wir setzen $y_0(t) := x(t)$ und $y_1(t) := x'(t)$. Die Differentialgleichung für $x(t)$ liefert das folgende Differentialgleichungssystem für $y_0(t)$ und $y_1(t)$

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= y_1(t) \\ y_1'(t) &= -y_0(t)\ . \end{aligned}$$

Die Lösungen dieses Differentialgleichungssystems sind $y_0(t) = a\sin(t) + b\cos(t)$ und $y_1(t) = a\cos(t) - b\sin(t)$ für reelle Konstanten a und b. Dann sind die Lösungen der Differentialgleichung $x''(t) = -x(t)$ gegeben durch $x(t) = a\sin(t) + b\cos(t)$. □

Wir betrachten allgemein eine explizite Differentialgleichung k–ter Ordnung

$$x^{(k)}(t) = F\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)\right)$$

mit $F : \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ mal}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^n$ und mit den Anfangsbedingungen $x^{(j)}(t_0) = a_j \in \mathbb{R}^n$ für $j = 0, \ldots, k-1$.

Die Funktion $\tilde{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^{kn}$ sei definiert durch

$$\tilde{F}(t, y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}) := (y_1, \ldots, y_{k-1}, F(t, y_0, y_1, \ldots, y_{k-1})) \ ,$$

wobei $y_j \in \mathbb{R}^n$ für $j = 0, \ldots, k-1$.

Satz 4.1.2 *Die Funktion $x :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Lösung der Differentialgleichung*

$$x^{(k)}(t) = F\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)\right)$$

mit den Anfangsbedingungen $x^{(j)}(t_0) = a_j \in \mathbb{R}^n$ für $j = 0, \ldots, k-1$, wenn die Funktion $y(t) = (x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)) :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}^{kn}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = \tilde{F}(t, y(t))$$

erster Ordnung mit $y(t_0) = (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1})$ ist.

Beweis. Sei $x(t)$ eine Lösung von $x^{(k)}(t) = F\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)\right)$ mit $x^{(j)}(t_0) = a_j \in \mathbb{R}^n$ für $j = 0, \ldots, k-1$. Setzen wir dann $y_0(t) := x(t)$, $y_1(t) := x'(t)$ und so weiter bis $y_{k-1}(t) := x^{(k-1)}(t)$, so erhalten wir für die Ableitung von $y(t) = (y_0(t), y_1(t), \ldots, y_{k-2}(t), y_{k-1}(t))$

$$\begin{aligned}
y'(t) &= (y_0'(t), y_1'(t), \ldots, y_{k-2}'(t))), y_{k-1}'(t)) \\
&= \left(x'(t), x''(t), \ldots, x^{(k-1)}(t), x^{(k)}(t)\right) \\
&= \left(x'(t), x''(t), \ldots, x^{(k-1)}(t), F\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)\right)\right) \\
&= (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_{k-1}(t), F(t, y_0(t), y_1(t), \ldots, y_{k-1}(t))) \\
&= \tilde{F}(t, y(t))
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
y(t_0) &= (y_0(t_0), y_1(t_0), \ldots, y_{k-2}(t_0), y_{k-1}(t_0)) \\
&= \left(x(t_0), x'(t_0), \ldots, x^{(k-1)}(t_0)\right) \\
&= (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}) \ .
\end{aligned}$$

Ist umgekehrt $y(t)$ eine Lösung von $y'(t) = \tilde{F}(t, y(t))$ mit $y(t_0) = (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1})$, so erhalten wir für $x(t) = y_0(t)$

$$\begin{aligned}
x'(t) &= y_1(t) \\
x''(t) &= y_2(t) \\
&\ \vdots \\
x^{(k-1)}(t) &= y_{k-1}(t) \\
x^{(k)}(t) &= y_{k-1}'(t) \quad = \quad F(t, y_0(t), y_1(t), \ldots, y_{k-1}(t)) \\
&= F\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)\right)
\end{aligned}$$

und $x^{(j)}(t_0) = y_j(t_0) = a_j$ für $j = 0, \ldots, k-1$, indem wir die Vektorfunktionen komponentenweise miteinander vergleichen. □

4.2 Wiederholung und Vorbereitungen

Definition 4.2.1 *Ein* **metrischer Raum** *ist ein Paar* (X, d) *bestehend aus einer Menge* X *und einer Abbildung* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *derart, dass*

(i) $d(x, y) \geq 0$ *für alle* $x, y \in X$ *und* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$ *für alle* $x, y \in X$

(iii) Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *für alle* $x, y, z \in X$

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* X *heißt* **Cauchy-Folge**, *falls zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert mit* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ *für alle* $n, m \geq n_0$.

Ein metrischer Raum (X, d) *heißt* **vollständig**, *falls jede Cauchy-Folge in* X *konvergiert.*

Beispiel 4.2.2 Der Euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik d_E, welche durch

$$d_E(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots (x_n - y_n)^2}$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ gegeben ist, ist ein metrischer Raum. □

Das folgende Beispiel wird beim Beweis der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung (Satz von Picard-Lindelöff) eine wichtige Rolle spielen.

Beispiel 4.2.3 Es sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $X = C(I, \mathcal{K})$ die Menge aller stetigen Abbildungen von I nach $\mathcal{K}$. Die "Punkte" dieser Menge sind Abbildungen. $d_s : X \times X \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$d_s(f_1, f_2) := \sup_{t\in I} \|f_1(t) - f_2(t)\| \qquad \text{für } f_1, f_2 \in X\,. \tag{4.2.1}$$

Sind f_1 und f_2 stetig auf I, so ist auch $f_1 - f_2$ stetig auf I. Da I abgeschlossen ist, ist somit $f_1 - f_2$ beschränkt und das Supremum in (4.2.1) kann durch das Maximum auf I ersetzt werden. □

Satz 4.2.4 $(C([a, b], \mathcal{K}), d_s)$ *ist ein vollständiger metrischer Raum.*

Beweis. Zunächst sind die drei Bedingungen der Definition eines metrischen Raumes zu überprüfen. Das ist relativ einfach. Wir beweisen hier nur die Dreiecksungleichung. Seien $f_1, f_2, f_3 \in C([a, b], \mathcal{K})$. Nach der Dreiecksungleichung für die Euklidische Standardmetrik des $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\|f_1(t) - f_2(t)\| \leq \|f_1(t) - f_3(t)\| + \|f_3(t) - f_2(t)\| \qquad \text{für alle } t \in I\,.$$

Folglich ist

$$\|f_1(t) - f_2(t)\| \leq \sup_{s\in I} \|f_1(s) - f_3(s)\| + \sup_{s\in I} \|f_3(s) - f_2(s)\|\,,$$

also

$$\|f_1(t) - f_2(t)\| \leq d_s(f_1, f_3) + d_s(f_3, f_2)\,.$$

Gehen wir in dieser Ungleichung zum Supremum über I über (auf der rechten Seite der Ungleichung kommt kein t mehr vor), erhalten wir die gewünschte Dreiecksungleichung

$$d_s(f_1, f_2) = \sup_{t\in I} \|f_1(t) - f_2(t)\| \leq d_s(f_1, f_3) + d_s(f_3, f_2)\,.$$

Nun bleibt noch die Vollständigkeit zu zeigen. Dazu sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C([a, b], \mathcal{K})$. Das heißt, für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $d_s(f_n, f_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$, bzw.

$$\|f_n(t) - f_m(t)\| < \varepsilon \qquad \text{für jedes } t \in I \text{ und alle } n, m \geq n_0\,.$$

Da $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist, bedeutet das nach dem Cauchy-Kriterium, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen ein Funktion $f : I \to \mathcal{K}$ konvergiert. Die Grenzfunktion f ist nach einem Satz der Analysisvorlesung stetig, also $f \in C([a,b],\mathcal{K})$, und die gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f bedeutet $\lim\limits_{n\to\infty} d_s(f_n, f) = 0$, d.h. $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ in dem metrischen Raum $(C([a,b],\mathcal{K}), d_s)$. $\square$

Schließlich benötigen wir beim Beweis des Satzes von Picard-Lindelöff ganz entscheidend den Banachschen Fixpunktsatz.

Satz 4.2.5 (Banachscher Fixpunktsatz) *Es sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Abbildung mit folgender Eigenschaft: Es existiert ein $\alpha \in \,]0,1[$ mit*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y) \qquad \textit{für alle } x, y \in X \; .$$

Dann gilt:

(i) f hat genau einen Fixpunkt $\overline{x}$, das heißt, es existiert genau ein $\overline{x} \in X$ mit $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

(ii) Für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := f(x_{n-1})$ gegen $\overline{x}$.

(iii) Es gilt die Fehlerabschätzung

$$d(x_n, \overline{x}) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N} \; .$$

Beweis. Im ersten Schritt des Beweises zeigen wir die Existenz von $\overline{x}$. Dazu sei $x_0 \in X$ beliebig gewählt. Wir betrachten die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := f(x_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$. Diese Folge ist eine Cauchy–Folge. Tatsächlich erhalten wir aus der Bedingung $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$, dass

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \\
&\leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \\
&= \alpha d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \\
&\leq \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\
&= \alpha^2 d(f(x_{n-2}), f(x_{n-3})) \\
&\leq \alpha^3 d(x_{n-2}, x_{n-3}) \\
&\;\;\vdots \\
&\leq \alpha^n d(x_1, x_0) \; .
\end{aligned}$$

Also ist insgesamt $d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$. Somit gilt für $n < m$ nach Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_n) \\
&\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + d(x_{m-2}, x_n) \\
&\;\;\vdots \\
&\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \\
&\leq \left\{\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \ldots + \alpha^n\right\} d(x_1, x_0) \\
&= \alpha^n \left\{\alpha^{m-n-1} + \alpha^{m-n-2} + \ldots + 1\right\} d(x_1, x_0) \; ,
\end{aligned}$$

woraus mit

$$\sum_{k=0}^{l} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{l+1}}{1-\alpha}$$

die Ungleichung

$$d(x_m, x_n) \leq \alpha^n \frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

folgt. Da $0 < \alpha < 1$ ist, gilt $1 - \alpha^{m-n} < 1$, was wiederum

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \qquad \text{für } n < m$$

impliziert. Weiterhin gilt wegen $0 < \alpha < 1$, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$.

Dies bedeutet aber: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\alpha^n < \frac{1-\alpha}{d(x_1, x_0)} \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0 \ .$$

Daraus folgt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$d(x_m, x_n) < \frac{d(x_1, x_0)}{1-\alpha} \alpha^n < \varepsilon \qquad \text{für alle } m > n \geq n_0 \ .$$

Insgesamt haben wir also gezeigt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ für alle $m, n \geq n_0$. Das besagt aber gerade, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge ist. Da der metrische Raum (X, d) vollständig ist, konvergiert jede Cauchy–Folge gegen einen Punkt in X. Folglich existiert ein $\overline{x} \in X$ mit $\overline{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Für dieses $\overline{x} \in X$ behaupten wir, dass $f(\overline{x}) = \overline{x}$. Um dieses einzusehen, schließen wir wie folgt. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(f(\overline{x}), \overline{x}) &\leq d(f(\overline{x}), x_n) + d(x_n, \overline{x}) \\ &= d(f(\overline{x}), f(x_{n-1})) + d(x_n, \overline{x}) \\ &\leq \alpha d(\overline{x}, x_{n-1}) + d(x_n, \overline{x}) \ . \end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, \overline{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_{n-1}, \overline{x}) = 0$. Gehen wir in der Ungleichung

$$d(f(\overline{x}), \overline{x}) \leq \alpha d(\overline{x}, x_{n-1}) + d(x_n, \overline{x})$$

zum Grenzwert für $n \to \infty$ über, so erhalten wir $d(f(\overline{x}), \overline{x}) = 0$ und demzufolge $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

Im zweiten Schritt des Beweises zeigen wir die Eindeutigkeit des Fixpunktes $\overline{x}$. Dazu nehmen wir an, dass sowohl $\overline{x}$ als auch $\overline{\overline{x}}$ Fixpunkte von f sind, das heißt, es gilt $f(\overline{x}) = \overline{x}$ und $f\left(\overline{\overline{x}}\right) = \overline{\overline{x}}$. Dann muss

$$d\left(\overline{x}, \overline{\overline{x}}\right) = d\left(f(\overline{x}), f\left(\overline{\overline{x}}\right)\right) \leq \alpha d(\overline{x}, \overline{\overline{x}})$$

gelten. Nun ist aber $\alpha < 1$. Damit folgt daraus bereits $d\left(\overline{x}, \overline{\overline{x}}\right) = 0$. Also ist tatsächlich $\overline{x} = \overline{\overline{x}}$.

Damit sind die beiden ersten Behauptungen, also (i) und (ii) gezeigt. Die Behauptung (iii) erhalten wir aus der oben gezeigten Ungleichung

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

indem wir für $m \to \infty$ zum Grenzwert übergehen. Dann ist nämlich

$$d(\overline{x}, x_n) = \lim_{m\to\infty} d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \ .$$

□

Bemerkung 4.2.6 Eine Abbildung $f : X \to X$ mit der in Satz 4.2.5 angegebenen Eigenschaft heißt **kontrahierend**. Diese Bezeichnung weist darauf hin, dass der Abstand der Bildpunkte $f(x)$ und $f(y)$ stets kleiner ist, als der Abstand der Urbildpunkte x und y.

Außerdem ist eine solche Abbildung immer stetig. Ist nämlich $\varepsilon > 0$ und betrachten wir $\delta = \varepsilon/\alpha$, so erhalten wir

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) < \alpha\delta = \alpha \cdot \varepsilon/\alpha = \varepsilon \ .$$

□

Im folgenden betrachten wir eine offene Teilmenge $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $F = F(t,x) : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$.

Definition 4.2.7 *Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{O}$, so heißt die Abbildung F* **Lipschitz-stetig auf $\mathcal{A}$ bezüglich der x-Variablen**, *falls eine Konstante $L = L(\mathcal{A})$ mit der Eigenschaft*

$$\|F(t,x_1) - F(t,x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \qquad \textit{für alle } (t,x_1),\ (t,x_2) \in \mathcal{A}$$

existiert. L heißt dann **Lipschitz–Konstante**.

Beispiel 4.2.8 Für $n = 1$ betrachten wir $F(t,x) = |x|$. Nach Dreiecksungleichung ist

$$|F(t,x_1) - F(t,x_2)| = |\ |x_1| - |x_2|\ | \leq |x_1 - x_2| \ .$$

Folglich ist F auf $\mathbb{R}^2$ bezüglich der x-Variablen Lipschitz-stetig mit $L = 1$. □

4.3 Der Satz von Picard–Lindelöff

Satz 4.3.1 (Satz von Picard–Lindelöff) *Es sei $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $(t_0, x_0) \in \mathcal{O}$. Weiterhin seien $a, b > 0$ mit*

$$\mathcal{A} := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(x_0, b)} \subseteq \mathcal{O} \ ,$$

wobei $\overline{B(x_0,b)}$ den Abschluss der Kugel $B(x_0,b)$ vom Radius b um den Punkt x_0 bezeichnet, und $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ sei auf $\mathcal{A}$ bezüglich der x–Variablen Lipschitz–stetig mit der Lipschitz–Konstanten L. Schließlich sei $M := \sup\{\|F(t,x)\| \ :\ (t,x) \in \mathcal{A}\}$ und

$$\alpha := \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{2L}\right\} \ .$$

Dann besitzt das Anfangswertproblem $x'(t) = F(t, x(t))$ und $x(t_0) = x_0$ eine eindeutig bestimmte Lösung

$$u : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \overline{B(x_0, b)} \ .$$

Beweis. Wir versehen die Menge $Y = C\left([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \overline{B(x_0,b)}\right)$ aller stetigen Abbildungen $f : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \overline{B(x_0,b)} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit der Metrik d_s (vgl. Beispiel 4.2.3). Nach Satz 4.2.4 ist der metrische Raum (Y, d_s) vollständig. Sei

$$X = \{f \in Y \ :\ f(t_0) = x_0\} \ .$$

Dann ist X eine abgeschlossene Teilmenge von Y. Gilt nämlich $f_n \to f$ in (Y, d_s) und $f_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$f(t_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(t_0) = x_0 \ ,$$

das heißt, $f \in X$. Also ist (X, d_s) auch ein vollständiger metrischer Raum.

Für $f \in X$ definieren wir $Qf : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^n$ durch

$$(Qf)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds \ .$$

Dabei erfolgt die Integration der vektorwertigen Funktion $F(s, x(s))$ komponentenweise. Das Integral von t_0 bis t ist dann eine vektorwertige Funktion in t. Da f und F stetig sind, ist auch Qf stetig. Außerdem gilt

$$(Qf)(t_0) = x_0$$

und

$$
\begin{aligned}
\|(Qf)(t)-x_0\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} F(s,f(s))ds\right\| \\
&\le \left|\int_{t_0}^{t} \|F(s,f(s))\|\, ds\right| \\
&\le \left|\int_{t_0}^{t} M ds\right| \\
&= M|t-t_0| \\
&\le M\alpha \\
&\le M\frac{b}{M} \\
&= b\ ,
\end{aligned}
$$

das heißt

$$
(Qf)(t) \in \overline{B(x_0,b)}
$$

für alle $t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$. Folglich ist $Qf \in X$ für alle $f \in X$.

Wir zeigen jetzt, dass die Abbildung $Q : X \to X$ kontrahierend ist. Seien $f_1, f_2 \in X$. Dann haben wir für alle $t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$

$$
\begin{aligned}
\|(Qf_1)(t)-(Qf_2)(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} \left(F(s,f_1(s))-F(s,f_2(s))\right) ds\right\| \\
&\le \left|\int_{t_0}^{t} \|F(s,f_1(s))-F(s,f_2(s))\|\, ds\right| \\
&\le L\left|\int_{t_0}^{t} \|f_1(s)-f_2(s)\|\, ds\right| \\
&\le L\, d_s(f_1,f_2)\, |t-t_0| \\
&\le L\, d_s(f_1,f_2)\, \alpha \\
&\le L\, d_s(f_1,f_2)\, \frac{1}{2L}\ ,
\end{aligned}
$$

also

$$
\|(Qf_1)(t)-(Qf_2)(t)\| \le \frac{1}{2} d(f_1,f_2)\ .
$$

Indem wir in dieser Ungleichung zum Supremum übergehen, erhalten wir

$$
d_s(Qf_1, Qf_2) \le \frac{1}{2} d_s(f_1,f_2)\ .
$$

Also ist Q tatsächlich kontrahierend und wir können den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Danach existiert ein eindeutig bestimmtes $u \in X$ mit $Qu = u$, das heißt,

$$
u(t) = (Qu)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,f(s))ds \qquad \text{für alle } t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]\ .
$$

Die Funktion u ist differenzierbar und es gilt

$$
u'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} F(s,u(s))ds\right) = F(t,u(t))
$$

sowie $u(t_0) = x_0$. Also ist u eine Lösung des angegebenen Anfangswertproblems. Damit ist die Existenz einer Lösung gezeigt.

Jetzt müssen wir noch nachweisen, dass diese Lösung eindeutig bestimmt ist.

Angenommen $\tilde{u} : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \overline{B(x_0, b)}$ ist eine weitere Lösung des Anfangwertproblems, das heißt, es gilt

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = F(t, \tilde{u}) \qquad \text{und} \qquad \tilde{u}(t_0) = x_0 \ .$$

Integration von t_0 bis t liefert dann

$$\tilde{u}(t) - \tilde{u}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \tilde{u}'(s)ds = \int_{t_0}^{t} F(s, \tilde{u}(s))ds \ ,$$

also

$$\tilde{u}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \tilde{u}(s))ds$$

beziehungsweise $Q\tilde{u} = \tilde{u}$. Wir haben somit gezeigt, dass $\tilde{u}$ ein Fixpunkt von Q ist. Die Eindeutigkeitsaussage des Banachschen Fixpunktsatzes liefert $\tilde{u} = u$. Damit ist der Satz gezeigt. □

Bemerkung 4.3.2 Dieser Satz liefert mit dem Banachschen Fixpunktsatz ein Iterationsverfahren zur Berechnung der Lösung des Anfangswertproblems. Dazu wähle man eine beliebige Funktion $u_0 \in C\left([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \overline{B(x_0, b)}\right)$ mit $u_0(t_0) = x_0$ als Startfunktion und iteriere gemäß

$$u_m(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, u_{m-1}(s))ds \qquad \text{für } t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \text{ und } m \in \mathbb{N} \ .$$

□

Die folgenden beiden Beispiele sollen dieses Iterationsverfahren illustrieren.

Beispiel 4.3.3 Wir betrachten die Differentialgleichung $x'(t) = x(t) - 1$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und wählen $u_0(t) \equiv 0$ als Startfunktion. Wir haben $F(t, x) = x - 1$. Wegen

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| = \|x_1 - x_2\|$$

ist mit $L = 1$ die Lipscshitz-Bedingung erfüllt. Der erste Iterationsschritt liefert dann

$$u_1(t) = 0 + \int_0^t F(s, u_0(s))ds = \int_0^t (-1)ds = -t \ .$$

Wir erhalten also $u_1(t) = -t$. Damit gehen wir in den zweiten Iterationsschritt hinein und erhalten

$$u_2(t) = \int_0^t F(s, u_1(s))ds = \int_0^t (-s - 1)ds = -\frac{t^2}{2} - t \ .$$

Dann ist weiter

$$u_3(t) = \int_0^t F(s, u_2(s))ds = \int_0^t (-\frac{s^2}{2} - s - 1)ds = -\frac{t^3}{2 \cdot 3} - \frac{t^2}{2} - t \ .$$

Durch vollständige Induktion über m sehen wir, dass dann nach m Schritten

$$u_m(t) = -\sum_{k=1}^{m} \frac{t^k}{k!}$$

ist. Tatsächlich gilt

$$u_{m+1} = \int_0^t F(s, u_m(s))ds = \int_0^t \left(-\sum_{k=1}^{m} \frac{s^k}{k!} - 1\right) ds = -\sum_{k=1}^{m} \frac{t^{k+1}}{k!(k+1)} - s = -\sum_{k=1}^{m+1} \frac{t^k}{k!} \ .$$

Mit dem Übergang zum Grenzwert für $m \to \infty$ erhalten wir

$$u(t) = -\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{t^k}{k!} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} + 1 = -e^t + 1$$

als Lösung der Differentialgleichung. Diese Lösung erfüllt tatsächlich die Anfangsbedingung, es ist $u(0) = 0$. □

Beispiel 4.3.4 Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit der Anfangsbedingung} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und wählen die Startfunktion

$$\begin{pmatrix} u_0(t) \\ v_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In diesem Beispiel ist

$$F\left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\left\| F\left(t, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) - F\left(t, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|$$

und F erfüllt die Lipschitz-Bedingung mit $L = 1$.
Wir erhalten durch komponentenweise Integration

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -v_0(s) \\ u_0(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -v_1(s) \\ u_1(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 - t^2/2 \\ t \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} u_3(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -v_2(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -s \\ 1 - s^2/2 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 - t^2/2 \\ t - t^3/6 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} u_4(t) \\ v_4(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -v_3(s) \\ u_3(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -s + s^3/6 \\ 1 - s^2/2 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 - t^2/2 + t^4/4! \\ t - t^3/6 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} u_5(t) \\ v_5(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -v_4(s) \\ u_4(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -s + s^3/6 \\ 1 - s^2/2 + s^4/4! \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 - t^2/2 + t^4/4! \\ t - t^3/3! + t^5/5! \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned}
\cos(t) &= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \\
\sin(t) &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

erhält man schließlich

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

als Lösung der Differentialgleichung. Auch hier ist die Anfangsbedingung nach Konstruktion erfüllt.
□

Lemma 4.3.5 *Besitzt* $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ *stetige partielle Ableitungen*

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n \qquad \textit{für } j = 1, \ldots, n \ ,$$

so ist F *Lipschitz–stetig bezüglich der* x*–Variablen auf jeder kompakten Teilmenge von* $\mathcal{O}$.

Beweis. Es ist $F = (F_1, \ldots, F_n)$ mit $F_j : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ für $j = 1, \ldots, n$.

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}$ eine beliebige kompakte Teilmenge von $\mathcal{O}$. Insbesondere ist $\mathcal{A}$ abgeschlossen und beschränkt und wir können $\mathcal{A}$ mit endlich vielen offenen Kugeln $B_1, \ldots, B_\kappa$ derart überdecken, dass

$$\mathcal{A} \subseteq B_1 \cup \cdots \cup B_\kappa \subseteq \mathcal{O} \ .$$

Insbesondere sind die Kugeln konvex. Die folgenden Rechnungen werden zunächst für jede einzelne der Kugeln separat durchgeführt. Sei also B eine beliebige Kugel dieser Kugeln $B_1, \ldots, B_\kappa$.

Für fixiertes $t \in \mathbb{R}$ sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ durch

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ (t,x) \in B\}$$

definiert. Da B konvex ist, ist auch U konvex. Dann betrachten wir die durch $f_j(x) = F_j(t,x)$ für $j = 1, \ldots, n$ definierten Funktionen $f_j : U \to \mathbb{R}$. Alle f_j sind nach Voraussetzung partiell differenzierbar und besitzen stetige partielle Ableitungen. Nach Satz 2.2.11 der Vorlesung Analysis II von Lutz Habermann sind alle f_j differenzierbar. Wir betrachten die Differentiale

$$Df_j = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \operatorname{grad} f_j \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n \ .$$

Da U konvex ist, gilt für jedes $x_1, x_2 \in U$, dass

$$S(x_1, x_2) = \{x_1 + s(x_2 - x_1) \ : \ s \in \,]0,1[\} \subseteq U \ .$$

Dann liefert der Mittelwertsatz der Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen (Satz 2.1.11 der Vorlesung Analysis II von Lutz Habermann) die Existenz eines $\xi_j \in S(x_1, x_2)$ mit

$$f_j(x_2) - f_j(x_1) = Df_j(\xi_j)(x_2 - x_1) = \langle \operatorname{grad} f_j(\xi_j), x_2 - x_1 \rangle \ ,$$

das heißt,

$$F_j(t, x_2) - F_j(t, x_1) = \langle \operatorname{grad} f_j(\xi_j), x_2 - x_1 \rangle$$

und wir erhalten mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für alle $j = 1, \ldots, n$

$$(F_j(t, x_2) - F_j(t, x_1))^2 \leq \|\operatorname{grad} f_j(\xi_j)\|^2 \|x_2 - x_1\|^2 \ . \tag{4.3.1}$$

Da alle partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_k}$ mit $j, k = 1, \ldots, n$ auf B stetig sind, existieren Konstanten $K_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$, mit

$$\left| \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(t, \xi) \right| \leq K_j \qquad \text{für alle } (t, \xi) \in B \text{ und } k = 1, \ldots, n \ .$$

Dann sei $K_B := \max\{K_1, \ldots, K_n\}$ und wir erhalten

$$\|\operatorname{grad} f_j(\xi_j)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_k}(t, \xi_j) \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} K_B^2 = n K_B^2 \ .$$

Aus (4.3.1) erhalten wir damit

$$\|F(t, x_2) - F(t, x_1)\|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} n K_B^2 \|x_2 - x_1\|^2 = n^2 K_B^2 \|x_2 - x_1\|^2 \ .$$

Die Behauptung folgt dann mit der Lipschitz-Konstanten $L(\mathcal{A}) = \max\{K_{B_1}, \ldots, K_{B_\kappa}\}$. $\square$

4.4 Stetige Abhängigkeit von der Anfangsbedingung

Die in diesem Abschnitt untersuchte Fragestellung ergibt sich, wenn man die Beschreibung eines tatsächlichen Prozesses durch Differentialgleichungen betrachtet. Aus Messungen ergeben sich Zahlenwerte, die in die Differentialgleichung und in die Anfangsbedingungen eingehen, die aber nur ungenau bekannt sind. Dabei wird man erwarten, dass die Lösungen der Differentialgleichung "unempfindlich" gegen kleine Änderungen dieser Zahlenwerte sind. Dieser Sachverhalt soll hier genauer dargestellt werden.

Lemma 4.4.1 (Lemma von Gronwall) *Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und es seien $v, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige, nichtnegative Funktionen. Weiterhin existiere eine Konstante $c > 0$ derart, dass*

$$v(t) \leq c + \int_a^t v(s)g(s)ds \qquad \text{für alle } t \in [a,b] \; .$$

Dann gilt für alle $t \in [a,b]$ die Ungleichung

$$v(t) \leq c \cdot e^{\int_a^t g(s)ds} \; .$$

Beweis. Wir betrachten die durch

$$f(t) := c + \int_a^t v(s)g(s)ds$$

definierte Funktion $f : [a,b] \to \,]0, \infty[$. Nach Voraussetzung gilt für alle $t \in [a,b]$ sowohl $v(t) \leq f(t)$ als auch $0 < c \leq f(t)$. Weiterhin ist für alle $t \in [a,b]$ demnach

$$f'(t) = v(t)g(t) \leq f(t)g(t) \; .$$

Daraus folgt mit $f(a) = c$

$$\ln \left| \frac{f(t)}{c} \right| = \ln |f(t)| - \ln |c| = \int_a^t \frac{f'(s)}{f(s)} ds \leq \int_a^t g(s)ds \; .$$

Wegen $f(t) > 0$ und $c > 0$ folgt

$$f(t) \leq c \cdot e^{\int_a^t g(s)ds}$$

und schließlich die Behauptung. □

Satz 4.4.2 *Die Teilmenge $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sei offen, $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ sei Lipschitz–stetig bezüglich der x–Variablen mit der Lipschitz–Konstanten L und es seien Anfangswerte $(t_0, x_0), (t_0, \overline{x}_0) \in \mathcal{O}$ gegeben. Sind $u : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ und $\overline{u} : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ Lösungen der Differentialgleichung $x'(t) = F(t, x(t))$, welche den Anfangsbedingungen $u(t_0) = x_0$ und $\overline{u}(t_0) = \overline{x}_0$ genügen, so gilt für alle $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$*

$$\|u(t) - \overline{u}(t)\| \leq \|x_0 - \overline{x}_0\| \, e^{L|t - t_0|} \; .$$

Beweis. Wir betrachten auf dem abgeschlossenen Intervall $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ die nichtnegative Funktion

$$v(t) := \|u(t) - \overline{u}(t)\|^2 \; .$$

Dann ist offenbar

$$\begin{aligned} v'(t) &= 2\langle u'(t) - \overline{u}'(t), u(t) - \overline{u}(t) \rangle \\ &= 2\langle F(t, u(t)) - F(t, \overline{u}(t)), u(t) - \overline{u}(t) \rangle \; . \end{aligned}$$

Folglich ist nach der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung

$$|v'(t)| \leq 2\|F(t,u(t)) - F(t,\overline{u}(t))\| \cdot \|u(t) - \overline{u}(t)\| \ .$$

Da F Lipschitz–stetig bezüglich der x–Variablen mit der Lipschitz-Konstanten L ist, folgt

$$|v'(t)| \leq 2L\|u(t) - \overline{u}(t)\|^2 = 2Lv(t) \ .$$

Das heißt, es ist sowohl $v'(t) \leq 2Lv(t)$ als auch $-v'(t) \leq 2Lv(t)$. Für alle $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ ist dann

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} v'(s)ds \leq v(t_0) + \int_{t_0}^{t} 2Lv(s)ds \ .$$

Benutzen wir das Lemma 4.4.1 mit $c = v(t_0) > 0$ und $g(s) = 2L$, so folgt

$$v(t) \leq v(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} 2Lds} \ ,$$

also

$$\|u(t) - \overline{u}(t)\|^2 \leq \|u(t_0) - \overline{u}(t_0)\|^2 e^{2L(t-t_0)} \ .$$

Ebenso schließt man für $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0]$ aus

$$v(t) = v(t_0) - \int_{t}^{t_0} v'(s)ds \leq v(t_0) + \int_{t}^{t_0} 2Lv(s)ds$$

mit Hilfe des Lemmas 4.4.1 die Ungleichung

$$v(t) \leq v(t_0)e^{\int_{t}^{t_0} 2Lds} \ ,$$

das heißt,

$$\|u(t) - \overline{u}(t)\|^2 \leq \|u(t_0) - \overline{u}(t_0)\|^2 e^{2L(t_0-t)} \ .$$

Mit $u(t_0) = x_0$ und $\overline{u}(t_0) = \overline{x}_0$ folgt insgesamt

$$\|u(t) - \overline{u}(t)\|^2 \leq \|x_0 - \overline{x}_0\|^2 e^{2L|t-t_0|} \ ,$$

also die Behauptung. □

Folgerung 4.4.3 *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.4.2 sei* $(t_0, x_0) \in \mathcal{O}$ *und* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Punkten in* $\mathbb{R}^n$ *mit* $(t_0, x_k) \in \mathcal{O}$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *und* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$*. Seien weiterhin* $u : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ *und* $u_k : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ *Lösungen der Differentialgleichung* $x'(t) = F(t, x(t))$ *mit* $u(t_0) = x_0$ *und* $u_k(t_0) = x_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$*. Dann konvergiert die Folge der Funktionen* u_k *für* $k \to \infty$ *auf* $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ *gleichmäßig gegen* u*.*

Beweis. Nach Satz 4.4.2 ist

$$\|u_k(t) - u(t)\| \leq \|x_k - x_0\| \, e^{L|t-t_0|} \qquad \text{für alle } t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \ .$$

In dieser Ungleichung gehen wir für $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ zum Supremum über und erhalten für die Metrik d_s in $C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathbb{R}^n)$, dass

$$d_s(u_k, u) \leq \|x_k - x_0\| \, e^{L\varepsilon} \ .$$

Dabei ist $e^{L\varepsilon}$ eine Konstante und wir sehen für $k \to \infty$, dass $d_s(u_k, u) \to 0$. Das heißt aber gerade, dass die Funktionenfolge u_k für $k \to \infty$ auf $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ gleichmäßig gegen u konvergiert. □

4.5 Fortsetzbarkeit der Lösung einer Differentialgleichung

Es sei $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und es sei $(t_0, x_0) \in \mathcal{O}$. Weiterhin sei $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz–stetig bezüglich der x–Variablen auf **jeder** kompakten Teilmenge von $\mathcal{O}$.

Definition 4.5.1 *Wir definieren*

$$\mathcal{M} := \left\{ \{\,]a,b[, u\} \;\middle|\; \begin{array}{l}]a,b[\subset \mathbb{R} \textit{ mit } a < t_0 < b \textit{ und } u :]a,b[\to \mathbb{R}^n \textit{ ist eine Lösung} \\ \textit{des Anfangswertproblems } x'(t) = F(t, x(t)) \textit{ und } x(t_0) = x_0 \end{array} \right\} .$$

Nach dem Satz von Picard–Lindelöff (Satz 4.3.1) ist die Menge $\mathcal{M}$ nicht leer, $\mathcal{M} \neq \emptyset$.

Lemma 4.5.2 *Sind* $\{\,]a,b[, u\} \in \mathcal{M}$ *und* $\{\,]\overline{a}, \overline{b}[, \overline{u}\} \in \mathcal{M}$*, so gilt* $u(t) = \overline{u}(t)$ *für alle Elemente* $t \in \,]\max\{a, \overline{a}\}, \min\{b, \overline{b}\}[$.

Beweis. Die Menge $\left\{t \in \,]\max\{a,\overline{a}\}, \min\{b,\overline{b}\}[\;\text{ mit }\; u(t) = \overline{u}(t)\right\}$ ist nichtleer, da sie t_0 enthält. Weiterhin ist sie nach Definition abgeschlossen. Und nach dem Satz von Picard–Lindelöff (Satz 4.3.1) enthält diese Menge für jedes t der Menge ein kleines Intervall $]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$, also ist sie offen. Sie ist also nichtleer und sowohl offene als auch abgeschlossene Teilmenge eines (zusammenhängenden !) Intervalls. Demzufolge muss diese Menge mit dem Intervall $]\max\{a,\overline{a}\}, \min\{b,\overline{b}\}[$ übereinstimmen. $\square$

Es seien nun

$$a(x_0) := \inf\{a \in \mathbb{R} \text{ mit } \{\,]a,b[, u\} \in \mathcal{M}\}$$

und

$$b(x_0) := \sup\{b \in \mathbb{R} \text{ mit } \{\,]a,b[, u\} \in \mathcal{M}\} .$$

Dann haben wir

$$]a(x_0), b(x_0)[= \bigcup_{\{\,]a,b[,u\} \in \mathcal{M}}]a,b[\quad \subseteq \quad \mathbb{R} .$$

Weiterhin sei

$$u_{x_0} :]a(x_0), b(x_0)[\to \mathbb{R}^n$$

definiert durch

$$u_{x_0}\big|_{]a,b[} = u \qquad \text{für } \{\,]a,b[, u\} \in \mathcal{M} .$$

Nach Konstruktion gilt: Ist $u :]a,b[\to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = F(t, x(t))$ und $x(t_0) = x_0$, so gilt $]a,b[\subseteq]a(x_0), b(x_0)[$ und

$$u = u_{x_0}\big|_{]a,b[} .$$

Definition 4.5.3 *Die konstruierte Lösung* $u_{x_0} :]a(x_0), b(x_0)[\to \mathbb{R}^n$ *heißt* **maximale Lösung** *zum Anfangswertproblem* $x'(t) = F(t, x(t))$ *und* $x(t_0) = x_0$.

Folgerung 4.5.4 *Insgesamt haben wir also immer die Existenz einer maximalen Lösung.* $\square$

5 Geometrische Interpretation gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung

5.1 Autonome Differentialgleichungssysteme

Definition 5.1.1 *Es sei* $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine offene Teilmenge. Ein* **Vektorfeld** V *auf* $\mathcal{U}$ *ist eine stetig differenzierbare Abbildung*

$$x \in \mathcal{U} \mapsto V(x) \in \mathbb{R}^n ,$$

die jedem Punkt $x \in \mathcal{U}$ *einen Vektor* $V(x) \in \mathbb{R}^n$ *zuordnet.*

Man kann sich ein Vektorfeld so vorstellen, dass in jedem Punkt von $\mathcal{U}$ ein Vektor angeheftet wird. Der Punkt x heißt **Fußpunkt** des Vektors $V(x)$.

Definition 5.1.2 *Ist V ein Vektorfeld auf $\mathcal{U}$, so heißt eine Kurve $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{U}$* **Intergalkurve des Vektorfeldes** *V, falls für alle $t \in I$*

$$x'(t) = V(x(t))$$

gilt.

Das heißt, entlang einer Integralkurve $x(t)$ stimmen die Vektoren $V(x(t))$ mit den Tangentialvektoren $x'(t)$ überein.

Definition 5.1.3 *Ist V ein Vektorfeld auf $\mathcal{U}$ und $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ eine Intergalkurve von V, so heißt die Bildmenge $x(I) = \{x(t) \ : \ t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^n$* **Trajektorie der Integralkurve** *von V.*

Bemerkung 5.1.4 Es gibt verschiedene Arten, den Begriff einer Kurve mathematisch genau zu formulieren. Dabei muss man unterscheiden, ob man die Parameterdarstellung $x : I \to \mathbb{R}^n$, also eine Abbildung, oder die Menge von Punkten im $\mathbb{R}^n$, welche uns das geometrische Bild veranschaulicht, betrachtet. □

Definition 5.1.5 *Die Differentialgleichung $x'(t) = F(t, x(t))$ heißt* **autonom**, *falls $F(t,x)$ nicht von t abhängig ist.*

Eine autonome Differentialgleichung hat folglich die Gestalt

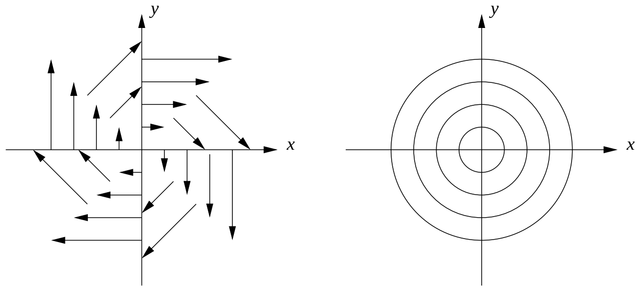
$$x'(t) = F(x(t)) \qquad \text{mit } F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$$

für eine geeignete offene Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. In einer autonomen Differentialgleichung können wir F demzufolge als Vektorfeld auf $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ verstehen. Lösen der autonomen Differentialgleichung $x'(t) = F(x(t))$ heißt dann: Man finde Integralkurven, deren Trajektorien in jedem Punkt x den Vektor $F(x)$ als Tangentialvektor besitzen.

Beispiel 5.1.6 Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ -x(t) \end{pmatrix}$$

(vgl. Beispiel 4.1.1). In diesem Beispiel ist $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$.



Die Lösungen dieses Differentialgleichungssystems sind gegeben durch $x(t) = a\sin(t) + b\cos(t)$ und $y(t) = a\cos(t) - b\sin(t)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dafür gilt

$$x^2(t) + y^2(t) = a^2 + b^2 .$$

Das heißt, die Trajektorien der Integralkurven dieses Vektorfeldes sind Kreise um den Nullpunkt. □

Definition 5.1.7 *$x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist eine* **Nullstelle des Vektorfeldes** *F, falls $F(x_0) = 0$.*

Nullstellen von F heißen auch **Gleichgewichtspunkte** der Differentialgleichung $x'(t) = F(x(t))$. Dann ist nämlich $x(t) \equiv x_0$ eine Lösung der Differentialgleichung. Diese Lösung heißt **Gleichgewichtslösung**.

Satz 5.1.8 *Für die Trajektorien der Integralkurven von Vektorfeldern gilt:*

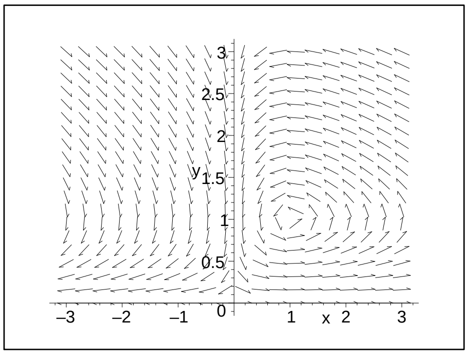
(i) Zwei Trajektorien sind entweder disjunkt oder identisch.

(ii) Durch jeden Punkt verläuft genau eine Trajektorie.

Insbesondere können sich Trajektorien nicht schneiden.

Beweis. Dies folgt aus dem Satz von von Picard–Lindelöff (Satz 4.3.1) über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen der Differentialgleichung $x'(t) = F(x(t))$. Die lokale Lipschitz-Stetigkeit bezüglich der x–Variablen, die in dem Satz von von Picard–Lindelöff vorausgesetzt wird, ist hier nach Lemma 4.3.5 erfüllt, da das Vektorfeld nach Voraussetzung stetig differenzierbar ist. $\square$

Ohne explizite Kenntnis der Lösungen der Differentialgleichung liefert das Vektorfeld beziehungsweise der Verlauf der Trajektorien bereits einen Überblick über das qualitative Verhalten der Lösungen.



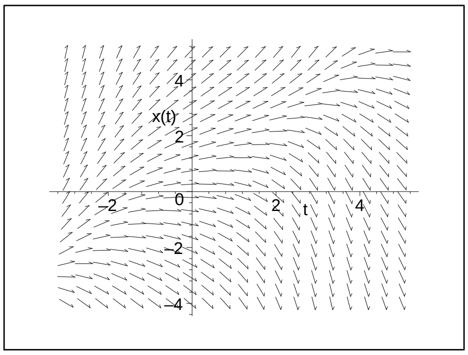
5.2 Richtungsfeld der Differentialgleichung $x'(t) = F(t, x(t))$

Wir betrachten die Differentialgleichung $x'(t) = F(t, x(t))$ für $F : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, wobei die reellwertige Funktion $x : I \to \mathbb{R}^n$ gesucht ist.

Diese Differentialgleichung gestattet nun auch eine einfache geometrische Interpretation, da wir sie auf folgende Weise als autonome Differentialgleichung verstehen können. Dazu betrachten wir das Vektorfeld $\tilde{F} : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ auf $\mathcal{O}$, welches gegeben ist durch $\tilde{F}(y) := (1, F(y))$.

Dann ist $x(t)$ für $t \in I$ genau dann eine Lösung der Differentialgleichung $x'(t) = F(t, x(t))$, wenn $y(t) = (t, x(t))$ eine Lösung der autonomen Differentialgleichung $y'(t) = \tilde{F}(y(t))$ ist.

Ist nämlich $x(t)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung, so können wir den Graphen dieser Funktion als Kurve $(t, x(t))$ im $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ darstellen. Verläuft diese Kurve durch den Punkt (t_0, x_0), so besitzt die Funktion $x(t)$ im Punkte (t_0, x_0) den Tangentialvektor $(1, x'(t))$. Durch die Differentialgleichung $x'(t) = F(t, x(t))$ wird also die Tangentialrichtung der durch den Punkt (t_0, x_0) gehenden Lösungskurve vorgeschrieben. Diese Betrachtung lässt sich nun für jeden Punkt anstellen. Ordnen wir jedem Punkt $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ den Richtungsvektor $(1, x'(t))$ zu, so erhalten wir das sogenannte **Richtungsfeld** der Differentialgleichung.



Geometrisch gesprochen, besteht die Aufgabe der Lösung der Differentialgleichung darin, die Kurven $(t, x(t))$ in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ zu finden, welche die vorgegebenen Richtungsvektoren als Tangentialvektoren besitzen. Das heißt, wir suchen die Kurvenschar, die "auf das Richtungsfeld passt".

Die bereits bekannte Tatsache, dass die Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung eine unbestimmte Konstante enthält, lässt sich geometrisch so deuten, dass ihre Lösung einer ganzen Kurvenschar entspricht. Durch die Festlegung der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ wird gefordert, dass die Lösungskurve des Anfangsproblems durch den Punkt (t_0, x_0) verläuft. Auf diese Weise wird aus der Kurvenschar eine einzelne Kurve ausgewählt. Diese entspricht dann der meist eindeutig bestimmten Lösung des Anfangswertproblems.

6 Lineare Differentialgleichungen

6.1 Das Exponential einer Matrix

Wir betrachten für ein fixiertes $n \in \mathbb{N}$ den Raum

$$\mathcal{L} := \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \ : \ a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ für } i,j = 1,\dots,n \right\}$$

aller reellen $n \times n$–Matrizen. Auf $\mathcal{L}$ betrachten wir die Norm $\| \ \|$, welche gegeben ist durch

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ \text{ mit } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} \qquad \text{für } A \in \mathcal{L} \ .$$

Satz 6.1.1 *(i) $\mathcal{L}$ ist ein reeller Vektorraum.*

(ii) Für $A, B \in \mathcal{L}$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Relationen.

$$\begin{aligned} &\|Ax\| \le \|A\|\,\|x\| \\ &\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\| \\ &\|A + B\| \le \|A\| + \|B\| \\ &\|AB\| \le \|A\|\,\|B\| \end{aligned}$$

(iii) Definiert man d durch $d(A, B) := \|A - B\|$, so ist $(\mathcal{L}, d)$ ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis. (i) Diese Behauptung ist aus der Algebra klar.

(ii) Die Definition von $\|A\|$ liefert für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\| \ ,$$

also gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$
$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \, .$$
Für $y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\|\lambda y\| = |\lambda| \, \|y\|$, also ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$
$$\|\lambda Ax\| = |\lambda| \, \|Ax\| \, .$$
Die Definition von $\|A\|$ liefert damit
$$\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\| \, .$$
Die Dreiecksungleichung für die Euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ liefert $\|y+z\| \leq \|y\| + \|z\|$ für $y, z \in \mathbb{R}^n$, woraus
$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|$$
und somit
$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$
folgt. Schließlich ist
$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\| \, \|Bx\| \leq \|A\| \, \|B\| \, \|x\| \, ,$$
was
$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$
impliziert.

(iii) Da $\| \; \|$ auf $\mathcal{L}$ eine Norm ist, ist klar, dass d eine Metrik ist. Zu zeigen ist demnach nur die Vollständigkeit. Dazu sei $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $(\mathcal{L}, d)$, das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit
$$\|A_k - A_m\| < \varepsilon \qquad \text{für alle } k, m \geq n_0 \, .$$
Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$ fixiert. Dann betrachten wir in $\mathbb{R}^n$ die Folge $(A_k x)_{k \in \mathbb{N}}$. Für diese Folge gilt
$$\|A_k x - A_m x\| = \|(A_k - A_m)x\| \leq \|A_k - A_m\| \, \|x\| \, ,$$
das heißt, für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit
$$\|A_k x - A_m x\| < \varepsilon \|x\| \qquad \text{für alle } k, m \geq n_0 \, .$$
Also ist $(A_k x)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}^n$. Da $\mathbb{R}^n$ vollständig ist, existiert der Grenzwert dieser Folge im $\mathbb{R}^n$
$$Ax := \lim_{k \to \infty} A_k x \; \in \mathbb{R}^n \, .$$
Dieser Grenzwert Ax existiert für jedes $x \in \mathbb{R}^n$. Dann wird durch alle Vektoren Ax in $\mathbb{R}^n$ eine reelle $n \times n$–Matrix A definiert. Ist nämlich $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die kanonische Standardbasis des $\mathbb{R}^n$, so ist die Matrix A gegeben durch $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ mit
$$a_{ij} = \langle e_i, Ae_j \rangle = \langle e_i, \lim_{k \to \infty} A_k e_j \rangle = \lim_{k \to \infty} \langle e_i, A_k e_j \rangle \, .$$
Hier wird benutzt, dass das Skalarprodukt $\langle \;,\; \rangle$ stetig ist. $\square$

Für ein fixiertes $n \in \mathbb{N}$ sei im folgenden A eine $n \times n$–Matrix, d.h. $A \in \mathcal{L}$. Weiterhin bezeichne $\mathbf{1}$ die $n \times n$–Einheitsmatrix. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $s_k(A) \in \mathcal{L}$ definiert durch
$$s_k(A) := \mathbf{1} + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots + \frac{A^k}{k!} = \sum_{l=0}^{k} \frac{A^l}{l!} \, .$$

Für $k > m$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|s_k(A) - s_m(A)\| &= \left\| \frac{A^{m+1}}{(m+1)!} + \ldots + \frac{A^k}{k!} \right\| \\ &\leq \frac{\|A^{m+1}\|}{(m+1)!} + \ldots + \frac{\|A^k\|}{k!} \\ &\leq \frac{\|A\|^{m+1}}{(m+1)!} + \ldots + \frac{\|A\|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\|A\|^{m+l}}{(m+l)!} \, . \end{aligned}$$

An dieser Stelle erinnern wir daran, dass $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} = e^t$ für $t \in \mathbb{R}$. Insbesondere konvergiert die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!}$. Also gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \frac{t^l}{l!} = 0 \, .$$

Das aber heißt nichts anderes als: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{t^{m+l}}{(m+l)!} = \sum_{l=m+1}^{\infty} \frac{t^l}{l!} < \varepsilon \qquad \text{für alle } m \geq n_0 \, .$$

Mit der obigen Rechnung liefert das wiederum: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|s_k(A) - s_m(A)\| < \varepsilon \qquad \text{für alle } k > m \geq n_0 \, .$$

Das heißt, die Folge $(s_k(A))_{k\in\mathbb{N}}$ ist in dem metrischen Raum $(\mathcal{L}, d)$ eine Cauchy–Folge. Da der metrische Raum, wie in Satz 6.1.1(iii) gezeigt, ein vollständiger metrischer Raum ist, konvergiert diese Folge in $\mathcal{L}$, d.h. der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} s_k(A) \in \mathcal{L}$ existiert und ist eine reelle $n \times n$–Matrix.

Definition 6.1.2 *Es sei $A \in \mathcal{L}$. Dann ist $e^A \in \mathcal{L}$ definiert durch*

$$e^A := \lim_{k\to\infty} s_k(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \, .$$

Beispiel 6.1.3 (i) Wir betrachten die Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \, .$$

Dann ist für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix} \, .$$

Für das Exponential e^A erhalten wir also

$$e^A = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix} \, .$$

Dieses Beispiel ist typisch für Diagonalmatrizen.

(ii) Es sei

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Dann ist

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Folglich erhalten wir

$$e^B = \mathbf{1} + B + \frac{B^2}{2!} + \ldots = \mathbf{1} + B + \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dieses Beispiel ist typisch für nilpotente Matrizen, d.h. für Matrizen B mit der Eigenschaft, dass es ein $l \in \mathbb{N}$ mit $B^l = \mathbf{0}$ gibt. Dann bricht die Reihe für e^B nämlich stets nach endlich vielen Summanden ab.

(iii) Für die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

berechnen wir

$$\begin{aligned}
C^2 &= -b^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= -b^2 \mathbf{1} , \\
C^3 &= -b^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \\
C^4 &= C^2 C^2 = \left(-b^2 \mathbf{1}\right)\left(-b^2 \mathbf{1}\right) &= b^4 \mathbf{1} , \\
C^5 &= C^2 C^3 = \left(-b^2 \mathbf{1}\right)\left(-b^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= b^5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \text{u.s.w.}
\end{aligned}$$

Induktiv sehen wir ein, dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$C^{2k} = (-1)^k b^{2k} \mathbf{1}$$

und

$$C^{2k+1} = (-1)^k b^{2k+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Mit

$$\begin{aligned}
\sin(b) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
\cos(b) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned}$$

erhalten wir

$$e^C = \begin{pmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix} .$$

□

Satz 6.1.4 *(i) Es gilt*

$$e^{\mathbf{0}} = \mathbf{1} ,$$

wobei $\mathbf{0}$ *die Nullmatrix ist.*

(ii) Sind A und B kommutierende Matrizen, d.h. gilt $AB = BA$, so ist

$$e^{A+B} = e^A \, e^B = e^B \, e^A .$$

(iii) Die Matrix e^A *ist invertierbar und es gilt*

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A} .$$

(iv) Es gilt

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A\, e^{tA} .$$

(v) Es gilt

$$\det\left(e^A\right) = e^{\mathrm{Tr}(A)} .$$

(vi) Für $B \in \mathcal{L}$ *mit* $\det(B) \neq 0$ *gilt*

$$e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1} .$$

Beweis. Die Behauptung (i) ist nach Definition von $s_k(A)$ klar.

(ii) Es seien $A, B \in \mathcal{L}$ mit $AB = BA$. Dann berechnen wir mit Hilfe des Cauchy–Produktes für Reihen

$$\begin{aligned} e^A\, e^B &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{l!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{A^l}{l!} \frac{B^{k-l}}{(k-l)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} A^l B^{k-l} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} \\ &= e^{A+B} . \end{aligned}$$

Dabei können wir in der vorletzten Gleichung den binomischen Lehrsatz anwenden, da die Matrizen A und B nach Voraussetzung kommutieren.

(iii) Zunächst ist $(A)(-A) = -A^2 = (-A)(A)$. Nach (ii) ist demnach

$$e^{A+(-A)} = e^A\, e^{-A} .$$

Andererseits ist nach (i)

$$e^{A+(-A)} = e^{A-A} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{1} ,$$

woraus die Behauptung folgt.

(iv) Offensichtlich ist für $t, h \in \mathbb{R}$ die Relation $(tA)(hA) = (hA)(tA)$ erfüllt, d.h. die beiden Matrizen tA und hA kommutieren. Folglich ist

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{(tA)+(hA)} - e^{tA}}{h} = \left(\lim_{h \to 0} \frac{e^{hA} - \mathbf{1}}{h}\right) e^{tA} .$$

Demnach bleibt zu zeigen, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{hA} - \mathbf{1}}{h} = A .$$

Dazu müssen wir zeigen, dass der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|e^{hA} - \mathbf{1} - hA\|}{|h|}$$

gleich Null ist. Mit

$$\frac{1}{h}\left(e^{hA}-\mathbf{1}\right)=A+h\frac{A^2}{2!}+h^2\frac{A^3}{3!}+h^3\frac{A^4}{4!}+\ldots$$

haben wir

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\|e^{hA}-\mathbf{1}-hA\|}{|h|} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|}\left\|h^2\frac{A^2}{2!}+h^3\frac{A^3}{3!}+\ldots\right\| \\
&\leq \lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|}\left\{|h|^2\frac{\|A\|^2}{2!}+|h|^3\frac{\|A\|^3}{3!}+\ldots\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{e^{|h|\,\|A\|}-1-|h|\,\|A\|}{|h|} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{e^{|h|\,\|A\|}-1}{|h|}-\|A\| \\
&= \|A\|-\|A\| \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

da nach der Regel von l'Hospital

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{h\,\|A\|}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\|A\|\,e^{h\,\|A\|}}{1}=\|A\|\,.$$

Insbesondere ist

$$\frac{d}{dt}e^{tA}\Big|_{t=0}=A\,.$$

(v) Bezeichne $a_1,\ldots,a_n$ die Spaltenvektoren der Matrix A und $b_1(t),\ldots,b_n(t)$ die Spaltenvektoren der Matrix e^{tA}. Wegen $e^{\mathbf{0}}=\mathbf{1}$, gilt $b_j(0)=e_j$ für $j=1,\ldots,n$, wobei $\{e_1,\ldots,e_n\}$ wieder die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ ist. Wegen

$$\frac{d}{dt}e^{tA}\Big|_{t=0}=A$$

haben wir $b_j'(0)=a_j$ für $j=1,\ldots,n$. Schließlich erinnern wir daran, dass $\det(A)$ eine multilineare Abbildung in den Spaltenvektoren $a_1,\ldots,a_n$ von A ist, d.h.

$$\det(A)=\det(a_1,\ldots,a_n)$$

mit

$$\det(a_1,\ldots,\alpha a_k,\ldots,a_n)=\alpha\det(a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_n) \qquad \text{und}$$

$$\det(a_1,\ldots,a_k+\tilde{a}_k,\ldots,a_n)=\det(a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_n)+\det(a_1,\ldots,\tilde{a}_k,\ldots,a_n)\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\det\left(e^{tA}\right) &= \frac{d}{dt}\det\left(b_1(t),b_2(t),\ldots,b_n(t)\right) \\
&= \det\left(b_1'(t),b_2(t),\ldots,b_n(t)\right)+\det\left(b_1(t),b_2'(t),\ldots,b_n(t)\right)+ \\
&\quad +\ldots+\det\left(b_1(t),b_2(t),\ldots,b_n'(t)\right)\,.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\det\left(e^{tA}\right)\Big|_{t=0} &= \det\left(b_1'(0), b_2(0), \ldots, b_n(0)\right) + \det\left(b_1(0), b_2'(0), \ldots, b_n(0)\right) + \\
&\quad + \ldots + \det\left(b_1(0), b_2(0), \ldots, b_n'(0)\right) \\
&= \det\left(a_1, e_2, \ldots, e_n\right) + \det\left(e_1, a_2, \ldots, e_n\right) + \\
&\quad + \ldots + \det\left(e_1, e_2, \ldots, a_n\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} + \\
&\quad + \ldots + \det\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{n-2\,n} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{n-1\,n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} \\
&= \mathrm{Tr}(A)\ .
\end{aligned}$$

Also ist damit gezeigt

$$\frac{d}{dt}\det\left(e^{tA}\right)\Big|_{t=0} = \mathrm{Tr}(A)\ .$$

Für $A \in \mathcal{L}$ sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) := \det\left(e^{tA}\right)\ .$$

Dann gilt offenbar $f(0) = 1$ und $f'(0) = \mathrm{Tr}(A)$. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\det\left(e^{(t+h)A}\right) - \det\left(e^{tA}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\det\left(e^{tA}e^{hA}\right) - \det\left(e^{tA}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\det\left(e^{tA}\right)\det\left(e^{hA}\right) - \det\left(e^{tA}\right)}{h} \\
&= \det\left(e^{tA}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\det\left(e^{hA} - 1\right)}{h} \\
&= f(t)\lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} \\
&= f(t)\, f'(0)\ .
\end{aligned}$$

Für die Funktion $f(t) = \det\left(e^{tA}\right)$ haben wir demnach die Differentialgleichung

$$f'(t) = \mathrm{Tr}(A)\, f(t) \qquad \text{mit der Anfangsbedingung } f(0) = 1\ .$$

Trennung der Variablen liefert als Lösung dieses Anfangswertproblems

$$f(t) = e^{\mathrm{Tr}(A)\, t}\ .$$

Also ist insgesamt

$$\det\left(e^{tA}\right) = e^{\mathrm{Tr}(A)\, t}\ .$$

Setzen wir in diese Gleichung $t = 1$ ein, so erhalten wir

$$\det\left(e^{A}\right) = e^{\mathrm{Tr}(A)}\ .$$

(vi) Zunächst ist

$$e^{BAB^{-1}} = \mathbf{1} + BAB^{-1} + \frac{\left(BAB^{-1}\right)^2}{2!} + \frac{\left(BAB^{-1}\right)^3}{3!} + \ldots$$

Dabei gilt aber

$$\left(BAB^{-1}\right)^2 = BAB^{-1}BAB^{-1} = BA^2B^{-1}$$

usw. Insgesamt ist für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left(BAB^{-1}\right)^k = BA^kB^{-1}\ ,$$

woraus mit der Stetigkeit der Abbildung

$$A \in \mathcal{L} \mapsto BAB^{-1} \in \mathcal{L}$$

unmittelbar

$$\begin{aligned} e^{BAB^{-1}} &= \mathbf{1} + BAB^{-1} + \frac{BA^2B^{-1}}{2!} + \frac{BA^3B^{-1}}{3!} + \ldots \\ &= B\left(\mathbf{1} + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots\right) B^{-1} \\ &= Be^AB^{-1} \end{aligned}$$

folgt. □

Beispiel 6.1.5 In diesem Beispiel wollen wir illustrieren, dass im Allgemeinen e^{A+B} und e^Ae^B verschiedene Matrizen sind. Dazu betrachten wir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Dann ist

$$e^A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\ , \qquad e^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad e^Ae^B = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\ .$$

Für

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

berechnen wir

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}\ ,$$

$$(A+B)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

usw. Insgesamt ist für $k \in \mathbb{N}$

$$(A+B)^k = \begin{pmatrix} 1 & 2^k - 1 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} .$$

Tatsächlich ist

$$(A+B)^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^k - 1 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + 2(2^k - 1) \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{k+1} - 1 \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} .$$

Folglich ist

$$e^{A+B} = \begin{pmatrix} e & e^2 - e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} .$$

Wegen $e > 2$ ist $e^2 > 2e$ und somit $e^2 - e > e$. Also gilt für diese beiden Matrizen A und B

$$e^{A+B} \neq e^A e^B .$$

□

Bemerkung 6.1.6 (i) Wegen $\det\left(e^A\right) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$ gilt immer $\det\left(e^A\right) > 0$.

(ii) Für $n > 1$ ist die Abbildung

$$A \in \mathcal{L} \mapsto e^A \in \{B \in \mathcal{L} \text{ mit } \det(B) > 0\}$$

weder injektiv noch surjektiv.

□

6.2 Homogene lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Für die reelle $n \times n$–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

und $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ entspricht die Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ vermöge

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) \end{pmatrix}$$

dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) . \end{aligned}$$

Satz 6.2.1 *Die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems*

$$x'(t) = Ax(t) \qquad \textit{und } x(t_0) = x_0$$

ist gegeben durch

$$u(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 \qquad \textit{für alle } t \in \mathbb{R} .$$

Beweis. Für $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $F(t,x) = Ax$ gilt

$$\|F(t,x_1) - F(t,x_2)\| = \|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leq \|A\|\,\|x_1 - x_2\|\ .$$

Folglich ist F Lipschitz–stetig bezüglich der x–Variablen. Der Satz von Picard–Lindelöff (Satz 4.3.1) liefert die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Demnach genügt es zu zeigen, dass $u(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$ eine Lösung des Anfangswertproblems ist. Nach Satz 6.1.4(iv) ist

$$\begin{aligned}
u'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{(t+h-t_0)A}x_0 - e^{(t-t_0)A}x_0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^{(t+h-t_0)A} - e^{(t-t_0)A}\right)x_0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^{(t+h-t_0)A} - e^{(t-t_0)A}\right)}{h} x_0 \\
&= \left(\frac{d}{dt} e^{(t-t_0)A}\right) x_0 \quad = \quad \left(Ae^{(t-t_0)A}\right) x_0 \\
&= Ae^{(t-t_0)A}x_0 \\
&= Au(t)\ .
\end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung ist auch erfüllt, da

$$u(t_0) = e^{\mathbf{0}}x_0 = \mathbf{1}x_0 = x_0\ .$$

□

Bemerkung 6.2.2 Wegen $F(t,x) = Ax$ ist die Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ eine autonome Differentialgleichung. □

Beispiel 6.2.3 Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= x_2(t) \\
x_2'(t) &= -x_1(t)
\end{aligned}$$

(vgl. Beispiel 4.1.1 und Beispiel 5.1.6) mit der Anfangsbedingung $x_1(0) = a$ und $x_2(0) = b$. In den Beispielen 4.1.1 und 5.1.6 hatten wir die Lösungen dieser Differentialgleichung einfach angegeben. Hier wollen wir die Lösungen nun berechnen.

Dieses Differentialgleichungssystem entspricht der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ für $n = 2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und mit der Anfangsbedingung

$$x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Nach Beispiel 6.1.3(iii) ist

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des obigen Anfangswertproblems ist dann nach Satz 6.2.1 gegeben durch

$$u(t) = e^{tA}x(0) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(t) + b\sin(t) \\ -a\sin(t) + b\cos(t) \end{pmatrix},$$

das heißt, die Funktionen

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a\cos(t) + b\sin(t) \\ u_2(t) &= -a\sin(t) + b\cos(t) \end{aligned}$$

lösen das obige Differentialgleichungssystem mit $u_1(0) = a$ und $u_2(0) = b$. Wie im Beispiel 5.1.6 bereits erläutert, beschreibt die Lösung $u(t)$ in $\mathbb{R}^2$ einen Kreis um den Nullpunkt, welcher durch den Punkt (a, b) verläuft. Dieser Kreis hat den Radius $\sqrt{a^2 + b^2}$. □

Satz 6.2.4 *Jede maximale Lösung der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.*

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 6.2.1. □

Satz 6.2.5 *Die Lösungen der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ bilden einen n–dimensionalen reellen Vektorraum V,*

$$V = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \text{ ist differenzierbar und } x'(t) = Ax(t)\}\ .$$

Für fixiertes $t_0 \in \mathbb{R}$ wird durch

$$u \in V \mapsto u(t_0) \in \mathbb{R}^n$$

ein Isomorphismus zwischen V und $\mathbb{R}^n$ definiert.

Beweis. Dass V ein reeller Vektorraum ist, ist offensichtlich.

Sind $u(t)$ und $y(t)$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ und gilt $u(t_0) = y(t_0)$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$, so gilt $u \equiv y$ auf ganz $\mathbb{R}$, das heißt, $u(t) = y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Demzufolge ist die angegebene Abbildung zwischen V und $\mathbb{R}^n$ injektiv.

Weiterhin existiert für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ und für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ mit $x(t_0) = x_0$. Das heißt aber, dass die angegebene Abbildung surjektiv ist. □

Folgerung 6.2.6 *(i) Eine Linearkombination $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ von Lösungen $u_1, \ldots, u_k$ ist wieder eine Lösung.*

(ii) Ist u eine Lösung mit $u(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$, so ist $u \equiv 0$. □

Definition 6.2.7 *k Lösungen $u_1, \ldots, u_k$ heißen* **linear abhängig***, falls Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_k| > 0$ existieren, so dass*

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k = 0 \tag{6.2.1}$$

ist. Anderenfalls werden sie **linear unabhängig** *genannt.*

Ob die Gleichung (6.2.1) in einem Punkt oder für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, ist nach Folgerung 6.2.6(ii) gleichbedeutend.

Linear unabhängige Lösungen $u_1, \ldots, u_k$ sind also dadurch charakterisiert, dass aus der Gleichung $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k = 0$ für die Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ folgt, dass $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ ist.

Folgerung 6.2.8 *(i) Für $k > n$ sind k Lösungen $u_1, \ldots, u_k$ stets linear abhängig.*

(ii) Es gibt n linear unabhängige Lösungen $u_1, \ldots, u_n$. □

Definition 6.2.9 *Jedes System $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ von n linear unabhängigen Lösungen heißt* **Fundamentalsystem** *der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$.*

Folgerung 6.2.10 *Ist $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ein Fundamentalsystem, so lässt sich jede Lösung u in eindeutiger Weise als Linearkombination $u = \alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_n\varphi_n$ darstellen.* □

Algorithmus zur Lösung der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$

Im folgenden Teil dieses Abschnittes werden wir einen Algorithmus zur Berechnung eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ angeben. Dazu bemerken wir, dass die Existenz einer Basis, wie sie im 2. Schritt angegeben ist, aus der linearen Algebra klar ist.

1. Schritt: Man bestimme alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ von A mit den Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_k$. Dabei ist offenbar $m_1 + \ldots + m_k = n$.

Wir setzen $n_0 := 0$, $n_1 := m_1$, $n_2 := m_1 + m_2$, u.s.w. bis $n_k := m_1 + \ldots + m_k = n$. Es ist also

$$n_j = \sum_{l=1}^{j} m_l \qquad \text{für } j = 0, 1, \ldots, k\,.$$

2. Schritt: Man bestimme eine Basis $\{v_1, \ldots, v_{n_1}, v_{n_1+1}, \ldots, v_{n_2}, \ldots, v_n\}$ von $\mathbb{C}^n$ bezüglich welcher A Jordansche Normalform besitzt, das heißt, für $j = 1, \ldots, k$ gilt

$$\begin{array}{rrcll} & Av_l & = & \lambda_j\, v_l + v_{l+1} & \qquad \text{für} \quad l = n_{j-1}+1, \ldots, n_j - 1 \\ \text{und} & Av_{n_j} & = & \lambda_j\, v_{n_j}\,. & \end{array}$$

Bezüglich dieser Basis hat A also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_k \end{pmatrix}$$

mit den Jordan–Kästchen D_j. Dabei sind außer den Jordan–Kästchen D_j alle anderen Einträge gleich Null. Die Jordan–Kästchen sind für $j = 1, \ldots, k$ die $n_j \times n_j$–Matrizen

$$D_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & \ldots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass es zu einem Eigenwert mehrere Jordankästchen geben kann.

3. Schritt: Bezüglich der Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ hat das Exponential e^{tA} die Gestalt

$$\begin{pmatrix} e^{tD_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tD_k} \end{pmatrix},$$

wobei e^{tD_j} für $j = 1, \ldots, k$ wie folgt berechnet wird.

Zunächst bezeichne N_m die folgende $m \times m$–Matrix

$$N_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

das heißt, in N_m sind die einzigen von Null verschiedenen Einträge die Einsen auf der unteren Nebendiagonalen. Dann ist

$$N_m^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

usw. bis

$$N_m^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

und schließlich

$$N_m^m = \mathbf{0}\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} e^{tN_m} &= \mathbf{1} + tN_m + \frac{t^2}{2!}N_m^2 + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}N_m^{m-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ t^2/2! & t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ t^3/3! & t^2/2! & t & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & t & 1 & 0 \\ t^{m-1}/(m-1)! & & & & t^3/3! & t^2/2! & t & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $tD_j = t\lambda_j\mathbf{1} + tN_{n_j}$ und offensichtlich kommutieren die Matrizen $\mathbf{1}$ und N_{n_j}. Dann ist

$$\begin{aligned} e^{tD_j} &= e^{t\lambda_j\mathbf{1}} \cdot e^{tN_{n_j}} \\ &= e^{t\lambda_j} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ t & 1 & & & & & & \\ t^2/2! & t & 1 & & & & & \\ t^3/3! & t^2/2! & t & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & t & 1 & \\ t^{m-1}/(m-1)! & & & & t^3/3! & t^2/2! & t & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hier sei angemerkt, dass e^{tD_j} im allgemeinen das Exponential einer komplexen Matrix ist. Für komplexe Matrizen kann man das Exponential genauso wie für reelle Matrizen einführen.

4. Schritt: Schließlich bilden die Funktionen $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ mit

$$\varphi_l(t) = e^{t\lambda_j} \sum_{k=0}^{n_j - l} \frac{t^k}{k!} v_{l+k}$$

für $l = n_{j-1}+1, \ldots, n_j$ und $j = 1\ldots,k$ eine Familie, bestehend aus n linear unabhängigen komplexen Lösungen der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$.

Tatsächlich ist einerseits

$$\begin{aligned} x_l'(t) &= \lambda_j\, e^{t\lambda_j} \sum_{k=0}^{n_j-l} \frac{t^k}{k!} v_{l+k} + e^{t\lambda_j} \sum_{k=1}^{n_j-l} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_{l+k} \\ &= \lambda_j\, e^{t\lambda_j} \sum_{k=0}^{n_j-l} \frac{t^k}{k!} v_{l+k} + e^{t\lambda_j} \sum_{k=0}^{n_j-l-1} \frac{t^k}{k!} v_{l+k+1} \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} Ax_l(t) &= e^{t\lambda_j} \sum_{k=0}^{n_j-l-1} \frac{t^k}{k!} Av_{l+k} + e^{t\lambda_j} \frac{t^{n_j-l}}{(n_j-l)!} Av_{n_j} \\ &= e^{t\lambda_j} \sum_{k=0}^{n_j-l-1} \frac{t^k}{k!} (\lambda_j v_{l+k} + v_{l+k+1}) + e^{t\lambda_j} \frac{t^{n_j-l}}{(n_j-l)!} \lambda_j v_{n_j} \\ &= \lambda_j\, e^{t\lambda_j} \sum_{k=0}^{n_j-l} \frac{t^k}{k!} v_{l+k} + e^{t\lambda_j} \sum_{k=0}^{n_j-l-1} \frac{t^k}{k!} v_{l+k+1}\ , \end{aligned}$$

also $x_l'(t) = Ax_l(t)$.

Dieser Algorithmus liefert im allgemeinen eine Familie, bestehend aus n linear unabhängigen komplexen Lösungen der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$. Besitzt A nur reelle Eigenwerte, so ist diese Familie ein reelles Fundamentalsystem.

Nun sind wir aber an einem Fundamentalsystem der Differentialgleichung interessiert. Im folgenden erläutern wir, wie man ein solches aus der Familie komplexer Lösungen erhält.

Ist λ ein reeller Eigenwert der Vielfachheit l, so haben wir zu λ genau l linear unabhängige reelle Lösungen $\varphi_1^\lambda, \ldots, \varphi_l^\lambda$.

Ist μ ein echt komplexer Eigenwert der Vielfachheit m, so erhalten wir genau m linear unabhängige komplexe Lösungen $\psi_1^\mu, \ldots, \psi_m^\mu$.

Da A eine reelle Matrix ist, ist auch $\overline{\mu}$ ein Eigenwert von A. Und $\overline{\mu}$ liefert in der obigen Konstruktion gerade die konjugiert komplexen Lösungen $\overline{\psi_1^\mu}, \ldots, \overline{\psi_m^\mu}$.

In der konstruierten Familie komplexer Lösungen werden die $2m$ komplexen Lösungen zu μ und $\overline{\mu}$ durch die $2m$ reellen Lösungen $\mathrm{Re}(\psi_1^\mu), \mathrm{Im}(\psi_1^\mu), \ldots, \mathrm{Re}(\psi_m^\mu), \mathrm{Im}(\psi_m^\mu)$ ersetzt. Dabei erinnern wir an die für diese Prozedur wichtige Relation

$$e^{i\lambda} = \cos(\lambda) + i\sin(\lambda)\ .$$

Ist also $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ eine Familie linear unabhängiger komplexer Lösungen der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$, so bilden die Funktionen

$$\mathrm{Re}(\varphi_1), \mathrm{Im}(\varphi_1), \ldots, \mathrm{Re}(\varphi_n), \mathrm{Im}(\varphi_n)$$

ein Fundamentalsystem, bestehend aus n reellen Lösungen. Dabei werden die Funktionen, die identisch Null sind, herausgenommen und die Funktionen, die doppelt vorkommen, werden jeweils nur einmal berücksichtigt.

Folgerung 6.2.11 *Es sei $A \in \mathcal{L}$ eine reelle $n \times n$–Matrix mit n verschiedenen reellen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dann existiert eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von $\mathbb{R}^n$, bestehend aus Eigenvektoren, d.h. mit $Av_j = \lambda_j v_j$ für $j = 1, \ldots, n$ und jede Lösung der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ ist gegeben durch $x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \ldots a_n e^{\lambda_n t} v_n$ mit Konstanten $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.* □

Beispiel 6.2.12 Wir betrachten die Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und der Anfangsbedingung $x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Wir suchen zunächst eine Basis von $\mathbb{R}^2$, bezüglich welcher die Matrix A Diagonalgestalt annimmt. Es ist

$$\det(A - \lambda \mathbf{1}) = (2-\lambda)^2 - 1 ,$$

woraus wir die reellen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$ erhalten. Da wir für die 2×2–Matrix zwei verschieden Eigenwerte haben, existiert in $\mathbb{R}^2$ eine Basis $\{v_1, v_2\}$ von Eigenvektoren. Um diese zu berechnen bemerken wir zunächst, dass

$$A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - z \\ -y + 2z \end{pmatrix} .$$

Dann ist für $v_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2y_1 - z_1 = y_1 \text{ und } -y_1 + 2z_1 = z_1 \quad \Longleftrightarrow \quad y_1 = z_1$$

und für $v_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$$Av_2 = \lambda_2 v_2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2y_2 - z_2 = 3y_2 \text{ und } -y_2 + 2z_2 = 3z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad y_2 = -z_2 .$$

Folglich ist $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis aus Eigenvektoren. Bezüglich dieser Basis hat A die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Demzufolge hat e^{tA} bezüglich $\{v_1, v_2\}$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} .$$

Folglich sind die Lösungen der Differentialgleichung bezüglich der Basis $\{v_1, v_2\}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{3t} \end{pmatrix} ,$$

das heißt, die Lösungen sind gegeben durch $u(t) = \alpha e^t v_1 + \beta e^{3t} v_2$, also

$$u(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^t + \beta e^{3t} \\ \alpha e^t - \beta e^{3t} \end{pmatrix} .$$

Dabei ist $u(0) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{pmatrix}$. Setzen wir nun für diese allgemeine Lösung die Anfangsbedingung $u(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ein, so gelten zwischen α, β, a und b die Relationen

$$\alpha + \beta = a \qquad \text{und} \qquad \alpha - \beta = b ,$$

woraus

$$\alpha = \frac{a+b}{2} \qquad \text{und} \qquad \beta = \frac{a-b}{2}$$

folgt. Das Anfangswertproblem $x'(t) = Ax(t)$ mit $x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ hat demzufolge die eindeutig bestimmte Lösung

$$u(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{a+b}{2}e^t + \dfrac{a-b}{2}e^{3t} \\ \\ \dfrac{a+b}{2}e^t - \dfrac{a-b}{2}e^{3t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a(e^t + e^{3t}) + b(e^t - e^{3t}) \\ a(e^t - e^{3t}) + b(e^t + e^{3t}) \end{pmatrix} .$$

□

Beispiel 6.2.13 Für das Beispiel $x'(t) = Ax(t)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ist

$$\det(A - \lambda\mathbf{1}) = (\lambda - 3)^2 .$$

Für $v_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ berechnen wir

$$Av_2 = 3v_2 \iff 5y_2 - z_2 = 3y_2 \text{ und } 4y_2 + z_2 = 3z_2 \iff 2y_2 = z_2 .$$

Folglich ist der Eigenunterraum zu $\lambda = 3$ eindimensional und wird aufgespannt von

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Weiterhin hat A die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

$v_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ ist demnach gegeben durch

$$Av_1 = 3v_1 + v_2 \iff 5y_1 - z_1 = 3y_1 + 1 \text{ und } 4y_1 + z_1 = 3z_1 + 2 \iff 2y_1 = z_1 + 1 ,$$

also zum Beispiel

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Bezüglich der Basis $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ hat e^{tA} demnach die Gestalt

$$\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ te^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix}$$

und die Lösungen der Differentialgleichung sind gegeben durch

$$u(t) = \alpha e^{3t}(v_1 + tv_2) + \beta e^{3t} v_2 = e^{3t}\begin{pmatrix} \alpha(1+t) + \beta \\ \alpha(1+2t) + 2\beta \end{pmatrix} .$$

□

Beispiel 6.2.14 Betrachten wir die Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} ,$$

so erhalten wir mit

$$\det(A - \lambda \mathbf{1}) = (\lambda - 2)^2 + 1$$

die komplexen Eigenwerte $\lambda = 2 + i$ und $\overline{\lambda} = 2 - i$. Dann gilt für $v = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$

$$Av = \lambda v \quad \Longleftrightarrow \quad y - z = (2+i)y \text{ und } 2y + 3z = (2+i)z \quad \Longleftrightarrow \quad -z = (1+i)y \; .$$

Wir wählen als Eigenvektor

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Bezüglich $\{v, \overline{v}\}$ hat A die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

und e^{tA} die Gestalt

$$\begin{pmatrix} e^{(2+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(2-i)t} \end{pmatrix} .$$

Wir erhalten die folgende Familie linear unabhängiger komplexer Lösungen

$$\left\{ e^{(2+i)t} v, e^{(2-i)t} \overline{v} \right\} .$$

Aus

$$\begin{aligned} e^{(2+i)t} v &= e^{2t} \left(\cos(t) + i \sin(t) \right) \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^{2t} \left(\cos(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + i e^{2t} \left(\sin(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

erhalten wir den Realteil

$$\operatorname{Re}\left(e^{(2+i)t} v \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}$$

und den Imaginärteil

$$\operatorname{Im}\left(e^{(2+i)t} v \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix} .$$

Somit ist

$$\left\{ e^{2t} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}, e^{2t} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix} \right\}$$

ein Fundamentalsystem und jede Lösung der Differentialgleichung hat die Gestalt

$$u(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} -\alpha \cos(t) - \beta \sin(t) \\ (\alpha + \beta) \cos(t) - (\alpha - \beta) \sin(t) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. □

6.3 Qualitative Diskussion des Verlaufes der Lösungskurven linearer Differentialgleichungssysteme $x'(t) = Ax(t)$ für $n = 2$

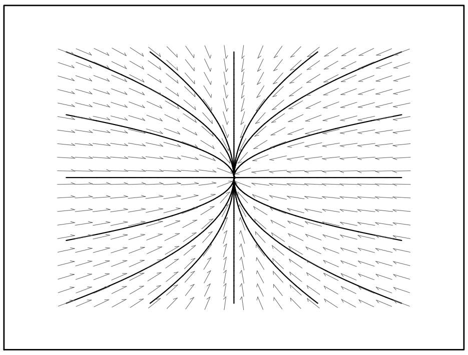
Wir betrachten für eine reelle 2×2–Matrix das Differentialgleichungssystem $x'(t) = Ax(t)$. Offenbar ist $x(t) \equiv 0$ stets eine Lösung (eine so genannte Gleichgewichtslösung) dieser Differentialgleichung.

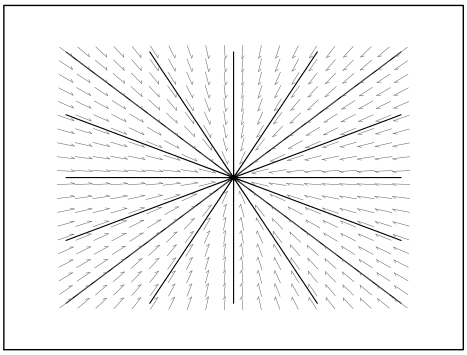
Weiterhin seien λ_1, λ_2 die Eigenwerte der Matrix A. In Abhängigkeit von diesen Eigenwerten haben wir für die Lösungskurven $x(t)$ im $\mathbb{R}^2$ den folgenden qualitativen Verlauf.

1. Fall: A ist reell diagonalisierbar, d.h. λ_1 und λ_2 sind reell und es existiert ein Basis $\{v_1, v_2\}$ von Eigenvektoren, also mit $Av_1 = \lambda_1 v_1$ und $Av_2 = \lambda_2 v_2$. Dann ist $\{e^{\lambda_1 t}v_1, e^{\lambda_2 t}v_2\}$ ein reelles Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Die Lösungen der Differentialgleichung sind demnach gegeben durch

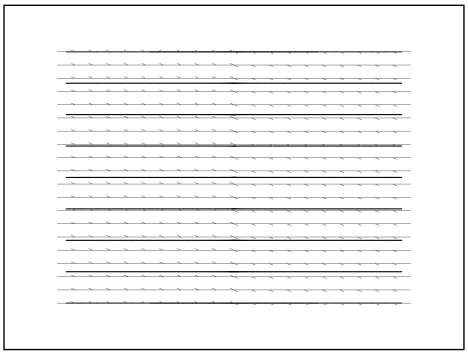
$$x(t) = \alpha\, e^{\lambda_1 t} v_1 + \beta\, e^{\lambda_2 t} v_2 \qquad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

(a) $\lambda_1,\, \lambda_2 < 0$

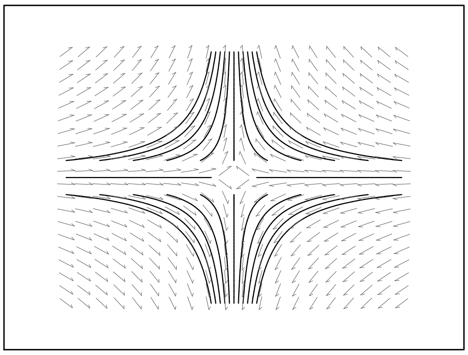




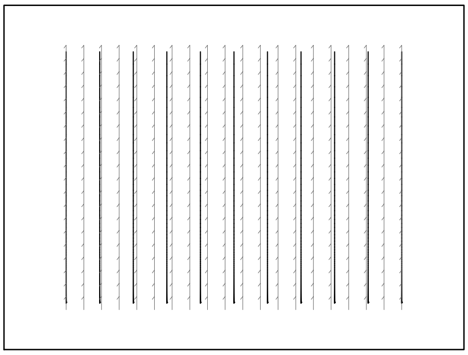
(b) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = 0$



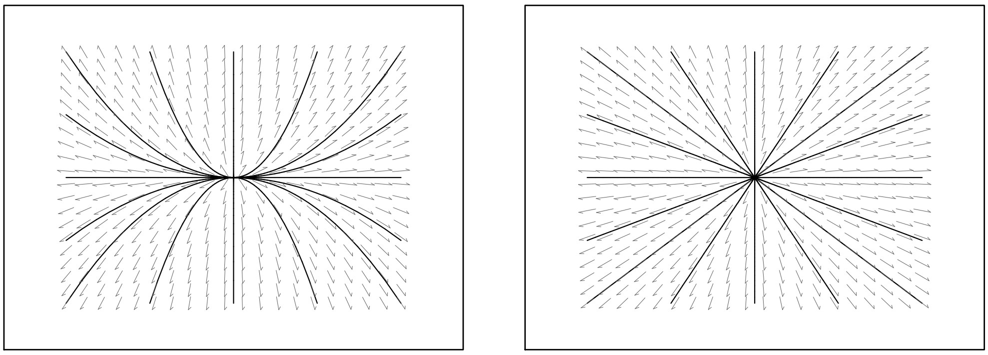
(c) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$



(d) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$



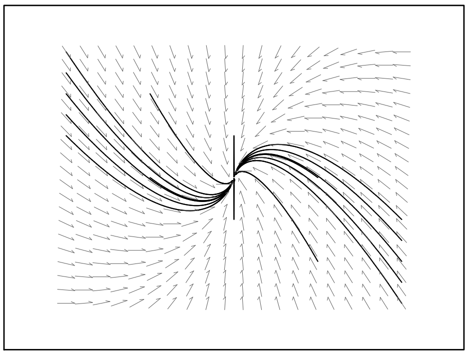
(e) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$



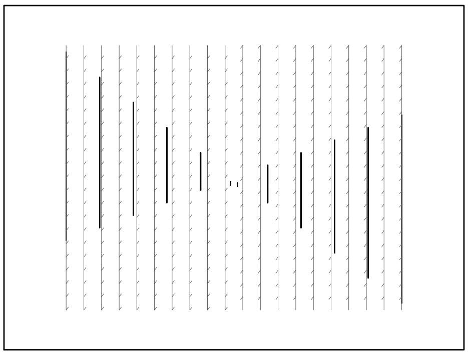
2. Fall: Es gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ und A ist nicht diagonalisierbar. Dann existiert eine Basis $\{v_1, v_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ derart, dass $Av_1 = \lambda v_1 + v_2$ und $Av_2 = \lambda v_2$ ist. Folglich ist $\{e^{\lambda t} v_1 + te^{\lambda t} v_2, e^{\lambda t} v_2\}$ ein reelles Fundamentalsystem und alle Lösungen der Differentialgleichung sind gegeben durch

$$x(t) = \alpha\, e^{\lambda t} v_1 + \left(\alpha\, te^{\lambda t} + \beta\, e^{\lambda t}\right) v_2 \qquad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

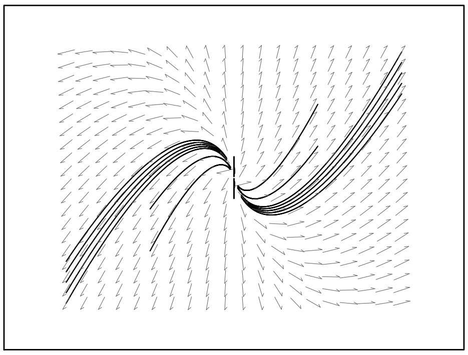
(a) $\lambda < 0$



(b) $\lambda = 0$



(c) $\lambda > 0$



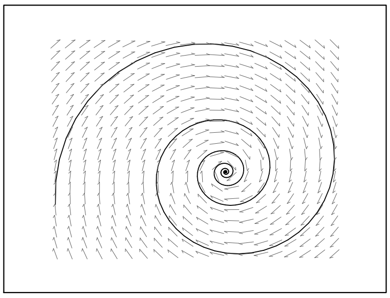
3. Fall: Sind λ_1 und λ_2 nicht reell, d.h. echt komplex, so gilt $\lambda = a + ib$ und $\overline{\lambda} = a - ib$ mit $b \neq 0$. Dann existiert ein Basis $\{v, \overline{v}\}$ von $\mathbb{C}^2$ mit $Av = (a + ib)v$ und $A\overline{v} = (a - ib)\overline{v}$ und $\{e^{(a+ib)t}v, e^{(a-ib)t}\overline{v}\}$ ist eine Familie linear unabhängiger komplexer Lösungen. Die Zerlegungen $v = v_1 + iv_2$ und $e^{ibt} = \cos(bt) + i\sin(bt)$ in Real– und Imaginärteil liefern mit

$$\begin{aligned} e^{(a+ib)t}v &= e^{at}\left(\cos(bt) + i\sin(bt)\right)(v_1 + iv_2) \\ &= e^{at}\left\{(\cos(bt)v_1 - \sin(bt)v_2) + i\left(\cos(bt)v_2 + \sin(bt)v_1\right)\right\} \end{aligned}$$

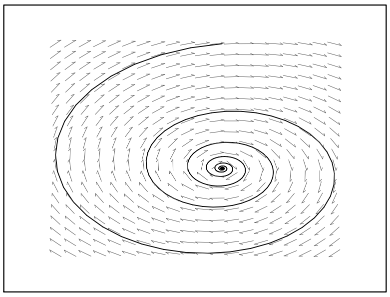
das reelle Fundamentalsystem

$$\left\{e^{at}\left(\cos(bt)v_1 - \sin(bt)v_2\right), e^{at}\left(\cos(bt)v_2 + \sin(bt)v_1\right)\right\} .$$

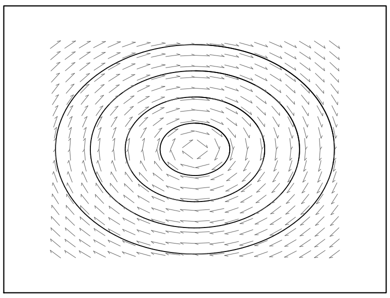
(a) $a < 0$



(b) $a > 0$



(c) $a = 0$



Zu den obigen Skizzen der Kurvenverläufe sei angemerkt, dass in x–Richtung die Richtung von v_1 aufgetragen ist, während die y–Richtung der Richtung von v_2 entspricht. Im allgemeinen sind die Basisvektoren v_1 und v_2 natürlich nicht senkrecht zueinander. Über die obigen Bilder muss also noch eine lineare Verzerrung darübergesetzt werden, welche die x–Achse in $\mathbb{R}v_1$ sowie die y–Achse in $\mathbb{R}v_2$ transformiert.

Bemerkung 6.3.1 Zusammenfassend bemerken wir, dass diese qualitative Diskussion des Verlaufes der Lösungskurven in der Literatur unter dem Stichwort "Klassifikation der Singularitäten" zu finden ist. Dabei heißt der Nullpunkt im Falle

1. (a)	asymptotisch stabiler Knoten 1. Art,
1. (e)	instabiler Knoten 1. Art,
2. (a)	asymptotisch stabiler Knoten 2. Art,
2. (c)	instabiler Knoten 2. Art,
1. (c)	(instabiler) Sattelpunkt,
3. (a)	asymptotisch stabiler Strudelpunkt,
3. (b)	instabiler Strudelpunkt,
3. (c)	stabiler Wirbelpunkt.

□

Bemerkung 6.3.2 Genau in den folgenden Fällen läuft jede Kurve $x(t)$ für $t \to \infty$ asymptotisch in den Nullpunkt hinein:

$$1.\,(a)\quad \lambda_1, \lambda_2 < 0 \qquad\qquad 2.\,(a)\quad \lambda < 0 \qquad\qquad 3.\,(a)\quad \mathrm{Re}(\lambda) = a < 0\ .$$

Dies führt auf qualitative Eigenschaften von Differentialgleichungen, insbesondere auf die Frage nach der Stabilität von Lösungen einer Differentialgleichung. □

6.4 Inhomogene lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten ein inhomogenes Differentialgleichungssystem $x'(t) = Ax(t) + b(t)$ für eine reelle $n \times n$–Matrix A und mit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Dieser Typ von Differentialgleichungssystemen wird wieder mittels ***Variation der Konstanten*** gelöst.

1. Schritt: Zunächst löst man die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung

$$x'(t) = Ax(t)\ .$$

Ist $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ein Fundamentalsystem dieser homogenen Differentialgleichung, so ist jede Lösung der homogenen Gleichung gegeben durch

$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t)$$

mit reellen Konstanten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

2. Schritt: Mit dem Ansatz $c_j = c_j(t)$ für $j = 1, \ldots, n$ geht man nun in die Differentialgleichung hinein. Für $x'(t)$ erhält man aus dem Ansatz

$$\begin{aligned} x'(t) &= c_1'(t)\varphi_1(t) + c_1(t)\varphi_1'(t) + \ldots + c_n'(t)\varphi_n(t) + c_n(t)\varphi_n'(t) \\ &= c_1'(t)\varphi_1(t) + \ldots + c_n'(t)\varphi_n(t) + c_1(t)A\varphi_1(t) + \ldots + c_n(t)A\varphi_n(t) \\ &= c_1'(t)\varphi_1(t) + \ldots + c_n'(t)\varphi_n(t) + Ax(t)\ . \end{aligned}$$

Demzufolge ist $x(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + \ldots + c_n(t)\varphi_n(t)$ genau dann eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, wenn

$$c_1'(t)\varphi_1(t) + \ldots + c_n'(t)\varphi_n(t) = b(t)$$

gilt. Dies ist ein Gleichungssystem für die Ableitungen $c_j'(t)$ für $j = 1, \ldots, n$. Da die Vektoren $\{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ für jedes t eine Basis des $\mathbb{R}^n$ sind, lässt sich dieses Gleichungssystem nach den einzelnen Funktionen $c_j'(t)$ auflösen. Integration liefert $c_j(t)$ für $j = 1, \ldots, n$ und somit die Lösungen des inhomogenen Differentialgleichungssystems.

Bemerkung 6.4.1 Es sei darauf hingewiesen, dass die maximalen Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems im allgemeinen nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. $\square$

Beispiel 6.4.2 Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x(t) + 4y(t) + e^t \\ y'(t) &= 4x(t) + 2y(t) + e^t , \end{aligned}$$

das heißt, wir haben

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} .$$

Zunächst lösen wir also das homogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} .$$

Wir erhalten mittels

$$\det(A - \lambda \mathbf{1}) = (2-\lambda)^2 - 16 = (\lambda - 6)(\lambda + 2)$$

die Eigenwerte $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = -2$ mit zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Folglich ist

$$\{e^{6t} v_1 \, , \, e^{-2t} v_2\}$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung und jede Lösung der homogenen Gleichung hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{6t} v_1 + c_2 e^{-2t} v_2 = \begin{pmatrix} c_1 e^{6t} + c_2 e^{-2t} \\ c_1 e^{6t} - c_2 e^{-2t} \end{pmatrix} .$$

Für die Variation der Konstanten machen wir den Ansatz $c_1 = c_1(t)$ und $c_2 = c_2(t)$, das heißt

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(t) e^{6t} + c_2(t) e^{-2t} \\ c_1(t) e^{6t} - c_2(t) e^{-2t} \end{pmatrix} .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1'(t) e^{6t} + 6c_1(t) e^{6t} + c_2'(t) e^{-2t} - 2c_2(t) e^{-2t} \\ c_1'(t) e^{6t} + 6c_1(t) e^{6t} - c_2'(t) e^{-2t} + 2c_2(t) e^{-2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x(t) + 4y(t) + c_1'(t) e^{6t} + c_2'(t) e^{-2t} \\ 4x(t) + 2y(t) + c_1'(t) e^{6t} - c_2'(t) e^{-2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1'(t) e^{6t} + c_2'(t) e^{-2t} \\ c_1'(t) e^{6t} - c_2'(t) e^{-2t} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Also löst $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(t) e^{6t} + c_2(t) e^{-2t} \\ c_1(t) e^{6t} - c_2(t) e^{-2t} \end{pmatrix}$ die inhomogene Differentialgleichung genau dann, wenn

$$\begin{aligned} c_1'(t) e^{6t} + c_2'(t) e^{-2t} &= e^t \\ c_1'(t) e^{6t} - c_2'(t) e^{-2t} &= e^t . \end{aligned}$$

Dies liefert

$$c_1'(t) = e^{-5t} \qquad \text{und} \qquad c_2'(t) = 0 ,$$

also

$$c_1(t) = -\frac{1}{5} e^{-5t} + a \qquad \text{und} \qquad c_2(t) \equiv b$$

mit reellen Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. $\square$

6.5 Homogene lineare Differentialgleichungen k–ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die in den bisherigen Abschnitten gemachten Überlegungen für Differentialgleichungssysteme erster Ordnung ermöglichen auch die Behandlung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten höherer Ordnung.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x^{(k)}(t) + a_{k-1}x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0 \tag{6.5.1}$$

für eine reellwertige Funktion $x = x(t)$, mit Konstanten $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$. Mit $y_0(t) = x(t)$ ist diese Differentialgleichung äquivalent zu

$$\begin{array}{rcl} y_0'(t) & = & y_1(t) \\ y_1'(t) & = & y_2(t) \\ \vdots & & \\ y_{k-2}'(t) & = & y_{k-1}(t) \\ y_{k-1}'(t) & = & -a_0 y_0(t) - a_1 y_1(t) - \ldots - a_{k-1} y_{k-1}(t) \end{array}$$

(vgl. Abschnitt 4.1). Das heißt, die Differentialgleichung (6.5.1) ist zu dem System $y'(t) = Ay(t)$ für $y(t) = (y_0(t), y_1(t), \ldots, y_{k-1}(t))^\top$ mit der $k \times k$–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{k-3} & -a_{k-2} & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

äquivalent. Indem man die Determinante nach der letzten Zeile entwickelt, erhält man

$$\det(A - \lambda \mathbf{1}) = (-1)^k \left(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k\right) \ .$$

Definition 6.5.1 *Das Polynom*

$$p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

heißt **charakteristisches Polynom** *der Differentialgleichung (6.5.1).*

Mit der Äquivalenz zu dem System $y'(t) = Ay(t)$ haben wir den folgenden Satz.

Satz 6.5.2 *(i) Die maximalen Lösungen der Differentialgleichung (6.5.1) sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.*

(ii) Der Lösungsraum

$$W = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist } k\text{-mal differenzierbar und löst (6.5.1)}\}$$

ist ein k–dimensionaler Vektorraum.

(iii) Durch

$$x \in W \mapsto y = \left(x, x', \ldots, x^{(k-1)}\right)^\top \in V$$

wird ein Isomorphismus zwischen W und dem Lösungsraum V der Differentialgleichung $y'(t) = Ay(t)$ definiert.

Beweis. Die Behauptungen folgen aus den Sätzen 4.1.2, 6.2.4 und 6.2.5. $\square$

Definition 6.5.3 *Ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (6.5.1) ist eine Basis* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ *des Vektorraumes* W.

Satz 6.5.4 *Sind* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *die reellen Nullstellen des charakteristischen Polynoms mit den Vielfachheiten* $n_1, \ldots, n_p$ *und sind* $\mu_1, \overline{\mu}_1, \ldots \mu_q, \overline{\mu}_q$ *die echt komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms mit den Vielfachheiten* $m_1, \ldots, m_q$, *so ist die Menge*

$$\begin{aligned}&\{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t}, \ldots\ldots, e^{\lambda_p t}, te^{\lambda_p t}, \ldots, t^{n_p-1}e^{\lambda_p t},\\ &\mathrm{Re}(e^{\mu_1 t}), \mathrm{Im}(e^{\mu_1 t}), \mathrm{Re}(te^{\mu_1 t}), \mathrm{Im}(te^{\mu_1 t}), \ldots \mathrm{Re}(t^{m_1-1}e^{\mu_1 t}), \mathrm{Im}(t^{m_1-1}e^{\mu_1 t}), \ldots\\ &\ldots, \mathrm{Re}(e^{\mu_q t}), \mathrm{Im}(e^{\mu_q t}), \mathrm{Re}(te^{\mu_q t}), \mathrm{Im}(te^{\mu_q t}), \ldots \mathrm{Re}(t^{m_q-1}e^{\mu_q t}), \mathrm{Im}(t^{m_q-1}e^{\mu_q t})\}\end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (6.5.1), bestehend aus $n_1 + \ldots + n_p + 2m_1 + \ldots + 2m_q = k$ *reellen Funktionen.*

Beweis. Wir wollen hier einen von Abschnitt 6.2 unabhängigen und elementaren Beweis angeben. Für $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei

$$L(x(t)) = x^{(k)}(t) + a_{k-1}x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t)\ .$$

Wir betrachten die Funktion $u(t) = e^{\alpha t}$. Dann ist

$$L(u(t)) = \alpha^k e^{\alpha t} + a_{k-1}\alpha^{k-1}e^{\alpha t} + \ldots + a_1 \alpha e^{\alpha t} + a_0 e^{\alpha t} = p(\alpha)e^{\alpha t}\ .$$

Also haben wir folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}&u(t) = e^{\alpha t} \text{ ist eine Lösung der Differentialgleichung (6.5.1)}\\ &\qquad\iff L(u(t)) = 0\\ &\qquad\iff p(\alpha) = 0\\ &\qquad\iff \alpha \text{ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms}\ .\end{aligned}$$

Dies gilt sowohl für reelle als auch für komplexe α.

Für den nächsten Schritt erinnern wir zunächst an einen allgemeinen Sachverhalt für Polynome. Für das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ der Differentialgleichung haben wir

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_p)^{n_p} \cdot (\lambda - \mu_1)^{m_1}(\lambda - \overline{\mu}_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \mu_q)^{m_q}(\lambda - \overline{\mu}_q)^{m_q}\ .$$

Aus dieser Zerlegung in alle linearen Faktoren kann man schnell sehen, dass α genau dann eine n-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, wenn alle Ableitungen von $p(\lambda)$ bis zur Ordnung $n-1$ an der Stelle α verschwinden.

Betrachten wir nun für fixiertes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $u(t) = t^r e^{\alpha t}$ mit $0 \leq r < n$. Dann ist $u(t)$ offenbar die r-fache Ableitung von $e^{\alpha t}$ nach α, das heißt,

$$\frac{d^r}{d\alpha^r}e^{\alpha t} = t^r e^{\alpha t} = u(t)\ .$$

Folglich ist

$$L(u(t)) = L\left(\frac{d^r}{d\alpha^r}e^{\alpha t}\right) = \frac{d^r}{d\alpha^r}L\left(e^{\alpha t}\right)\ ,$$

da man die Ableitungen nach t und nach α vertauschen kann. Es folgt

$$L(u(t)) = \frac{d^r}{d\alpha^r}\left(p(\alpha)e^{\alpha t}\right)\ .$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\alpha}\left(p(\alpha)e^{\alpha t}\right) &= \left(\frac{d}{d\alpha}p(\alpha)\right)e^{\alpha t}+p(\alpha)\left(\frac{d}{d\alpha}e^{\alpha t}\right)\ ,\\ \frac{d^2}{d\alpha^2}\left(p(\alpha)e^{\alpha t}\right) &= \left(\frac{d^2}{d\alpha^2}p(\alpha)\right)e^{\alpha t}+2\left(\frac{d}{d\alpha}p(\alpha)\right)\left(\frac{d}{d\alpha}e^{\alpha t}\right)+p(\alpha)\left(\frac{d^2}{d\alpha^2}e^{\alpha t}\right)\ ,\end{aligned}$$

und so weiter.

Also erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned}&u(t)=t^r e^{\alpha t} \text{ ist für alle } 0\le r<n \text{ eine Lösung der Differentialgleichung (6.5.1)}\\ &\iff L(u(t))=0 \text{ für alle } 0\le r<n\\ &\iff \frac{d^r}{d\alpha^r}\left(p(\alpha)e^{\alpha t}\right)=0 \text{ für alle } 0\le r<n\\ &\iff \alpha \text{ ist eine } n\text{-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms .}\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass alle angegebenen Funktionen Lösungen der Differentialgleichung (6.5.1) sind. Zu zeigen bleibt, dass diese Lösungen linear unabhängig sind. Dazu betrachten wir eine beliebige Linearkombination $\varphi(t)$ dieser Lösungen, das heißt,

$$\varphi(t)=\sum_{j=1}^{l}q_j(t)e^{\alpha_j t}\ ,$$

wobei für $j=1,\ldots,l$ die $q_j(t)$ Polynome in t mit komplexen Koeffizienten sind. Dabei sind die α_j verschiedene Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

Ist nun $\varphi\equiv 0$, so ist zu zeigen, dass dann auch $q_j\equiv 0$ für alle $j=1,\ldots,l$ folgt.

Diesen Beweis führen wir durch vollständige Induktion über $l=1,\ldots,k$. Für den Induktionsanfang $l=1$ folgt aus $q_1(t)e^{\alpha_1 t}\equiv 0$ offenbar $q_1(t)\equiv 0$.

Für den Induktionsschritt von l auf $l+1$ sei

$$\sum_{j=1}^{l}q_j(t)e^{\alpha_j t}+q(t)e^{\alpha t}\equiv 0$$

mit $\alpha\neq\alpha_j$ für alle $j=1,\ldots,l$. Multiplikation mit $e^{-\alpha t}$ liefert dann

$$\sum_{j=1}^{l}q_j(t)e^{(\alpha_j-\alpha)t}+q(t)\equiv 0\ .$$

Setzen wir $\rho_j:=\alpha_j-\alpha\neq 0$ für $j=1,\ldots,l$, so heißt das

$$\sum_{j=1}^{l}q_j(t)e^{\rho_j t}+q(t)\equiv 0\ .$$

Diese Gleichung leiten wir jetzt so oft nach t ab, bis alle Anteile die von $q(t)$ kommen, verschwinden. Da $q(t)$ ein Polynom ist, geschieht das auch nach endlich vielen Schritten. Dann ist

$$\sum_{j=1}^{l}\tilde{q}_j(t)e^{\rho_j t}\equiv 0 \tag{6.5.2}$$

mit anderen Polynomen $\tilde{q}_j(t)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist nun $\tilde{q}_j(t)\equiv 0$ für alle $j=1,\ldots,l$.

Es ist aber

$$\left(q_j(t)e^{\rho_j t}\right)'=q_j'(t)e^{\rho_j t}+q_j(t)\rho_j e^{\rho_j t}=\left(q_j'(t)+\rho_j q_j(t)\right)e^{\rho_j t}$$

und so weiter.

Demnach sind $q_j(t)$ und $\tilde{q}_j(t)$ Polynome desselben Grades, wobei $\tilde{q}_j(t)$ neben $q_j(t)$ auch alle Ableitungen von $q_j(t)$ enthält. Schrittweise schließt man aus $\tilde{q}_j(t) \equiv 0$ und $\rho_j \neq 0$, dass $q_j(t) \equiv 0$ für alle $j = 1, \ldots, l$. Schließlich folgt daraus auch $\varphi(t) \equiv 0$. $\square$

Bemerkung 6.5.5 Wir bemerken, dass für $\mu = a + ib$

$$e^{\mu t} = e^{at} \left(\cos(bt) + i \sin(bt)\right)$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(t^r e^{\mu t}) &= t^r e^{at} \cos(bt) \\ \mathrm{Im}(t^r e^{\mu t}) &= t^r e^{at} \sin(bt) \end{aligned}$$

ist. $\square$

Beispiel 6.5.6 Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung

$$x'''(t) - x''(t) + x'(t) - x(t) = 0$$

ist

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i) \ .$$

Das heißt, wir haben die einfachen Nullstellen 1 und $\pm i$. Demnach ist

$$\{e^t, \cos(t), \sin(t)\}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung und jede Lösung ist von der Gestalt

$$x(t) = ae^t + b\cos(t) + c\sin(t)$$

mit reellen Konstanten a, b und c. $\square$

Beispiel 6.5.7 Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung

$$x''(t) - 4x'(t) + 13x(t) = 0$$

ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = (\lambda - 2)^2 + 9 = (\lambda - 2 - 3i)(\lambda - 2 + 3i) \ .$$

Wir haben also die zwei einfachen konjugiert komplexen Nullstellen $2 + 3i$ und $2 - 3i$. Folglich ist

$$\{e^{2t}\cos(3t), e^{2t}\sin(3t)\}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung und jede Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$x(t) = ae^{2t}\cos(3t) + be^{2t}\sin(3t)$$

mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. $\square$

Beispiel 6.5.8 Für die Differentialgleichung

$$x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) = 0$$

haben wir das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda + 4)^2 \ .$$

Demnach ist -4 eine zweifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Wir erhalten das Fundamentalsystem

$$\{e^{-4t}, te^{-4t}\}$$

und jede Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$x(t) = (a + bt)e^{-4t}$$

mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. $\square$

6.6 Inhomogene lineare Differentialgleichungen k–ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten die inhomogene Differentialgleichung

$$x^{(k)}(t) + a_{k-1}x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t) \tag{6.6.1}$$

mit Konstanten $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dieser Aufgabentyp wird wieder mittels ***Variation der Konstanten*** gelöst.

Satz 6.6.1 *Es sei $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung*

$$x^{(k)}(t) + a_{k-1}x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0. \tag{6.6.2}$$

Weiterhin seien $c_1, \ldots, c_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen derart, dass

$$\begin{aligned}
c_1'(t)\varphi_1(t) + c_2'(t)\varphi_2(t) + \ldots + c_k'(t)\varphi_k(t) &= 0 \\
c_1'(t)\varphi_1'(t) + c_2'(t)\varphi_2'(t) + \ldots + c_k'(t)\varphi_k'(t) &= 0 \\
&\vdots \\
c_1'(t)\varphi_1^{(k-2)}(t) + c_2'(t)\varphi_2^{(k-2)}(t) + \ldots + c_k'(t)\varphi_k^{(k-2)}(t) &= 0 \\
c_1'(t)\varphi_1^{(k-1)}(t) + c_2'(t)\varphi_2^{(k-1)}(t) + \ldots + c_k'(t)\varphi_k^{(k-1)}(t) &= f(t)\,.
\end{aligned}$$

Dann sind die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung (6.6.1) gegeben durch

$$x(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + \ldots + c_k(t)\varphi_k(t)\,.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem bisher Gezeigten, insbesondere aus der Äquivalenz der Gleichung (6.6.1) zu einem inhomogenen System der Gestalt $y'(t) = Ay(t)+b(t)$ (vgl. Abschnitt 4.1) und aus der Variation der Konstanten für inhomogene lineare Differentialgleichungssysteme gemäß Abschnitt 6.4. □

Beispiel 6.6.2 Für die Differentialgleichung

$$x''(t) + x(t) = \frac{1}{\sin(t)}$$

ist $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Die Nullstellen des charakteristischen Polynom sind i und $-i$ und wir erhalten mittels Satz 6.5.4 das Fundamentalsystem $\{\cos(t), \sin(t)\}$. Variation der Konstanten gemäß Satz 6.6.1 liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
c_1'(t)\cos(t) + c_2'(t)\sin(t) &= 0 \\
-c_1'(t)\sin(t) + c_2'(t)\cos(t) &= \frac{1}{\sin(t)}\,.
\end{aligned}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\cos(t)$ und die zweite Gleichung mit $-\sin(t)$ und addieren dann diese beiden Gleichungen, so erhalten wir

$$c_1'(t) = -1\,.$$

Multiplizieren wir dagegen die erste Gleichung mit $\sin(t)$ und die zweite Gleichung mit $\cos(t)$, so erhalten wir nach Addition

$$c_2'(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{(\sin(t))'}{\sin(t)}\,.$$

Integration liefert demnach

$$c_1(t) = -t + a \qquad \text{und} \qquad c_2(t) = \ln|\sin(t)| + b$$

für reelle Konstanten a und b. Schließlich sind die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung

$$x''(t) + x(t) = \frac{1}{\sin(t)}$$

gegeben durch

$$x(t) = (a - t)\cos(t) + (\ln|\sin(t)| + b)\sin(t) \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}\,.$$

□

Ansätze für spezielle rechte Seiten

(1) Ist in der inhomogenen Differentialgleichung (6.6.1) die rechte Seite von der Gestalt

$$f(t) = r(t)e^{\gamma t} \qquad \text{für ein Polynom } r(t) \text{ und } \gamma \in \mathbb{R}\,,$$

so wählen wir den

Ansatz $\quad x(t) = t^m q(t) e^{\gamma t}$.

Dabei ist $q(t)$ ein Polynom in t mit $\deg(q) \leq \deg(r)$ und m bezeichnet die Vielfachheit der Nullstelle γ des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$. Ist γ keine Nullstelle von $p(\lambda)$, so wählen wir $m = 0$.

Beispiel 6.6.3 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = te^{3t}\,.$$

Das charakteristische Polynom dieser Differentialgleichung ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$. Folglich ist 3 eine zweifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms und wir gehen mit dem Ansatz

$$x(t) = t^2(a + bt)e^{3t} \qquad \text{für } a, b \in \mathbb{R}$$

in die Differentialgleichung hinein. Zunächst ist die erste Ableitung von $x(t) = (at^2 + bt^3)e^{3t}$

$$x'(t) = (2at + 3(a + b)t^2 + 3bt^3)e^{3t}\,.$$

Für die zweite Ableitung erhalten wir

$$x''(t) = (2a + 6(2a + b)t + 9(a + 2b)t^2 + 9bt^3)e^{3t}\,.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung erhalten wir

$$x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = (2a + 6bt)e^{3t}\,.$$

Also muss

$$2a + 6bt = t$$

gelten. Koeffizientenvergleich liefert $a = 0$ und $b = 1/6$. Folglich ist

$$x(t) = \frac{1}{6}t^3 e^{3t}$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. □

(2) Ist in der inhomogenen Differentialgleichung (6.6.1) die rechte Seite von der Gestalt

$$f(t) = (r_1(t)\cos(\alpha t) + r_2(t)\sin(\alpha t))\, e^{\beta t} \qquad \text{für Polynome } r_1(t),\ r_2(t) \text{ und } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ ,$$

so wählen wir den

Ansatz $\quad x(t) = t^m\, (q_1(t)\cos(\alpha t) + q_2(t)\sin(\alpha t))\, e^{\beta t}\ .$

Dabei sind $q_1(t)$ und $q_2(t)$ Polynome in t mit $\deg(q_1), \deg(q_2) \le \max\{\deg(r_1), \deg(r_2)\}$ und m bezeichnet die Vielfachheit der Nullstelle $\beta + i\alpha$ des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$. Ist $\beta + i\alpha$ keine Nullstelle von $p(\lambda)$, so wählen wir $m = 0$.

Beispiel 6.6.4 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = \cos(2t)e^{3t}\ .$$

Das charakteristische Polynom dieser Differentialgleichung ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$. Folglich ist $3 + 2i$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms und wir gehen mit dem Ansatz

$$x(t) = (a\cos(2t) + b\sin(2t))e^{3t} \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

in die Differentialgleichung hinein. Zunächst ist die erste Ableitung von $x(t)$

$$x'(t) = ((3a + 2b)\cos(2t) + (3b - 2a)\sin(2t))e^{3t}.$$

Dann ist die zweite Ableitung

$$x''(t) = ((12b + 5a)\cos(2t) + (5b - 12a)\sin(2t))e^{3t}\ .$$

Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = -4(a\cos(2t) + b\sin(2t))e^{3t}\ .$$

Folglich muss $a = -1/4$ und $b = 0$ sein. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist

$$x(t) = -\frac{1}{4}\cos(2t)e^{3t}\ .$$

□

6.7 Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten

Es sei $t \in\ ]a,b[\ \subseteq \mathbb{R} \mapsto A(t) \in \mathcal{L}$ eine stetige Abbildung, welche jedem $t \in\ ]a,b[$ eine reelle $n \times n$–Matrix $A(t)$ zuordnet. Dabei besagt die Stetigkeit, dass die Einträge in der Matrix stetige Funktionen in t sind.

Wir betrachten die homogene Differentialgleichung

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

und suchen Lösungen $x :]a,b[\ \to \mathbb{R}$ dieser Differentialgleichung. Wir bemerken, dass die maximalen Lösungen dieser Differentialgleichung auf $]a,b[$ definiert sind.

Satz 6.7.1 *Der Lösungsraum*

$$V = \{x :]a,b[\ \to \mathbb{R} \text{ ist differenzierbar und } x'(t) = A(t)x(t)\}$$

ist ein n–dimensionaler reeller Vektorraum.

Beweis. Die Argumente für diesen Beweis sind genau dieselben wie im Beweis von Satz 6.2.5. Insbesondere ist die Abbildung

$$x \in V \mapsto x(t_0) \in \mathbb{R}^n$$

für beliebig fixiertes $t_0 \in \,]a,b[$ ein Isomorphismus. □

Definition 6.7.2 *Ein* **Fundamentalsystem** *der Differentialgleichung $x'(t) = A(t)x(t)$ ist eine Basis des Vektorraumes V.*

Das heißt, ein Fundamentalsystem besteht auch hier aus n linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung.

Definition 6.7.3 *Es sei $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $x'(t) = A(t)x(t)$. Die* **Wronski–Determinante** *ist die durch*

$$w(t) := \det\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\right)$$

definierte Funktion $w : \,]a,b[\, \to \mathbb{R}$.

Dabei verstehen wir die Fundamentallösungen wieder als Spaltenvektoren von Funktionen in t, so dass der Ausdruck $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ dann tatsächlich eine reelle $n \times n$–Matrix ist.

Folgerung 6.7.4 *Für alle $t \in \,]a,b[$ ist $w(t) \neq 0$.*

Beweis. Ist $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ein Fundamentalsystem, so sind die Vektoren $\{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ in $\mathbb{R}^n$ für jedes $t \in \,]a,b[$ linear unabhängig. Also ist $w(t) = \det\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\right) \neq 0$. □

Satz 6.7.5 (Satz von Liouville) *Es sei $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $x'(t) = A(t)x(t)$. Dann gilt für die Wronski–Determinante*

$$w(t) = w(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s))ds} .$$

Beweis. Wir beginnen wieder mit einigen algebraischen Notationen und Beziehungen (vgl. auch den Beweis von Satz 6.1.4). Es bezeichne $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für jede beliebige $n \times n$–Matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \text{dass} \quad Be_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \det(e_1, \ldots, Be_k, \ldots, e_n) &= \det \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{31} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_{32} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} + \\ & + \ldots + \det \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & b_{n-2\,n} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & b_{n-1\,n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= b_{11} + b_{22} + \ldots + b_{nn} \\ &= \mathrm{Tr}(B) . \end{aligned}$$

Weiterhin ist für beliebige Vektoren $v_1 = (v_1^1, \dots, v_1^n)^\top, \dots, v_n = (v_n^1, \dots, v_n^n)^\top$

$$
\begin{aligned}
(Bv_1, \dots, Bv_n) &= \left(B \begin{pmatrix} v_1^1 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}, \dots, B \begin{pmatrix} v_n^1 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix} \right) \\
&= B \begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^n & \cdots & v_n^n \end{pmatrix} \\
&= B(v_1, \dots, v_n) \ ,
\end{aligned}
$$

also

$$\det(Bv_1, \dots, Bv_n) = \det(B) \det(v_1, \dots, v_n) \ .$$

Nun sei Φ_t die $n \times n$–Matrix $\Phi_t = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$. Dann folgt für

$$w(t) = \det(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = \det(\Phi_t)$$

mit $\varphi_k(t) = \Phi_t e_k$ für $k = 1, \dots, n$ und $A(t) = \Phi_t \Phi_t^{-1} A(t)$

$$
\begin{aligned}
w'(t) &= \det(\varphi_1'(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) + \det(\varphi_1(t), \varphi_2'(t), \dots, \varphi_n(t)) + \dots \\
&\qquad \dots + \det(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n'(t)) \\
&= \det(A(t)\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) + \det(\varphi_1(t), A(t)\varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) + \dots \\
&\qquad \dots + \det(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, A(t)\varphi_n(t)) \\
&= \det(\Phi_t \Phi_t^{-1} A(t) \Phi_t e_1, \Phi_t e_2, \dots, \Phi_t e_n) + \\
&\quad\ \det(\Phi_t e_1, \Phi_t \Phi_t^{-1} A(t) \Phi_t e_2, \dots, \Phi_t e_n) + \dots \\
&\qquad \dots + \det(\Phi_t e_1, \Phi_t e_2, \dots, \Phi_t \Phi_t^{-1} A(t) \Phi_t e_n) \\
&= \det(\Phi_t) \sum_{k=1}^{n} \det(e_1, \dots, \Phi_t A(t) \Phi_t^{-1} e_k, \dots, e_n) \\
&= \det(\Phi_t) \operatorname{Tr}\left(\Phi_t A(t) \Phi_t^{-1}\right) \\
&= \det(\Phi_t) \operatorname{Tr}(A(t)) \ .
\end{aligned}
$$

Folglich erhalten wir für $w(t)$ die Differentialgleichung

$$w'(t) = \operatorname{Tr}(A(t)) w(t) \ ,$$

welche nach Trennung der Variablen

$$\ln |w(t)| - \ln |w(t_0)| = \ln \left| \frac{w(t)}{w(t_0)} \right| = \int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr}(A(s)) ds$$

und somit die Behauptung liefert. □

Es ist im allgemeinen nicht möglich, die Lösungen eines homogenen Systems $x'(t) = A(t)x(t)$ in geschlossener Form anzugeben. Das folgende Beispiel zeigt für $n = 2$, wie man mit Hilfe der Wronski–Determinante zu einer bekannten Lösung φ_1 eine zweite, von φ_1 linear unabhängige Lösung φ_2 findet. Das heißt, wir ergänzen φ_1 zu einem Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

Beispiel 6.7.6 Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= e^{-t}x_2(t) \\ x_2'(t) &= e^t x_1(t) + x_2(t) \ , \end{aligned}$$

das heißt, wir haben

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} \\ e^t & 1 \end{pmatrix} .$$

Man rechnet direkt nach, dass

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist. Bezeichne

$$\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} \varphi_2^1(t) \\ \varphi_2^2(t) \end{pmatrix}$$

eine zweite Fundamentallösung. Nach Definition der Wronski–Determinante haben wir

$$w(t) = det \begin{pmatrix} e^t & \varphi_2^1(t) \\ e^{2t} & \varphi_2^2(t) \end{pmatrix} = e^t\varphi_2^2(t) - e^{2t}\varphi_2^1(t) \ .$$

Andererseits ist mit $t_0 = 0$

$$\int_{t_0}^t \mathrm{Tr}(A(s))ds = \int_0^t ds = t \ ,$$

woraus nach dem Satz von Liouville (Satz 6.7.5) für $t_0 = 0$ und $w(t_0) = 1$

$$w(t) = e^t$$

folgt. Demzufolge haben wir für $\varphi_2(t)$ die Gleichung

$$e^t\varphi_2^2(t) - e^{2t}\varphi_2^1(t) = e^t \ ,$$

also

$$\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} \varphi_2^1(t) \\ 1 + e^t\varphi_2^1(t) \end{pmatrix} .$$

Geht man mit dieser Gestalt für $\varphi_2(t)$ wieder in die Differentialgleichung hinein, so muss die Gleichung

$$\left(\varphi_2^1(t)\right)' = e^{-t} + \varphi_2^1(t)$$

erfüllt sein. Diese Differentialgleichung für die erste Komponente von $\varphi_2(t)$ löst man mittels Variation der Konstanten und erhält

$$\varphi_2^1(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + c\,e^t \qquad \text{für beliebige Konstanten } c \in \mathbb{R} \ .$$

Als zweite Fundamentallösung können wir somit beispielsweise die Funktion

$$\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -1 \end{pmatrix}$$

wählen. □

Ein inhomogenes System der Gestalt $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ wird dann vergleichbar zu Abschnitt 6.4 mittels Variation der Konstanten gelöst.

6.8 Homogene lineare Differentialgleichungen k–ter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten

Wir betrachten die homogene Differentialgleichung

$$x^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0 \tag{6.8.1}$$

mit stetigen Funktion $a_0, \ldots, a_{k-1} :]a, b[\to \mathbb{R}$.

Diese Differentialgleichung ist zu dem Differentialgleichungssystem $y'(t) = A(t)y(t)$ mit $y(t) = (x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t))^\top$ und

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \ldots & -a_{k-1}(t) \end{pmatrix}$$

äquivalent. Diese Äquivalenz und die entsprechenden Aussagen für Systeme von Differentialgleichungen liefern uns die Aussagen des folgenden Satzes.

Satz 6.8.1 *(i) Der Lösungsraum*

$$W = \{x :]a, b[\to \mathbb{R} \textit{ ist differenzierbar und löst die Gleichung (6.8.1)}\}$$

ist ein k–dimensionaler Vektorraum.

(ii) Durch $x \in W \mapsto y = (x, x', \ldots, x^{(k-1)})^\top$ wird ein Isomorphismus zwischen W und dem Lösungsraum des Differentialgleichungssystems $y'(t) = A(t)y(t)$ definiert. □

Definition 6.8.2 *Ein* **Fundamentalsystem** *der Differentialgleichung (6.8.1) ist eine Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ des Vektorraumes W.*

Die Wronski–Determinante ist dann die Wronski–Determinante des entsprechenden Fundamentalsystems des zugehörigen Differentialgleichungssystems $y'(t) = A(t)y(t)$, das heißt,

$$w(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_k(t) \\ \varphi_1'(t) & \cdots & \varphi_k'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(k-1)}(t) & \cdots & \varphi_k^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Satz 6.8.3 *Sei $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ ein Fundmentalsystem der Differentialgleichung (6.8.1). Dann gilt für alle $t \in]a, b[$ $\quad w(t) \neq 0$ und*

$$w(t) = w(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_{k-1}(s)ds} \qquad \textit{mit fixiertem } t_0 \in]a, b[\,.$$

Beweis. Die Behauptungen folgen aus Folgerung 6.7.4 und mit

$$\mathrm{Tr} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0(s) & -a_1(s) & -a_2(s) & \ldots & -a_{k-1}(s) \end{pmatrix} = -a_{k-1}(s)$$

aus dem Satz von Liouville (Satz 6.7.5). □

Beispiel 6.8.4 Wir betrachten auf dem offenen Intervall $]-\pi/2, \pi/2[$ die Differentialgleichung

$$x''(t) - 2\frac{x(t)}{\cos^2(t)} = 0 \ .$$

Die Funktion $\varphi_1(t) = \tan(t)$ ist eine Lösung dieser Differentialgleichung. Wir haben $k = 2$. Wegen $a_{k-1}(t) = a_1(t) \equiv 0$ ist

$$-\int_{t_0}^{t} a_{k-1}(s)ds = 0 \ ,$$

also

$$w(t) \equiv w(t_0) \neq 0 \ .$$

Bezeichne $w \neq 0$ die reelle Konstante $w = w(t_0)$. Andererseits ist

$$w(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \tan(t) & \varphi_2(t) \\ \frac{1}{\cos^2(t)} & \varphi_2'(t) \end{pmatrix} = \tan(t)\varphi_2'(t) - \frac{\varphi_2(t)}{\cos^2(t)}$$

und wir erhalten für $\varphi_2(t)$ die Gleichung

$$\tan(t)\varphi_2'(t) - \frac{\varphi_2(t)}{\cos^2(t)} = w \qquad \text{mit } w \in \mathbb{R},\ w \neq 0 \ ,$$

Das ist eine Differentialgleichung, welche wir mittels Variation der Konstanten lösen können. Als Lösung dieser Differentialgleichung für $\varphi_2(t)$ erhält man

$$\varphi_2(t) = -w(1 + t \cdot \tan(t)) + c\tan(t) \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R} \ .$$

Schließlich ist $\{\tan(t), 1 + t \cdot \tan(t)\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$x''(t) - 2\frac{x(t)}{\cos^2(t)} = 0 \ .$$

□

Beispiel 6.8.5 Wir betrachten auf dem offenen Intervall $]0, \infty[$ die Differentialgleichung

$$x''(t) - \frac{2}{t}x'(t) + \left(1 + \frac{2}{t^2}\right)x(t) = 0 \ .$$

Man rechnet nach, dass

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= t\cos(t) \\ \varphi_2(t) &= t\sin(t) \end{aligned}$$

linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung sind. Ist nämlich

$$\alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t) = 0 \ ,$$

so erhalten wir durch Einsetzen von $t = \pi$, dass $\alpha = 0$ ist. Setzt man dagegen $t = \pi/2$ ein, so folgt $\beta = 0$. Da der Lösungsraum dieser Differentialgleichung zweidimensionl ist, ist jede Lösung von der Gestalt

$$x(t) = at\cos(t) + bt\sin(t) \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \ .$$

□

6.9 Inhomogene lineare Differentialgleichungen k–ter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten

Es seien $a_0, \ldots, a_{k-1}, f :]a,b[\to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Wir betrachten auf $]a,b[$ die inhomogene Differentialgleichung

$$x^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = f(t) \tag{6.9.1}$$

Diese Differentialgleichung wird wieder mittels ***Variation der Konstanten*** gelöst (vgl. auch Abschnitt 6.6).

Satz 6.9.1 *Es sei $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung*

$$x^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0\ . \tag{6.9.2}$$

Weiterhin seien $c_1, \ldots, c_k :]a,b[\to \mathbb{R}$ Funktionen derart, dass

$$\begin{aligned}
c_1'(t)\varphi_1(t) + c_2'(t)\varphi_2(t) + \ldots + c_k'(t)\varphi_k(t) &= 0 \\
c_1'(t)\varphi_1'(t) + c_2'(t)\varphi_2'(t) + \ldots + c_k'(t)\varphi_k'(t) &= 0 \\
&\vdots \\
c_1'(t)\varphi_1^{(k-2)}(t) + c_2'(t)\varphi_2^{(k-2)}(t) + \ldots + c_k'(t)\varphi_k^{(k-2)}(t) &= 0 \\
c_1'(t)\varphi_1^{(k-1)}(t) + c_2'(t)\varphi_2^{(k-1)}(t) + \ldots + c_k'(t)\varphi_k^{(k-1)}(t) &= f(t)\ .
\end{aligned}$$

Dann sind die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung (6.9.1) gegeben durch

$$x(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + \ldots + c_k(t)\varphi_k(t)\ .$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Äquivalenz der Gleichung (6.9.1) zu einem inhomogenen System der Gestalt $y'(t) = A(t)y(t)+b(t)$ (vgl. Abschnitt 4.1) und aus der Variation der Konstanten für dieses inhomogene lineare Differentialgleichungssystem. □

Beispiel 6.9.2 Wir betrachten auf dem offenen Intervall $]0,\infty[$ die inhomogene Differentialgleichung

$$x''(t) - \frac{2}{t}x'(t) + \left(1 + \frac{2}{t^2}\right)x(t) = 0\ .$$

In Beispiel 6.8.5 haben wir eingesehen, dass $\{t\cos(t), t\sin(t)\}$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogen Differentialgleichung ist. Variation der Konstanten gemäß Satz 6.9.1 liefert dann für $c_1'(t)$ und $c_2'(t)$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
c_1'(t)t\cos(t) + c_2'(t)t\sin(t) &= 0 \\
c_1'(t)\left(\cos(t) - t\sin(t)\right) + c_2'(t)\left(\sin(t) + t\cos(t)\right) &= t\ .
\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$c_1'(t)\cos(t) = -c_2'(t)\sin(t)\ .$$

Setzen wir dies in die mit $\cos(t)$ multiplizierte zweite Gleichung

$$c_1'(t)\cos(t)\left(\cos(t) - t\sin(t)\right) + c_2'(t)\cos(t)\left(\sin(t) + t\cos(t)\right) = t\cos(t)$$

ein, so erhalten wir

$$-c_2'(t)\sin(t)\left(\cos(t) - t\sin(t)\right) + c_2'(t)\cos(t)\left(\sin(t) + t\cos(t)\right) = t\cos(t)\ ,$$

also

$$c_2'(t)\left(t\sin^2(t) + t\cos^2(t)\right) = c_2'(t)t = t\cos(t)\ .$$

Demnach ist

$$c_2'(t) = \cos(t) \qquad \text{und} \qquad c_1'(t) = -\sin(t)$$

und wir erhalten

$$c_1(t) = \cos(t) + a \qquad \text{und} \qquad c_2(t) = \sin(t) + b \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}\ .$$

Schließlich sind alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung gegeben durch

$$x(t) = t + at\cos(t) + bt\sin(t) \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}\ .$$

□

Bemerkung 6.9.3 Alle Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung erhält man mittels $x(t) = x_s(t) + x_h(t)$, wobei $x_s(t)$ eine (fest gewählte) spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist und $x_h(t)$ alle Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung durchläuft. □

Übungsaufgaben

Die folgenden Übungsaufgaben sind entsprechend der zugehörigen Abschnitte der Vorlesung zusammengestellt und wurden zum größten Teil in den Übungen durchgesprochen beziehungsweise waren Gegenstand der Hausaufgaben.

Die Aufgaben lassen sich auch sehr gut im Selbststudium durcharbeiten, da man sich von der Richtigkeit einer Lösung einer Differentialgleichung durch Ableiten und Einsetzen einfach selbst überzeugen kann.

Aufgaben zum Kapitel "Einführung"

1. Geben Sie eine Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = x(t)$ und $x(t_0) = e$ für $t_0 = 1$ an.

2. (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $x(t) = c\,e^{-t^2}$ mit $t \in \mathbb{R}$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $x'(t) + 2t\,x(t) = 0$ ist.

(b) Geben Sie eine Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) + 2t\,x(t) = 0$ und $x(a) = 1$ für $a \in \mathbb{R}$ an.

3. Geben Sie eine Lösung der Differentialgleichung $x''(t) = 0$ an.

4. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme.

(a)	$x(t)x'(t) + t = 0$	und	$x(t_0) = 0$
(b)	$x(t)x'(t) = 2t$	und	$x(0) = x_0$
(c)	$x(t)x'(t) = 3$	und	$x(0) = x_0$

Hinweis: $\big(x^2(t)\big)' = 2x(t)x'(t)$

Aufgaben zum Kapitel "Elementare Integrationsmethoden"

1. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme mittels Trennung der Variablen.

(a)	$t\,x'(t) = 2x(t)$	und	$x(1) = x_0$
(b)	$t^2 + x^2(t)\,x'(t) = 1$	und	$x(0) = -1$
(c)	$(1+t^2)\,x'(t) = 2\,t\,x^2(t)$	und	$x(0) = x_0$
(d)	$e^{-x(t)}(1 + x'(t)) = 1$	und	$x(0) = x_0$
(e)	$x'(t) = e^{x(t)}\sin(t)$	und	$x(0) = 0$
(f)	$x'(t) = e^{x(t)}\sin(t)$	und	$x(0) = -\ln(3)$
(g)	$(1-t)\,x'(t) = x(t)$	und	$x(t_0) = x_0$
(h)	$t\,x(t) + (t+1)x'(t) = 0$	und	$x(0) = x_0$
(i)	$t\,x(t)\,x'(t) = \sqrt{x^2(t)+1}$	und	$x(e) = -\sqrt{3}$
(j)	$x'(t) = 10^{x(t)+t}$	und	$x(0) = 0$
(k)	$x'(t) + 2t\,x(t) = 0$	und	$x(0) = x_0$
(l)	$(1+t)\,x'(t) = 2\,x(t)$	und	$x(0) = 1$
(m)	$x'(t) = 3\,t^2\,(x^2(t)+1)$	und	$x(0) = 0$
(n)	$x(t)\,x'(t) = t\,(1 + x^2(t))$	und	$x(0) = 1$

2. Differentialgleichungen der Form $x'(t) = h(a\,x(t) + b\,t + c)$ für eine Funktion h und mit Konstanten a, b, c können mit Hilfe der Substitution $z(t) := a\,x(t) + b\,t + c$ in eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen überführt werden.
Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme.

(a)	$x'(t) = (t + x(t))^2$	und	$x(1) = -1$
(b)	$x'(t) = (t - x(t) + 3)^2$	und	$x(1) = 3$
(c)	$x'(t) = (t - x(t) + 3)^2$	und	$x(1) = 4$

3. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem.

$$t\,x'(t) - x(t) = 2\,t^3 \qquad \text{und } x(1) = 4$$

Hinweis: Substitution $u(t) := \dfrac{x(t)}{t}$

4. Lösen Sie folgende homogene Differentialgleichungen mit Anfangsbedingung.

(a) $x'(t) = \dfrac{2\,x(t) - 5\,t}{x(t) - 2\,t}$ und $x(1) = 4$

(b) $x'(t) = \dfrac{6\,x(t) - 5\,t}{4\,x(t) - 6\,t}$ und $x(2) = 0$

(c) $x'(t) = \dfrac{x(t)}{t} - \dfrac{x^2(t)}{t^2}$ und $x(1) = \frac{1}{2}$

(d) $t^2 + x^2(t) = 2\,t\,x(t)\,x'(t)$ und $x(1) = 3$

(e) $x'(t) = \dfrac{x(t)}{t} - \dfrac{t^2}{x^2(t)}$ und $x(1) = 1$

5. Lösen Sie folgende homogene Differentialgleichungen.

(a) $x'(t) + \dfrac{x(t)}{t} = 2$

(b) $t\,x'(t) = t + x(t)$

(c) $t + 2x(t) - tx'(t) = 0$

(d) $\left(t^2 + x^2(t)\right) x'(t) = 2tx(t)$

6. Lösen Sie folgende inhomogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mittels Variation der Konstanten.

(a) $x'(t)\,t - x(t) = 2\,t^3$

(b) $x'(t) + 2\,t\,x(t) = t\,e^{-t^2}$

(c) $x'(t) - t\,x(t) = t\,e^{t^2}$

(d) $x'(t) + x(t)/t = 2$

(e) $x'(t) + x(t)\,\tan(t) = \sin(2t)$

(f) $x'(t) + x(t)\,\sin(t) = \sin(2t)$

(g) $t\,x'(t) - 2x(t) = 2t^4$

(h) $t^2x'(t) + tx(t) + 1 = 0$

(i) $t\,x'(t) + (t+1)x(t) = 3t^2e^{-t}$

(j) $(2t+1)x'(t) = 4t + 2x(t)$

(k) $(t\,x'(t) - 1)\ln(t) = 2x(t)$

(l) $\sin(t)\cos(t)x'(t) - x(t) = k\cos^2(t)$ mit $k \neq 0$ konstant

7. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem.

$$x'(t) - 3\,x(t)\tan(t) = 1 \qquad \text{und } x(0) = 0$$

8. Lösen Sie folgende Bernoullischen Differentialgleichungen mit Anfangsbedingung. (In beiden Beispielen ist $k = -1$.)

(a) $\quad x'(t) + 2\,x(t) = \dfrac{e^t}{x(t)} \qquad$ und $\quad x(0) = 1$

(b) $\quad 2\,x'(t) - \dfrac{t}{x(t)} = \dfrac{t\,x(t)}{t^2 - 1} \qquad$ und $\quad x(2) = \sqrt{3}$

9. Lösen Sie die folgenden Bernoullischen Differentialgleichungen.

(a) $t\,x^2(t)\,x'(t) = t^2 + x^3(t)$

(b) $x'(t) + 2\,x(t) = x^2(t)e^t$

(c) $x'(t) + x(t) + \sin(t)\,x^2(t) = 0$

(d) $(t+1)\big(x'(t) + x^2(t)\big) = -x(t)$

(e) $t\,x^2(t)x'(t) = t^2 + x^3(t)$

(f) $3\,x'(t) - x(t)\,\sin(t) + 3\,x^4(t)\sin(t) = 0$

(g) $x'(t) = \cos(t)\,x^4(t) + \tan(t)\,x(t)$

(h) $3\,x'(t) - x(t)\,\sin(t) + 3\,x^4(t)\,\sin(t) = 0$

10. Lösen Sie die folgenden Riccatischen Differentialgleichungen unter Benutzung der speziellen Lösung $\overline{x}(t)$.

(a)	$t\,x'(t) - (2t+1)\,x(t) + x^2(t) = -t^2$	und	$\overline{x}(t) = t$
(b)	$x'(t) + 2\,e^t\,x(t) - x^2(t) = e^{2t} + e^t$	und	$\overline{x}(t) = e^t$
(c)	$x'(t) = x^2(t) + \dfrac{x(t)}{t} + \dfrac{1}{t^2}$	und	$\overline{x}(t) = -1/t$
(d)	$x'(t) + x(t) + \sin(t)\,x^2(t) = 0$	und	$\overline{x}(t) \equiv 0$
(e)	$t^2\,x'(t) + t\,x(t) + t^2\,x^2(t) = 4$	und	$\overline{x}(t) = 2/t$
(f)	$3\,x'(t) + x^2(t) + \dfrac{2}{t^2} = 0$	und	$\overline{x}(t) = 1/t$
(g)	$x'(t) - 2t\,x(t) + x^2(t) = 5 - t^2$	und	$\overline{x}(t) = t + 2$

11. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen.

(a) $(t+1)\big(x'(t) + x^2(t)\big) = -x(t)$

(b) $x'(t) + 2x(t) = e^x\,x^2(t)$

(c) $x'(t) + x(t) + \sin(t)\,x^2(t) = 0$

12. Lösen Sie die folgenden exakten Differentialgleichungen mit Anfangsbedingung.

(a)	$2t\,x(t) + \big(2x(t) + t^2\big)\,x'(t) = 0$	und	$x(0) = 1$
(b)	$2\,x(t)\,x'(t)\,\cos^2(t) = 1 + x^2(t)\,\sin(2t)$	und	$x(0) = -\sqrt{2}$
(c)	$2\,\big(\,x(t) - t^2\,\big)\,x'(t) = 4t\,\big(\,x(t) - t^2\big) - 1$	und	$x(0) = 2$

13. Bestimmen Sie für die folgenden exakten Differentialgleichungen das Potential $u(t,x)$.

(a) $\big(t^3 - 3x^2(t)\big)\,x'(t) + 2t + 3t^2x(t) = 0$

(b) $\big(t^2 - x^2(t)\big)\,x'(t) + 2t\,x(t) = 0$

(c) $e^{-x(t)} - \big(2x(t) + te^{-x(t)}\big)\,x'(t) = 0$

(d) $\dfrac{x(t)}{t} + \big(x^3(t) + \ln(t)\big)\,x'(t) = 0$

(e) $\big(t^3 + (1 + tx(t))e^{t\,x(t)}\big)\,x'(t) + \big(x^2(t)e^{t\,x(t)} + 3t^2x(t)\big) = 0$

(f) $\big(2 - 9t\,x^2(t)\big)\,t + \big(4x^2(t) - 6t^3\big)\,x(t)x'(t) = 0$

14. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen. Zeigen Sie zunächst, dass $m(t,x)$ jeweils ein integrierender Faktor ist.

(a) $x(t) - t\,x'(t) = 0$ mit $m(t,x) = -\dfrac{t}{x^2}$

(b) $x(t) - \dfrac{1}{t} + \dfrac{x'(t)}{x(t)} = 0$ mit $m(t,x) = \dfrac{2t}{x}$

(c) $x'(t) = x^2(t) + \dfrac{x(t)}{t}$ mit $m(t,x) = \dfrac{t}{x^2}$

(d) $t\,x^2(t)\,(t\,x'(t) + x(t)) = 1$ mit $m(t,x) = 6t$

(e) $x^2(t) + t^2 + t + x(t)\,x'(t) = 0$ mit $m(t,x) = \dfrac{1}{t^2 + x^2}$

(f) $t\,x(t)\,x'(t) = t^3 + t\,x^2(t) + x^2(t)$ mit $m(t,x) = \dfrac{1}{t(t^2 + x^2)}$

Aufgaben zum Kapitel "Differentialgleichungen in der mathematischen Biologie"

1. Es sei $p(t)$ die Wachstumsfunktion einer Population. Die Verdopplungszeit $d(t)$ ist die Zeit in der sich die Populationsgröße von $p(t)$ auf $2p(t)$ verdoppelt, d.h. $d(t)$ ist gegeben durch

$$p(\,t + d(t)\,) = 2p(t)\ .$$

(a) Zeigen Sie für die exponentielle Wachstumsfunktion $p(t) = c\,e^{rt}$ mit $c > 0$ und $r > 0$, dass die Verdopplungszeit nicht von t abhängig ist.

(b) Berechnen Sie die Verdopplungszeit für die logistische Wachstumsfunktion $p(t) = \dfrac{e^t}{1+e^t}$ in Abhängigkeit von t.
Diskutieren Sie das Monotonieverhalten und den Definitionsbereich von $d(t)$.

2. Das (spezielle) Bertalanffy-Modell verallgemeinert das logistische Wachstumsmodell derart, dass

$$p'(t) = k\,p(t)\left(1 - \left(\frac{p(t)}{a}\right)^n\right)$$

mit reellen Konstanten $k, a, n > 0$. Lösen Sie diese Differentialgleichung.

3. Bestimmen Sie die Wachstumsfunktion $p(t)$ für das hyperbolische Wachstumsmodell, welches beschrieben wird durch

$$p'(t) = k\,(p(t))^{n+1}$$

mit reellen Konstanten $k, n > 0$.

4. Das logistische Wachstumsmodell kann man auch derart modifizieren, dass

$$p'(t) = k\,(p_M - p(t))^n\,p(t)$$

für reelles $k > 0$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Untersuchen Sie diese Differentialgleichung für $n = 2$. Vergleichen Sie die Wachstumsfunktionen für $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$ miteinander.

Aufgaben zum Kapitel "Existenz– und Eindeutigkeitssätze"

1. Schreiben Sie die folgenden Differentialgleichungen als Systeme erster Ordnung.

(a) $x'''(t) + 8x(t) = 0$

(b) $x'''(t) + x''(t) + x'(t) + x(t) = 0$

(c) $x''(t) + a_1(t)\, x'(t) + a_0(t)\, x(t) = b(t)$

(d) $x''(t) = 2\, x'(t)\, y^2(t) + y'(t)$

$y''(t) = (x'(t))^3\; y(t)$

2. Es sei $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$x^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = f(t)\ .$$

Es sei $y(t) := \big(x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)\big)^\top$ für alle $t \in I$, das heißt, es ist $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie, dass $y(t)$ eine Differentialgleichung der Gestalt $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$ löst. Geben Sie die Matrizen $A(t)$ und die Vektoren $b(t)$ explizit an.

3. Berechnen Sie die maximale Lösung der Differentialgleichung

$$t^2 x'(t) - \cos(2x(t)) = 1 \qquad \text{mit } \lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{9}{4}\pi\ .$$

Aufgaben zum Kapitel "Geometrische Interpretation gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung"

1. Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ das Vektorfeld V, welches gegeben ist durch

$$V\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ .$$

Skizzieren Sie das Vektorfeld V und geben Sie die Nullstellen dieses Vektorfeldes an. Geben Sie weiterhin die Integralkurven dieses Vektorfeldes an and skizzieren Sie die Trajektorien der Integralkurven. Veranschaulichen Sie sich den Verlauf der Trajektorien unter Berücksichtigung der Aussagen von Satz 5.1.8. Dazu ist es evtl. hilfreich, die Integralkurven in einem (x, y, t)–Koordinatensystem zu skizzieren.

2. Wir betrachten für das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Differentialgleichung $x'(t) = F(x(t))$ mit $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^\top$. Ein **erstes Integral** dieser Differentialgleichung ist eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derart, dass h konstant entlang jeder Lösung der Differentialgleichung ist, das heißt,

$$\frac{d}{dt}\left(h(x(t))\right) = 0 \qquad \text{für jede Lösung } x(t)\ .$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x_1, x_2) := x_2^2 - 2x_1^2 + x_1^4$ ein erstes Integral des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= 4x_1(t) - 4x_1^3(t) \end{aligned}$$

ist. Beschreiben Sie mittels h die geometrische Gestalt der Lösungskurven $(x_1(t), x_2(t))$ in der (x_1, x_2)–Ebene.

Aufgaben zum Kapitel "Lineare Differentialgleichungen"

1. Berechnen Sie für folgende Matrizen mittels Definition 6.1.2 das Exponential e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$.

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. Berechnen Sie für folgende Matrizen mittels Satz 6.1.4(ii) das Exponential e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Es sei A eine schiefsymmetrische reelle $n \times n$–Matrix, d.h. $A + A^\top = 0$, und $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^\top$ eine Lösung der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(t) := ||x(t)||^2 = (x_1(t))^2 + \ldots + (x_n(t))^2$ konstant ist.

4. Lösen Sie die linearen homogenen Differentialgleichungssysteme $x'(t) = Ax(t)$ mit

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (f) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Lösen Sie die linearen homogenen Differentialgleichungssysteme $x'(t) = Ax(t)$ mit

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (e) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. Finden Sie reelle Fundamentalsysteme für die folgenden Differentialgleichungssysteme $x'(t) = Ax(t)$ mit

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

7. Finden Sie reelle Fundamentalsysteme für die folgenden Differentialgleichungssysteme.

(a)
$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 7x_1(t) - 3x_2(t) \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) + 7x_2(t) \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -2x_1(t) - 6x_3(t) \\ x_2'(t) &= 2x_2(t) \\ x_3'(t) &= 3x_1(t) + 4x_3(t) \end{aligned}$$

8. Lösen Sie das inhomogene Differentialgleichungssystem $x'(t) = Ax(t) + b(t)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

mittels Variation der Konstanten.

9. Lösen Sie das folgende inhomogene Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten.

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) + \tan^2(t) - 1 \\ y'(t) &= -x(t) + \tan(t) \end{aligned}$$

10. Lösen Sie folgende homogene Differentialgleichungen.

(a) $x'''(t) + 8\,x(t) = 0$

(b) $x'''(t) - 6\,x''(t) + 11\,x'(t) - 6\,x(t) = 0$

11. Lösen Sie folgende inhomogene Differentialgleichungen.

(a) $x''(t) + x(t) = e^t$

(b) $x'''(t) + x''(t) = 6t + e^{-t}$

(c) $x'''(t) - 6x''(t) + 9x'(t) = te^{3t}$

(d) $x'''(t) - 6x''(t) + 9x'(t) = \cos(2t)e^{3t}$

(e) $x'''(t) - 7\,x''(t) + 19\,x'(t) - 13\,x(t) = 13\,t^3 - 57\,t^2 + 10\,t + 70$

(f) $x''(t) - 8\,x'(t) + 20\,x(t) = 5\,t\,e^{4t}\,\sin(2t)$

12. Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung

$$x''(t) - \frac{2}{t}x'(t) + \left(1 + \frac{2}{t^2}\right)x(t) = t \qquad \text{auf dem offenen Intervall }]0, \infty[\ ,$$

indem sie:

(a) zeigen, dass die Funktion $\varphi_1(t) = t\cos(t)$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist,

(b) die Funktion $\varphi_1(t)$ mit Hilfe der Wronski–Determinante zu einem Fundamentalssystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ergänzen und

(c) mittels Variation der Konstanten die inhomogene Differentialgleichung lösen.

Literatur

[1] R. Schimming: *Differentialgleichungen in den Biowissenschaften.* Greifswalder Preprint-Reihe Mathematik 3/99

[2] W. Walter: *Analysis 1.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1999

[3] W. Walter: *Analysis 2.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1995

[4] W. Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1996