GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Carsten Schütt

Contents

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

1. Einführung

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung, in der unabhängige Variablen, Funktionen und Ableitungen von Funktionen auftreten.

$$F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$$

Eine Lösung einer Differentialgleichung ist eine Funktion f, die diese Gleichung erfüllt. Häufig schreibt man auch $y = f(x)$ und

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Die Ordnung einer Differentialgleichung ist gleich der Ordnung der höchsten Ableitung, die in der Gleichung auftritt. Gleichungen, in denen auch partielle Ableitungen auftreten, heissen partielle Differentialgleichungen, die anderen heissen gewöhnliche Differentielgleichungen.

Wir wollen hier lernen, wie man Lösungen von Differentialgleichungen findet. Häufig sind wir nicht an irgendeiner beliebigen Lösung interessiert, sondern an Lösungen die bestimmte Bedingungen erfüllen, z.B. sogenannte Anfangswerte: Finde eine Lösung $f(x)$ der Differentialgleichung

$$F(x, f(x), f'(x)) = 0$$

die im Punkt x_0 den Wert y_0 annimmt, d.h. $f(x_0) = y_0$. Dann stellt sich die Frage nach der Eindeutigkeit der Lösung.

Differentialgleichungen treten in Physik, Chemie, Biologie, Ingenieurwissenschaften, Geowissenschaften, Ozeanographie, Geowissenschaften und Wirtschaftswissenschaften auf.

Beispiel. *(i) (Bakterienwachstum) Durch Beobachtung stellt man fest, dass der Zuwachs einer Bakterienkultur in kleinen Zeiträumen proportional zur Größe der Bakterienkultur selbst ist. Dann erfüllt die Größe der Bakterienkultur $P(t)$ zur Zeit t die Differentialgleichung*

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P(t)$$

Die Lösungen der Gleichung sind durch

$$P(t) = P(t_0)e^{\alpha(t-t_0)}$$

gegeben.

(ii) (Bevölkerungswachstum und logistische Differentialgleichung) Das Wachstum der Bevölkerung der Welt lässt sich approximativ durch die logistische Differentialgleichung

$$\frac{dP}{dt} = \gamma P - \tau P^2$$

beschreiben. Als Lösungen erhalten wir

$$P(t) = \frac{\gamma}{\tau + (\frac{\gamma}{P(t_0)} - \tau)e^{-\gamma(t-t_0)}}$$

(iii) (Verbreitung von Gerüchten) Eine menschliche Population habe die Anzahl N. Ein Gerücht verbreite sich durch Mundpropaganda: Ein Mitglied der Population erfahre das Gerücht dadurch-und nur dadurch-, dass ein anderes Mitglied es ihm /ihr erzählt. $I(t)$ sei die Anzahl der Informierten zur Zeit t und k die Anzahl der Kontakte, die jeder Informierte in einer Zeiteinheit habe. Dann gilt approximativ die Differentialgleichung

$$\frac{dI}{dt} = kI\frac{N-I}{N}$$

und es ist

$$I(t) = \frac{N}{1+(N-1)e^{-kt}}$$

eine Lösung.

(iv) (Freier Fall) Ein Massenpunkt bewege sich nur unter Einfluss der Schwerkraft entlang der x-Achse. Dann gilt

$$m\ddot{x} = mg$$

und

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \tfrac{1}{2}gt^2$$

wobei $x(t)$ der Ort und $v(t)$ die Geschwindigkeit zur Zeit t sind.

(v) (Freier Fall mit Luftwiderstand) Für den freien Fall mit Luftwiderstand setzen wir als Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = mg - \rho\dot{x}$$

an, wobei ρ als Widerstandskoeffizient bezeichnet wird. Als eine Lösung erhalten wir

$$x(t) = x(0) + \frac{mg}{\rho}t + \frac{m}{\rho}\left(\frac{mg}{\rho} - v(0)\right)(e^{-\frac{\rho}{m}t} - 1)$$

Lösungen. $P(t)$ bezeichnet die Größe der Bakterienkultur zur Teit t.

$$P(t+\Delta t) - P(t) = \Delta P \sim \alpha P(t)\Delta t$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} \sim \alpha P(t) \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{dP}{dt} = \alpha P(t)$$

Wir leiten nun die Lösung her. Offensichtlich ist $P = 0$ eine Lösung der Gleichung, die aber wenig interessant ist. Wir nehmen an, dass es einen Zeitpunkt t_0 mit $P(t_0) \neq 0$ gibt. Da P stetig ist (P ist differenzierbar), gilt $P(t) \neq 0$ in einer Umgebung von t_0.

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP}{dt} = \alpha$$

Hieraus folgt

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{P(s)}\frac{dP}{ds}ds = \int_{t_0}^{t} \alpha ds = \alpha(t-t_0)$$

$$\alpha(t-t_0)=\int_{P(t_0)}^{P(t)}\frac{1}{P}dP=\ln\frac{P(t)}{P(t_0)}$$
$$P(t)=P(t_0)e^{\alpha(t-t_0)}$$

(ii) Die Erdbevölkerung hat sich etwa alle 35 Jahre verdoppelt. Es ließe sich also hier das Bakterienmodell anwenden. Wir erhalten für die Bevölkerungszahl P im Jahre $t+1986$

$$P(t+1986)=5\cdot 10^9 e^{0.02t}$$

und speziell

$$P(2501)\sim 148,7 \text{ Billionen Menschen}$$

Dies ist unrealistisch, da die feste Erdoberfläche ungefähr 149 Billionen Quadratmeter beträgt.

P.F. Verhulst (1804-1849, belgischer Mathematiker) schlug die logarithmische Differentialgleichung

$$\frac{dP}{dt}=\gamma P-\tau P^2$$

vor, wobei γ die Geburtsrate und τ die Sterberate ist. Diese Gleichung berücksichtigt die Verschlechterung der Lebensumstände durch die größere Bevölkerungszahl. Wir lösen nun die Gleichung.

$$1=\frac{1}{\gamma P-\tau P^2}\frac{dP}{dt}$$
$$\int_{t_0}^{t}ds=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\gamma P(s)-\tau P(s)^2}\frac{dP}{ds}ds$$

Wir wenden nun Partialbruchzerlegung an.

$$\frac{1}{P(\gamma-\tau P)}=\frac{1}{\gamma P}+\frac{\tau}{\gamma(\gamma-\tau P)}$$

$$\begin{aligned}t-t_0&=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\gamma P(s)}+\frac{\tau}{\gamma(\gamma-\tau P(s))}\frac{dP}{ds}ds\\&=\int_{P(t_0)}^{P(t)}\frac{1}{\gamma P(s)}+\frac{\tau}{\gamma(\gamma-\tau P(s))}dP\\&=\frac{1}{\gamma}\ln\frac{P(t)}{P(t_0)}-\frac{1}{\gamma}\ln\frac{\gamma-\tau P(t)}{\gamma-\tau P(t_0)}\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$e^{\gamma(t-t_0)}=\frac{P(t)(\gamma-\tau P(t_0))}{P(t_0)(\gamma-\tau P(t))}$$
$$P(t)=\frac{\gamma}{\tau+(\frac{\gamma}{P(t_0)}-\tau)e^{-\gamma(t-t_0)}}$$

(iii) Jeder Informierte hat in einer Zeiteinheit k Kontakte. Wir nehmen an, dass hiervon $q(t)k$ Kontakte mit Nichtinformierten stattfinden, wenn $q(t)$ der Prozentsatz der Nichtinformierten zur Zeit bezeichnet. Es gilt

$$q(t)=\frac{N-I(t)}{N}$$

Also wird im Zeitintervall Δt von einer informierten Person an

$$q(t)k\Delta t = \frac{N - I(t)}{N} k\Delta t$$

Nichtinformierte die Information weitergegeben. Da es $I(t)$ Informierte gibt, wird in einer Zeiteinheit Δ die Information an

$$I(t)\frac{N - I(t)}{N} k\Delta t$$

Also gilt

$$\Delta I \sim I(t)\frac{N - I(t)}{N} k\Delta t$$

bzw.

$$\frac{dI}{dt} = kI\frac{N - I}{N}$$

Dies ist eine logistische Differentialgleichung. Mit $t_0 = 0$, $\gamma = k$, $\tau = \frac{k}{N}$ und $I(t_0) = 1$ erhalten wir

$$I(t) = \frac{N}{1 + (N-1)e^{-kt}}$$

(iv) Es sei m die Masse des Massenpunktes und

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \qquad \text{und} \qquad b(t) = \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

sind Geschwindigkeit und Beschleunigung. Nach dem Newtonschen Kraftgesetz gilt für die Kraft $K = m\ddot{x}$. Ausserdem gilt in der Nähe der Erdoberfläche $K = mg$. Also folgt $\ddot{x} = g$.

$$\int_{t_0}^{t} g ds = \int_{t_0}^{t} \ddot{x}(s) ds = \dot{x}(t) - \dot{x}(t_0)$$

$$(t - t_0)g = \dot{x}(t) - \dot{x}(t_0)$$

$$\int_{t_0}^{t} (s - t_0) g ds = \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s) - \dot{x}(t_0) ds$$

$$\tfrac{1}{2}(t^2 - t_0^2)g - gt_0(t - t_0) = x(t) - x(t_0) - \dot{x}(t_0)(t - t_0)$$

$$x(t) = x(t_0) + (\dot{x}(t_0) - gt_0)(t - t_0) + \tfrac{1}{2}g(t^2 - t_0^2)$$

Mit $t_0 = 0$ und $v(0) = \dot{x}(0)$ erhalten wir

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \tfrac{1}{2}gt^2$$

(v) Es gilt

$$m\ddot{x} = mg - \rho\dot{x}$$

Mit $\dot{x} = v$ erhalten wir

$$m\dot{v} = mg - \rho v$$

$$1 = \frac{m\dot{v}}{mg - \rho v}$$

Mit der Substitutionsformel erhalten wir

$$\int_{t_0}^{t} ds = \int_{t_0}^{t} \frac{m\dot{v}(s)}{mg - \rho v(s)} ds = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{mg - \rho v} dv = -\frac{m}{\rho} \ln \frac{mg - \rho v(t)}{mg - \rho v(t_0)}$$

$$t - t_0 = -\frac{m}{\rho} \ln \frac{mg - \rho v(t)}{mg - \rho v(t_0)}$$

$$v(t) = \frac{mg}{\rho} - \left(\frac{mg}{\rho} - v(t_0) \right) e^{-\frac{\rho}{m}(t - t_0)}$$

$$\begin{aligned} x(t) - x(t_0) &= \int_{t_0}^{t} v(s) ds = \int_{t_0}^{t} \frac{mg}{\rho} - \left(\frac{mg}{\rho} - v(t_0) \right) e^{-\frac{\rho}{m}(s - t_0)} ds \\ &= \frac{mg}{\rho}(t - t_0) + \frac{m}{\rho} \left(\frac{mg}{\rho} - v(t_0) \right) e^{-\frac{\rho}{m}(t - t_0)} - \frac{m}{\rho} \left(\frac{mg}{\rho} - v(t_0) \right) \end{aligned}$$

$$x(t) = x(0) + \frac{mg}{\rho} t + \frac{m}{\rho} \left(\frac{mg}{\rho} - v(0) \right) (e^{-\frac{\rho}{m} t} - 1)$$

□

2. Einfache Differentialgleichungen und Lösungsmethoden

(i) Richtungsfeld

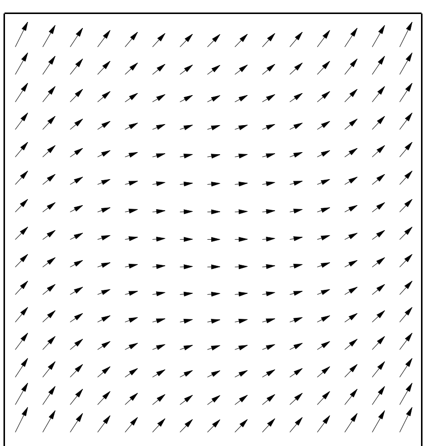
Es handelt sich hierbei um ein Verfahren, eine Differentialgleichung graphisch zu lösen. Es stellt auch ein Hilfsmittel dar, um das Verhalten von möglichen Lösungen zu studieren und um so eventuell einen Lösungsansatz zu finden.

Die Gleichung

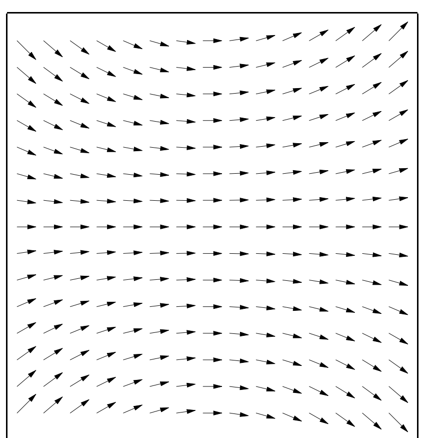
$$y' = f(x, y)$$

ordnet jedem Punkt (x, y) des $\mathbb{R}^2$ eine Steigung zu. Aus diesen Linien- bzw. Steigungselementen kann man Lösungskurven zusammensetzen. Natürlich erhält man so keine exakten Lösungen.

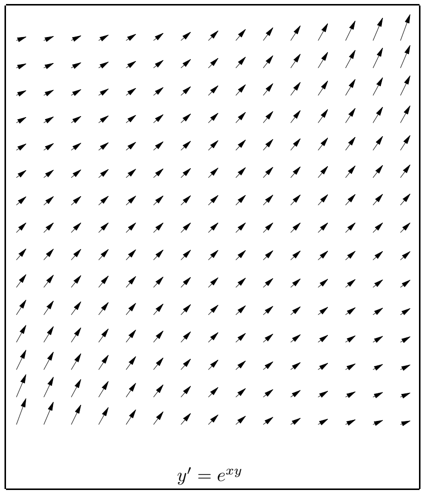
Beispiel.
(i) $y' = x^2 + y^2$, $x \in [-1, 1]$, $y \in [-1, 1]$
(ii) $y' = xy$, $x \in [-1, 1]$, $y \in [-1, 1]$
(iii) $y' = e^{xy}$, $x \in [-1, 1]$, $y \in [-1, 1]$



$y' = x^2 + y^2$



$y' = xy$



(ii) Getrennte Veränderliche

Es seien $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ und $g:[c,d]\rightarrow\mathbb{R}$ stetige Funktionen und es gelte für alle $y\in[c,d]$, dass $g(y)\neq 0$. Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

hat

$$y(x) = G^{-1}(G(y(x_0)) + F(x) - F(x_0))$$

als Lösungen. Hierbei ist G Stammfunktion von g und F von f. G ist invertierbar, da g entweder strikt positiv oder strikt negativ ist.

Wir zeigen, wie man auf diese Lösungen kommt. Aus der Differentialgleichung folgt

$$g(y)y' = f(x)$$

$$\int_{x_0}^{x} g(y)y'dx = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

Mit der Substitutionsformel folgt

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} g(y)dy = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

$$G(y(x)) - G(y(x_0)) = F(x) - F(x_0)$$

(iii) Homogene Differentialgleichungen

Es sei $h:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ eine stetige Funktion und

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

Als Lösungsansatz verwenden wir

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \qquad \text{bzw.} \qquad xu(x) = y(x)$$

Hierbei schließen wir den Fall $x = 0$ aus.

$$u(x) + xu'(x) = h(x)$$

$$u' = \frac{h(u) - u}{x}$$

Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Wir können nun (ii) anwenden.

Wir haben gezeigt, dass u eine Lösung von

$$u' = \frac{h(u) - u}{x}$$

ist, falls y eine Lösung von

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

ist. Die Umkehrung kann man ebenfalls zeigen.

Beispiel.

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}$$

ist eine homogene Differentialgleichung. Sie hat

$$y(x) = x\left(\left(\frac{y(x_0)}{x_0}\right)^3 - 3\ln\left|\frac{x}{x_0}\right|\right)^{\frac{1}{3}}$$

als Lösungen.

Lösung. Wir setzen $u = \frac{y}{x}$ bzw. $xu = y$. Dann gilt

$$xu' + u = y'$$

$$xu' + u = u - \frac{1}{u^2}$$

$$u' = -\frac{1}{xu^2} \qquad \text{bzw.} \qquad -u^2u' = \frac{1}{x}$$

$$-\int_{x_0}^{x} u^2u'dt = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}dt$$

Mit der Substitutionsformel folgt

$$-\tfrac{1}{3}u(x)^3 + \tfrac{1}{3}u(x_0)^3 = \ln\left|\frac{x}{x_0}\right|$$

$$u(x) = \left(u(x_0) - 3\ln\left|\frac{x}{x_0}\right|\right)^{\frac{1}{3}}$$

□

(iv) Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Es seien $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Die Differentialgleichung

$$y' + g(x)y = h(x)$$

heisst lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Falls $h = 0$, so sagen wir, dass die Gleichung homogen ist. Dies entspricht der Terminologie der linearen Algebra und sollte nicht mit den Gleichungen von (ii) in Zusammenhang gebracht werden.

Die Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung bilden einen 1-dimensionalen Teilraum des Vektorraumes $C^1[a, b]$ aller stetig differenzierbaren Funktionen. (Falls y Lösung ist, dann ist $y' = -gy$ notwendig stetig.)

Man erhält sämtliche Lösungen der inhomogenen Gleichung, indem man zu einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung die Lösungen der homogenen addiert.

Falls y_1 und y_2 Lösungen der homogenen Gleichung sind, dann gilt

$$y_1' + gy_1 = 0 \qquad\qquad y_2' + gy_2 = 0$$

Wir addieren beide Gleichungen.

$$(y_1 + y_2)' + g(y_1 + y_2) = 0$$

Also ist $y_1 + y_2$ eine Lösung. Genauso zeigt man, dass ay eine Lösung ist, falls $a \in \mathbb{R}$ und y eine Lösung ist. Damit ist gezeigt, dass die Lösungen der homogenen Gleichung einen Teilraum bilden. Wir zeigen nun, dass sämtliche Lösungen der homogenen Gleichung von der Form

$$y(x) = c \exp\left(-\int_{x_0}^{x} g(t)dt\right) \qquad\qquad c \in \mathbb{R}$$

sind, d.h. die Funktion

$$\exp\left(-\int_{x_0}^{x} g(t)dt\right)$$

ist eine Basis des Lösungsraumes.

Man findet diese Lösungen leicht, da $y' = -g(x)y$ getrennte Variablen besitzt.

Wir nehmen nun an, dass es Lösungen gibt, die von anderer Gestalt sind. Also

$$y(x) = \Phi(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} g(t)dt\right) = \Phi(x)\exp(-G(x))$$

(Da die e-Funktion strikt positiv ist, kann man immer hierdurch dividieren.) Es folgt

$$y' = \Phi' \exp(-G) - \Phi g \exp(-G) = -gy = -g\Phi \exp(-G)$$
$$\Phi' \exp(-G) = 0$$
$$\Phi' = 0$$

Nach *Analysis I* ist Φ damit eine konstante Funktion.

y_1 und y_2 seien Lösungen der inhomogenen Gleichung. Wir zeigen, dass $y_1 - y_2$ eine Lösung der homogenen Gleichung ist. Hieraus folgt sofort, dass sich alle

Lösungen der inhomogenen Gleichung durch eine spezielle plus sämtliche Lösungen der homogenen gewinnen lassen.

$$y_1 + gy_1 = h \qquad\qquad y_2 + gy_2 = h$$

Wir subtrahieren die zweite Gleichung von der ersten.

$$(y_1 - y_2)' + g(y_1 - y_2) = 0$$

Das Anfangswertproblem

$$y' + g(x)y = h(x) \qquad\qquad y(x_0) = y_0$$

hat genau eine Lösung

$$y(x) = e^{-G(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} h(t) e^{G(t)} dt \right)$$

wobei

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t) dt$$

Dass es sich hierbei um eine Lösung handelt, lässt sich leicht durch Einsetzen nachprüfen. Wir wollen hier aber die Methode darstellen, mit der man diese Lösung berechnet. Es ist die Methode der Variation der Konstanten. Wir setzen

$$y(x) = C(x) e^{-G(x)} \qquad\qquad G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t) dt$$

(Man nimmt also an, dass die Konstante C, die in der homogenen Lösung auftritt, tatsächlich eine Funktion ist.)

$$y' + gy = C' e^{-G} + C(-G') e^{-G} + gCe^{-G} = h$$

Wegen $g = G'$ folgt

$$C' e^{-G} = h \qquad \text{bzw.} \qquad C' = he^{G}$$

$$\int_{x_0}^{x} h(t) e^{G(t)} dt = \int_{x_0}^{x} C'(t) dt = C(x) - C(x_0)$$

$$C(x) = C(x_0) + \int_{x_0}^{x} h(t) e^{G(t)} dt$$

$$y(x) = C(x) e^{-G(x)} = e^{-G(x)} \left(C(x_0) + \int_{x_0}^{x} h(t) e^{G(t)} dt \right)$$

Die Bedingung $y(x_0) = y_0$ führt wegen $G(x_0) = 0$ auf

$$y(x) = C(x) e^{-G(x)} = e^{-G(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} h(t) e^{G(t)} dt \right)$$

Die Eindeutigkeit dieser Lösung folgt, da wir die Gesamtheit aller Lösungen kennen.

(v) Bernoulli-Gleichung (Johann Bernoulli, 1667-1748)

Johann war der jüngere der Brüder Bernoulli. Sein Vater wollte, dass er Kaufmann wird, und, als dies nichts wurde, sollte er Medizin studieren. Er hat bei seinem älteren Bruder Jakob Mathematik studiert.

Johann bearbeitete das Brachistochronen-Problem: Welches ist der Weg, auf dem sich ein Massenpunkt unter Schwerkraft in kürzester Zeit von einem Punkt zum nächsten bewegt. Die zugehörige Differentialgleichung lautet

$$y' = \sqrt{\frac{a-y}{y}}$$

Er fand heraus, dass es sich um eine Zykloide handelt.

$$\begin{aligned} x &= r(\phi - \sin\phi) \\ y &= r(1 - \cos\phi) \end{aligned}$$

Er forderte andere Mathematiker heraus, das Problem zu lösen. Er verriet nur, dass die Lösung eine wohlbekannte Kurve ist. Insbesondere schickte er einen Brief an Newton, weil er vermutete, dass Newton Methoden von Leibniz gestohlen hatte und deshalb wohl nicht in der Lage sei, das Problem zu lösen. Newton erhielt den Brief am 29.1.1697 gegen 16 Uhr und hatte einen anstrengenden Tag hinter sich. Gegen 4 Uhr morgens hatte er das Problem gelöst.

Wegen dieses Vorganges schrieb Leibniz einen Brief an die Royal Society und erklärte, dass er nichts damit zu tun habe.

Die Lösungen des Brachistochronen Problems von Newton, Leibniz, Jakob Bernoulli und Johann Bernoulli sind gemeinsam im Mai 1697 in der Zeitschrift *Acta Eruditorum* veröffentlicht worden.

Man bezeichnet

$$y' + g(x)y + h(x)y^\alpha = 0 \qquad\qquad \alpha \neq 1$$

als Bernoulli-Gleichung, wobei $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind.

Wir lösen dies Gleichung. Wir können diese Gleichung auf eine lineare Differeentialgleichung zurückführen. Man multipliziert die Gleichung mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$.

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)g(x)y^{1-\alpha} + (1-\alpha)h(x) = 0$$

$$(y^{1-\alpha})' + (1-\alpha)g(x)y^{1-\alpha} + (1-\alpha)h(x) = 0$$

Wir setzen $z = y^{1-\alpha}$ und erhalten

$$z' + (1-\alpha)g(x)z + (1-\alpha)h(x) = 0$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

(vi) Riccati-Gleichung (J.F. Riccati, 1676-1754)

Es seien $g, h, k : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Man nennt

$$y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x)$$

eine Riccati-Differentialgleichung. Falls man eine spezielle Lösung der Riccati-Gleichung kennt, so kann man die Riccati-Gleichung in eine Bernoulli-Gleichung überführen: Es sei ϕ eine bekannte Lösung der Riccati-Gleichung. Dann folgt aus

$$\phi' + g\phi + h\phi^2 = k$$
$$y' + gy + hy^2 = k$$

$$(y-\phi)' + g(y-\phi) + h(y^2-\phi^2) = 0$$

Mit

$$y^2 - \phi^2 = (y-\phi)(y+\phi) = (y-\phi)(y-\phi+2\phi)$$

erhalten wir

$$(y-\phi)' + (g+2\phi h)(y-\phi) + h(y-\phi)^2 = 0$$

Dies ist eine Bernoulli-Gleichung.

3. Exakte Differentialgleichungen

Es seien $P, Q : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Man sagt, dass die Differentialgleichung

$$P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

exakt ist, falls es eine Funktion $F : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \qquad\qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

und falls P und Q stetig sind. In diesem Fall lässt sich eine solche Gleichung leicht lösen. Mittels Kettenregel folgt.

$$\frac{dF(x,y(x))}{dx} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Also gilt

$$\frac{dF(x,y(x))}{dx} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad F(x,y(x)) = c$$

D.h. dass y eine implizite Funktion der Gleichung $F(x,y) = c$ ist.

Satz. *Es seien $P, Q : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Die Differentialgleichung*

$$P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

sei auf $(a,b) \times (c,d)$ exakt und F sei eine Stammfunktion. Dann ist y genau dann eine Lösung der Differentialgleichung auf (a,b), wenn es ein c gibt, so dass für alle $x \in (a,b)$

$$F(x,y(x)) = c$$

gilt.

Satz. *Es seien $P, Q : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Die Differentialgleichung*

$$P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

ist genau dann exakt, wenn auf $(a,b) \times (c,d)$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

gilt.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass es eine Stammfunktion F gibt. Aus der Vorlesung *Analysis II* wissen wir, dass für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

gilt. Andererseits gilt

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Wir nehmen nun an, dass $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ gilt. Wir setzen

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(s,t)ds + Q(s,t)dt$$

Zur Wohldefiniertheit dieses Kurvenintegrals muss man zeigen, dass es über geschlossene Wege 0 ist. Nach dem Satz von Green gilt

$$\int_{\partial G} P(s,t)ds + Q(s,t)dt = \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} d(s,t) = 0$$

□

Beispiel. *Die Differentialgleichung*

$$2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

ist exakt und hat

$$y = cx^{-\frac{2}{3}} \qquad c \in \mathbb{R}$$

als Lösungen.

Lösung. Aus

$$P(x,y) = 2xy^3 \qquad Q(x,y) = 3x^2y^2$$

folgt

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy^2$$

Nach Satz existiert eine Stammfunktion F. Für eine solche Stammfunktion muss

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^3 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2$$

Hieraus folgt

$$F(x,y) = x^2y^3 + \phi(y) \qquad F(x,y) = x^2y^3 + \psi(x)$$

gelten, wobei ϕ und ψ differenzierbare Funktionen sind. Damit folgt weiter

$$F(x,y) = x^2y^3 + c$$

Also gilt für die Lösungen $x^2y^3 = c$. Schließlich erhalten wir

$$y = cx^{-\frac{2}{3}} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir, dass dies (sämtliche) Lösungen auf $(0,\infty)$ sind. $\square$

Ist die Differentialgleichung

$$P(x,y)+Q(x,y)\frac{dy}{dx}=0$$

nicht exakt, so kann man versuchen eine Funktion $M(x,y)$ zu finden, so dass

$$M(x,y)P(x,y)+M(x,y)Q(x,y)\frac{dy}{dx}=0$$

exakt ist. Falls M überall von 0 verschieden ist, so gilt genau dann

$$P(x,y)+Q(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \qquad \text{wenn} \qquad M(x,y)P(x,y)+M(x,y)Q(x,y)\frac{dy}{dx}=0$$

und die Lösungen beider Gleichungen sind identisch.

Wir müssen also eine Funktion M finden, so dass

$$\frac{\partial MP}{\partial y}=\frac{\partial MQ}{\partial x}$$

gilt. M heißt integrierender Faktor. Dies kann möglicherweise schwerer sein, als die ursprüngliche Gleichung zu lösen. Man ist auf Intuition und Glück angewiesen. In manchen Fällen gibt es eine solche Funktion, die nur von x abhängt. Dann vereinfacht sich das Problem zu

$$M\frac{\partial P}{\partial y}=Q\frac{dM}{dx}+M\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{dM}{dx}=\frac{M}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

Beispiel. *Die Differentialgleichung*

$$(3xy+y^2)+(x^2+xy)\frac{dy}{dx}=0$$

ist nicht exakt. Ein integrierender Faktor ist $M(x)=x$. Lösungen der Gleichung sind

$$y=-x\pm\sqrt{\frac{2c}{x^2}+x^2} \qquad\qquad x\neq 0, \quad 2c>-x^4$$

Lösung. Aus

$$P(x,y)=3xy+y^2 \qquad\qquad Q(x,y)=x^2+xy$$

folgt

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x+2y \qquad\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x+y$$

Wir suchen nach einem integrierenden Faktor M, der nur von x abhängt.

$$\frac{dM}{dx} = M\frac{(3x+2y)-(2x+y)}{x^2+xy} = M\frac{x+y}{x(x+y)} = \frac{M}{x}$$

Wir lösen die Gleichung und finden, dass $M(x) = x$ eine Lösung ist. Deshalb ist

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)\frac{dy}{dx} = 0$$

eine exakte Gleichung. Wir lösen sie. Es muss gelten

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y + xy^2 \qquad\qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + x^2y$$

Hieraus folgt

$$F(x,y) = x^3y + \tfrac{1}{2}x^2y^2 + \phi(y) \qquad\qquad F(x,y) = x^3y + \tfrac{1}{2}x^2y^2 + \psi(x)$$

Somit erhalten wir

$$F(x,y) = x^3y + \tfrac{1}{2}x^2y^2 + c$$

und die Lösungen erfüllen

$$x^3y + \tfrac{1}{2}x^2y^2 = c$$

$$y^2 + 2xy = \frac{2c}{x^2}$$

$$y = -x \pm \sqrt{\frac{2c}{x^2} + x^2}$$

□

Clairaut und d'Alembert

Alexis C. Clairaut, 1713-1765, wurde in Paris geboren und war das, was man als Wunderkind bezeichnet. Mit zehn Jahren las er l'Hopitals *Analyse des inifiniment petits* und hielt mit 12 Jahren einen Vortrag an der Pariser Akademie der Wissenschaften. Mit 18 wurde er Mitglied der Akademie und forschte dann auf dem Gebiet der Himmelsmechanik. Später interessierte er sich für Pädagogik und schrieb Lehrbücher.

Jean d'Alembert wurde als Kind von seiner Mutter auf den Stufen einer Pariser Kirche ausgesetzt. Sie hatte ihr Gelöbnis als Nonne gebrochen und befürchtete grössere Schwierigkeiten. d'Alembert wurde von einer armen Familie adoptiert, wurde aber von seinem leiblichen Vater finanziell unterstützt. 1738 wurde er Rechtsanwalt, interessierte sich aber für Mathematik. Er studierte Mathematik selbst und veröffentlichte Arbeiten auf den Gebieten Differentialgleichungen und Hydrodynamik. 1741 wurde er Mitglied der Pariser Akademie und wurde einer der führenden Mathematiker seiner Zeit.

In einigen Fällen lässt sich eine Differentialgleichung dadurch lösen, dass man y' als Parameter p einführt und die Lösung in Parameterform $(x(p), y(p))$, $p \in [a, b]$, angibt. Die Differentialgleichung

$$y = xy' + g(y')$$

heisst Clairaut-Differentialgleichung. Wir nehmen hier an, dass $g \in C^1[a, b]$ gilt. Wir lösen diese Differentialgleichung, indem wir $y' = p$ als Parameter einführen. Nach der Kettenregel gilt

$$p = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dp}\frac{dp}{dx} = \frac{\frac{dy}{dp}}{\frac{dx}{dp}}$$

bzw.

$$p\frac{dx}{dp} = \frac{dy}{dp}$$

(Wir nehmen an, dass diese Ausdrücke sinnvoll sind. Wir werden sehen, dass wir mit diesem Ansatz Lösungen erhalten.) Wir haben also

$$\begin{aligned} y(p) &= x(p)p + g(p) \\ p\dot{x} &= \dot{y} \end{aligned}$$

Wir differenzieren die erste Gleichung nach p.

$$\dot{y} = p\dot{x} + x + \dot{g}$$

Wegen $p\dot{x} = \dot{y}$ folgt $x = -\dot{g}$. Somit haben wir, dass

$$\begin{aligned} x(p) &= -\dot{g}(p) \\ y(p) &= -p\dot{g}(p) + g(p) \end{aligned}$$

eine Lösung ist, falls $x(p)$ invertierbar ist, d.h. falls z.B.

$$0 \neq \dot{x}(p) = -\ddot{g}(p)$$

Ausserdem ist auch für alle $c \in [a,b]$ die Funktion

$$y = cx + g(c) \qquad\qquad c \in \mathbb{R}$$

eine Lösung. Dies rechnet man leicht nach. Es handelt sich um eine Schar von Geraden.

Man stellt fest, dass die Lösung in Parameterdarstellung die Enveloppe der Geradenschar ist, d.h. zu jedem Punkt der Lösungskurve gibt es eine Gerade, die in genau dem Punkt die Kurve tangiert.

Die Kurve wird in dem Punkt

$$(x(p), y(p)) = (-\dot{g}(p), -p\dot{g}(p) + g(p))$$

von der Geraden

$$y = px + g(p)$$

tangiert. Die Steigung der Geraden ist p und die Steigung der Kurve im Punkt $(x(p), y(p))$ ebenfalls p, weil $p = \frac{dy}{dx}$ gilt. Ausserdem liegt der Punkt $(x(p), y(p))$ sowohl auf der Kurve, als auch auf der Geraden.

Die Differentialgleichung

$$y = xf(y') + g(y')$$

heisst Differentialgleichung von d'Alembert. Wir nehmen an, dass $f, g \in C^1[a,b]$ gilt. Wir führen $y' = p$ als Parameter ein.

$$\begin{aligned} y(p) &= xf(p) + g(p) \\ \dot{y} &= p\dot{x} \end{aligned}$$

Wir differenzieren die erste Gleichung nach p.

$$\dot{y} = \dot{x}f + x\dot{f} + \dot{g}$$

Wegen $p\dot{x} = \dot{y}$ folgt

$$\dot{x}(p - f) = x\dot{f} + \dot{g}$$

Also gilt

$$\dot{x} = x\frac{\dot{f}(p)}{p - f(p)} + \frac{\dot{g}(p)}{p - f(p)}$$

falls $p \neq f(p)$. Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Wir lösen dies und erhalten damit eine Lösung der d'Alembert-Gleichung in Parameterform. Falls es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(c) = c$ gibt, so ist

$$y = cx + g(c) \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

eine Lösung.

Beispiel. *(i)*

$$y = xy' + e^{y'}$$

ist eine Differentialgleichung von Clairaut.

$$y = cx + e^c \qquad\qquad c \in \mathbb{R}$$

ist die Lösungsschar der Geraden. Die Enveloppe ist

$$y = x(\ln(-x) - 1) \qquad\qquad x < 0$$

(ii)

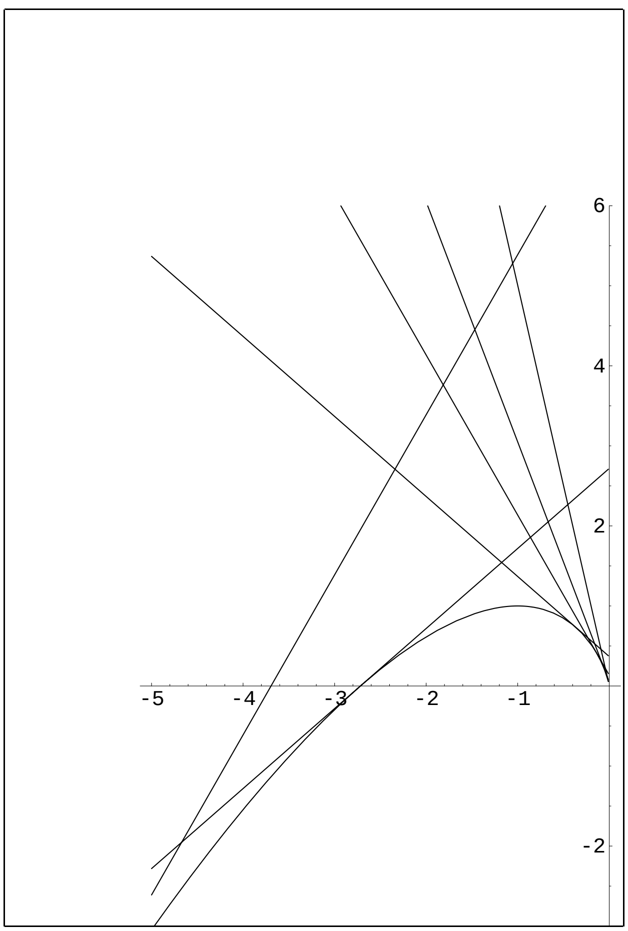
$$y = xy' + \frac{1}{y'}$$

ist eine Differentialgleichung von Clairaut. Die Lösungsschar der Geraden ist

$$y = cx + \frac{1}{c} \qquad\qquad c \in \mathbb{R}$$

und die Enveloppe ist

$$y = \pm 2\sqrt{x} \qquad\qquad x > 0$$



Lösung. (i) Die Lösungsschar der Geraden erhält man unmittelbar, indem man für y' die Konstante c einsetzt.

Die Parameterdarstellung der Enveloppen ist

$$\begin{aligned} x(p) &= -e^p \\ y(p) &= -pe^p + e^p \end{aligned}$$

Es folgt $p = \ln(-x)$ und

$$y = x(\ln(-x) - 1)$$

(ii) Für die Enveloppe erhalten wir

$$\begin{aligned} x(p) &= \frac{1}{p^2} \\ y(p) &= \frac{2}{p} \end{aligned}$$

Damit folgt $y^2 = 4x$. $\square$

Der Satz von Peano

(G. Peano, 1858-1932)

Wir wollen hier untersuchen, unter welchen Voraussetzungen das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y) \qquad\qquad y(x_0) = y_0$$

eine Lösung hat. (Wir nehmen i.a. an, dass f stetig ist.) Wir beobachten, dass y genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems ist, falls

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

gilt. Die Äquivalenz ergibt sich durch einfaches Integrieren bzw. Differenzieren.

Satz. *(Peano) Es sei* $f : [x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion und*

$$M = \max_{\substack{x\in[x_0,x_0+a]\\ y\in[y_0-b,y_0+b]}} |f(x,y)| \qquad\qquad c = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

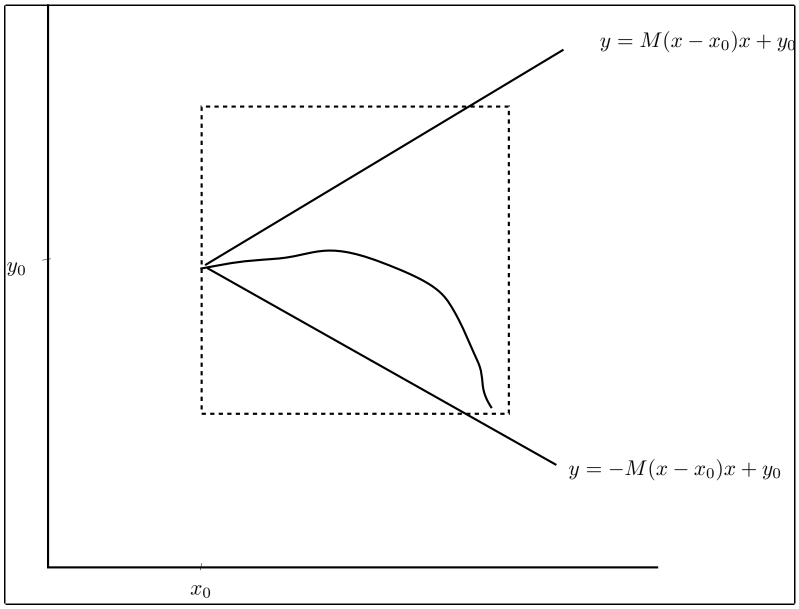
Dann existiert eine Lösung y *des Anfangswertproblems* $y' = f(x,y)$ *mit* $y(x_0) = y_0$*, die auf* $[x_0, x_0 + c]$ *oder einem größeren Intervall definiert ist.*

Satz. *(Peano) Es sei* $f : [x_0, x_0+a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine stetige, beschränkte Funktion und Dann existiert eine Lösung* y *des Anfangswertproblems* $y' = f(x,y)$ *mit* $y(x_0) = y_0$*, die auf* $[x_0, x_0 + a]$ *definiert ist.*

Wir wollen veranschaulichen, weshalb eine Lösung im Intervall $[x_0, x_0 + c]$ mit $c = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ existiert. Wegen $y' = f(x,y)$ gilt in $[x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$

$$|y'(x)| \leq |f(x, y(x))| \leq M$$

Deshalb befindet sich y in dem Keil, der durch die Geraden gebildet wird, deren Steigungen M und $-M$ sind und die sich in (x_0, y_0) schneiden.



Beispiel. *[He, p.69] Das Anfangswertproblem*

$$y' = x^2 + y^2 \qquad\qquad y(0) = 1$$

hat eine Lösung, die auf $[0, \frac{1}{5}]$ *oder einem grösseren Intervall existiert. (Die Lösungen sind nicht durch elementare Funktionen darstellbar.)*

Beweis. Wir schränken f auf $[0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ ein. f ist stetig. Es gilt

$$M = \max_{\substack{x\in[0,\frac{1}{2}]\\ y\in[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]}} |x^2 + y^2| = (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{3}{2})^2 = \frac{5}{2}$$

Damit erhalten wir

$$c = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right\} = \frac{1}{5}$$

□

Beispiel. *(Torricellis Gesetz) [Dr] Wir betrachten einen Behälter, der mit Wasser gefüllt ist und am Boden ein kleines Loch hat. Evangelista Torricelli (1608-1647) fand heraus, dass die Menge des Wassers, das herausläuft, proportional zur Wurzel der Wasserhöhe im Behälter ist.*

$y(t)$ sei die Wasserhöhe zur Zeit t. Dann gilt

$$y' = \begin{cases} -k\sqrt{y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

Bevor sich Torricelli mit dem Problem beschäftigte, glaubte man, dass die Wassermenge proportional zur Höhe y sei.

y' ist die Änderung der Wasserhöhe und damit direkt proportional zur Wassermenge, die aus dem Loch herausläuft.

Lösung. Wir erstellen zunächst die Differentialgleichung. Wir nehmen im weiteren an, dass der Behälter ein Zylinder ist, deren Grundfläche den Flächeninhalt F_Z hat. Das Loch habe den Flächeninhalt F_L.

In einigen Lehrbüchern findet man als Erklärung, dass ein Wassertropfen, der sich imfreien Fall von einer Höhe $y > 0$ befindet, bei der Höhe 0 die Geschwindigkeit $\sqrt{2gy}$ erreicht hat. Man kann aber wohl kaum sagen, dass sich die Wassertropfen im freien Fall befinden.

Wir nehmen an, dass sich das Wasser nicht bewegt, die kinetische Energie des Wasser also 0 ist und damit die Bewegungsenergie des Wasser demnach gleich der potentiellen Energie ist. Die potentielle Energie eines Moleküls ist gleich mgh, wobei h der Abstand des Moleküls vom Boden ist.

Der Energieverlust, in dem Fall, dass wir einen Tropfen von der Wasseroberfläche entfernen, sollte derselbe sein, falls ein Wassertropfen aus dem Loch austritt. Die Energie eines Tropfens auf der Wasseroberfläche ist gleich der potentiellen Energie mgy. Die Energie eines Tropfen, der aus dem Loch austritt, ist gleich der kinetischen Energie $\frac{1}{2}mv^2$. Also gilt

$$v = \sqrt{2gy}$$

Dieses Argument ist nicht richtig, wenn das Loch groß ist. In diesem Fall tritt im Wasser eine Strömung auf und die kinetische Energie, der Moleküle im Behälter ist nicht mehr 0.

Es sei Δy die Änderung der Wasserhöhe in der Zeit Δt (beachte, dass $\Delta y < 0$). Dann gilt für den Wasserverlust im Zylinder

$$F_Z \cdot \Delta y \sim -F_L v \Delta t = -F_L \sqrt{2gy}\Delta t$$

Also gilt

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{F_L}{F_Z}\sqrt{2gy}$$

Wir erhalten

$$\sqrt{2gy(t)} - \sqrt{2gy(t_0)} = -\frac{F_L}{F_Z}(t - t_0)$$

falls $y(t) > 0$ und damit

$$y(t) = \left(\sqrt{y(t_0)} - \frac{F_L}{\sqrt{2g}F_Z}(t - t_0)\right)^2$$

Als Lösung erhält man für den Anfangswert $y(0) = y_0 > 0$

$$y(t) = \begin{cases} \left(\sqrt{y_0} - \frac{k}{2}t\right)^2 & 0 \le t \le \frac{2}{k}\sqrt{y_0} \\ 0 & \frac{2}{k}\sqrt{y_0} < t \end{cases}$$

Für den Anfangswert $y(t_0) = 0$ erhalten wir viele Lösungen. Für jedes t_1 mit $t_1 \leq t_0$ ist

$$y(t) = \begin{cases} \left(\frac{k}{2}t_1 - \frac{k}{2}t\right)^2 & t < t_1 \\ 0 & t \geq t_1 \end{cases}$$

eine Lösung. □

Ein metrischer Raum (X, d) ist eine Menge X mit einer Metrik d.

(i) $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0$

(ii) $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$

(iv) $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ein metrischer Raum heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge konvergiert. Falls X ein Vektorraum mit einer Norm $\| \ \|$ ist, so ist X bzgl $d(x, y) = \|x - y\|$ ein metrischer Raum. Falls ein Vektorraum bzgl. dieser Metrik vollständig ist, so heisst er Banachraum. Wir sagen auch, dass der Vektorraum bzgl. der Norm vollständig ist.

Eine Teilmenge Y eines metrischen Raumes X ist mit der gegebenen Metrik d wiederum ein metrischer Raum. Eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raumes ist wiederum vollständig.

Lemma. *(i) $C[a, b]$ ist bzgl. der Norm*

$$\|\phi\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |\phi(x)|$$

ein Banachraum.

(ii) Es sei $x_0 \in [a, b]$ und $y_0 \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\{\phi \in C[a, b] |\ \phi(x_0) = y_0 \text{ und } |\phi(x) - y_0| \leq M\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $C[a, b]$ und damit ein vollständiger, metrischer Raum bzgl. $d(\phi, \psi) = \|\phi - \psi\|_\infty$.

Beweis. (i) Wir müssen zeigen, dass $C[a, b]$ vollständig ist. Es sei ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge in $C[a, b]$.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, m > N : d(\phi_n, \phi_m) < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, m > N : \max_{x \in [a,b]} |\phi_n(x) - \phi_m(x)| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \forall x \in [a, b] : |\phi_n(x) - \phi_m(x)| < \epsilon$$

Insbesondere ist $\phi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, für jedes x eine Cauchy-Folge und konvergiert deshalb gegen einen Wert $\phi(x)$.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in [a, b] \forall m > N : |\phi_n(x) - \phi_m(x)| < \epsilon$$

Es folgt

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in [a,b] : |\phi_n(x) - \phi(x)| < \epsilon$$

Da die Funktionen ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$, stetig sind und gleichmäßig gegen ϕ konvergieren, so ist nach *Analysis I,II* auch stetig und damit $\phi \in C[a,b]$.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall : d(\phi_n(x), \phi(x)) < \epsilon$$

□

Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Abbildung. Ein Punkt $z \in X$ heißt Fixpunkt von T, falls T(z)=z.

Eine Lösung des Anfangswertproblems ist also ein Fixpunkt der Abbildung $T : C[x_0, x_0 + c] \to C[x_0, x_0 + c]$

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) dt$$

Ein metrischer Raum (X,d) heisst total beschränkt, falls es für alle $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge E von X gibt, so dass für alle $x \in X$ ein $y \in E$ mit $d(x,y) < \epsilon$ existiert.

Lemma. *Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:*
(i) (X,d) ist kompakt.
(ii) (X,d) ist vollständig und total beschränkt.
(iii) Jede Folge hat eine konvergente Teilfolge.

Eine Teilmenge K eines Vektorraumes heisst konvex, falls für alle $x, y \in K$ und alle λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in K$$

gilt. Hieraus folgt durch Induktion, dass für alle $x_1, \ldots, x_n \in K$ und alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in K$$

gilt.

Die konvexe Hülle einer Menge M ist der Durchschnitt aller konvexen Mengen, die die Menge M als Teilmenge enthalten. Falls M eine endliche Menge ist, d.h. $M = \{x_1, \ldots, x_m\}$, dann schreiben wir für die konvexe Hülle $[x_1, \ldots, x_m]$.

Lemma. *(Fixpunktsatz von Brouwer) Es sei $B_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\}$ und $T : B_2^n \to B_2^n$ sei stetig. Dann besitzt T mindestens einen Fixpunkt.*

Lemma. *Es sei K eine konvexe, kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $T : K \to K$ sei stetig. Dann besitzt T mindestens einen Fixpunkt.*

Lemma. *Es sei E ein n-dimensionaler, reeller Vektorraum. Dann gibt es eine lineare Abbildung $A : E \to \mathbb{R}^n$, die bijetiv und stetig ist und deren Inverse ebenfalls stetig ist.*

Jede lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen ist stetig.

Satz. *(Fixpunktsatz von Schauder) Es sei E ein normierter Vektorraum, K eine konvexe Teilmenge von E und C eine nicht-leere, kompakte Teilmenge von K. Dann besitzt jede stetige Abbildung $f : K \to C$ mindestens einen Fixpunkt.*

Juliusz Schauder, 1899-1943, polnischer Mathematiker. Er wurde 1943 von der deutschen Besatzung in Polen ermordet.

Der Beweis ist eine Reduktion des unendlich-dimensionalen Falles auf den endlich-dimensionalen Fall. Im Beweis approximieren wir eine kompakte Menge durch eine endlich-dimensionale.

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$. Dann ist

$$B(x, \epsilon) = \{y \| \|x - y\| < \epsilon\} \qquad\qquad x \in C$$

eine offene Überdeckung von C. Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$B(x_i, \epsilon) \qquad\qquad i = 1, \dots, m$$

von C. Wir definieren $\phi_i : C \to \mathbb{R}$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \epsilon - \|x - x_i\| & \text{falls} \quad x \in C \quad \text{und} \quad \|x - x_i\| < \epsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt für alle $x \in C$

$$\phi_i(x) \geq 0 \qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} \phi_i(x) > 0$$

und die Funktionen ϕ_i, $i = 1, \dots, m$, sind stetig. Wir setzen nun $\psi_i : C \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$

$$\psi_i(x) = \frac{\phi_i(x)}{\sum_{i=1}^{m} \phi_i(x)}$$

Dann gilt $\psi_i(x) \geq 0$ und

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_i(x) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \phi_i(x)}{\sum_{i=1}^{m} \phi_i(x)} = 1$$

Wir definieren $g : C \to [x_1, \ldots, x_m]$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} \psi_i(x) x_i$$

g ist wohldefiniert, weil $\sum_{i=1}^{m} \psi_i(x) x_i \in [x_1, \ldots, x_m]$. Dies folgt aus der Konvexität von $[x_1, \ldots, x_m]$.

Wir zeigen nun, dass für alle $x \in C$

$$\|g(x) - x\| < \epsilon$$

gilt.

$$\begin{aligned} \|g(x) - x\| &= \left\| \sum_{i=1}^{m} \psi_i(x) x_i - x \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{m} \psi_i(x) x_i - \sum_{i=1}^{m} \psi_i(x) x \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} \psi_i(x)(x_i - x) \right\| \end{aligned}$$

Da $\psi_i(x) = 0$ für x mit $\|x_i - x\| \geq \epsilon$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} \|g(x) - x\| &= \left\| \sum_{\{i | \|x_i - x\| < \epsilon\}} \psi_i(x)(x_i - x) \right\| \\ &\leq \sum_{\{i | \|x_i - x\| < \epsilon\}} \psi_i(x) \|x_i - x\| < \epsilon \sum_{i=1}^{m} \psi_i(x) = \epsilon \end{aligned}$$

Wir betrachten nun $g \circ f : K \to [x_1, \ldots, x_m]$ und schränken sie auf $[x_1, \ldots, x_m]$ ein $g \circ f_{|[x_1,\ldots,x_m]} : [x_1, \ldots, x_m] \to [x_1, \ldots, x_m]$. $g \circ f_{|[x_1,\ldots,x_m]}$ ist eine stetige Abbildung der konvexen Menge in sich. $[x_1, \ldots, x_m]$ ist Teilmenge der linearen Hülle $\mathrm{LH}(x_1, \ldots, x_m)$. Die lineare Hülle ist ein n-dimensionaler Teilraum von E, $n \leq m$. Nach Lemma gibt es eine lineare, stetige Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathrm{LH}(x_1, \ldots, x_m)$, deren Inverse existiert und stetig ist. Die Menge $T^{-1}([x_1, \ldots, x_m])$ ist konvex, weil T eine lineare Abbildung ist.

$$T^{-1} \circ g \circ f_{|[x_1,\ldots,x_m]} \circ T : T^{-1}([x_1, \ldots, x_m]) \to T^{-1}([x_1, \ldots, x_m])$$

ist eine stetige Abbildung einer kompakten, konvexen Menge vom $\mathbb{R}^n$ auf sich. Nach Lemma hat diese Abbildung einen Fixpunkt z.

$$T^{-1} \circ g \circ f_{|[x_1,\ldots,x_m]} \circ T(z) = z$$

$$g \circ f_{|[x_1,\ldots,x_m]} \circ T(z) = T(z)$$

Somit ist $w = T(z)$ ein Fixpunkt von $g \circ f_{|[x_1,\ldots,x_m]}$. Wie erhalten

$$\|f(w) - w\| = \|f(w) - g(f(w))\| < \epsilon$$

Es folgt

$$\forall \epsilon > 0 \exists w_\epsilon \in K : \|f(w_\epsilon) - w_\epsilon\| < \epsilon$$

Insbesondere gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists w_n \in K : \|f(w_n) - w_n\| < \frac{1}{n}$$

Da f von K nach C abbildet, ist $f(w_n)$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge in der kompakten Menge C. Damit existiert eine konvergente Teilfolge $f(w_{n_k})$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{k \to \infty} f(w_{n_k}) = u$$

Weiter gilt

$$\|u - w_{n_k}\| = \|u - f(w_{n_k}) + f(w_{n_k}) - w_{n_k}\| \leq \|u - f(w_{n_k})\| + \|f(w_{n_k}) - w_{n_k}\|$$

Der zweite Summand ist kleiner als $\frac{1}{n_k}$. Der erste Summand wird wegen $\lim_{k \to \infty} f(w_{n_k}) = u$ beliebig klein. Es folgt, dass $\lim_{k \to \infty} w_{n_k} = u$. Hieraus folgt

$$u = \lim_{k \to \infty} f(w_{n_k}) = f(\lim_{k \to \infty} w_{n_k}) = f(u)$$

Also hat f einen Fixpunkt $u \in C$. $\square$

Eine Menge $\mathcal{F}$ von Funktionen von einem metrischen Raum (X, d) in einen metrischen Raum (Y, d) heisst gleichstetig, falls für alle $x \in X$ und alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle y mit $d(x, y) < \delta$ und alle $f \in \mathcal{F}$

$$d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

gilt $(\forall x \in X \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in X, d(x, y) < \delta, \forall f \in \mathcal{F} : d(f(x), f(y)) < \epsilon)$.

Wir sagen, dass $\mathcal{F}$ gleichmässig gleichstetig ist, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle x, y mit $d(x, y) < \delta$ und alle $f \in \mathcal{F}$

$$d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

gilt $(\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X, d(x, y) < \delta, \forall f \in \mathcal{F} : d(f(x), f(y)) < \epsilon)$. Man bezeichnet eine Menge, die gleichmässig gleichstetig ist als gleichgradig stetig.

Beispiel. *Es sei $f_n : [0, 1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Die Menge f_n, $n \in \mathbb{N}$, ist gleichstetig, aber nicht gleichmässig gleichstetig.*

Satz. *Es sei (X, d) ein kampakter, metrischer Raum und (Y, d) ein metrischer Raum. Dann ist eine Menge $\mathcal{F}$ von Funktionen von X nach Y genau dann gleichstetig, wenn sie gleichmässig gleichstetig ist.*

Beweis. Aus der gleichmässigen Gleichstetigkeit folgt offenbar die Gleichstetigkeit. Wir zeigen nun die Umkehrung. Wir nehmen an, dass die Implikation falsch ist, dass also eine gleichstetige Menge $\mathcal{F}$ existiert, die nicht gleichmässig gleichstetig ist. Die gleichmässige Gleichstetigkeit bedeutet

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y, d(x, y) < \delta \forall f \in \mathcal{F} : d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

Die Verneinung hiervon ist

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y, d(x,y) < \delta \exists f \in F : d(f(x), f(y)) \geq \epsilon$$

Insbesondere gilt

$$\exists \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, y_n, d(x_n, y_n) < \tfrac{1}{n} \exists f_n \in F : d(f_n(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$$

Da X kompakt ist, hat die Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine konvergente Teilfolge.

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x$$

Damit folgt auch

$$\lim_{k \to \infty} y_{n_k} = x$$

Weiter gilt

$$\exists \epsilon > 0 \forall k \in \mathbb{N} \exists x_{n_k}, y_{n_k}, d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \tfrac{1}{n_k} \exists f_{n_k} \in F : d(f_{n_k}(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \epsilon$$

Nach Voraussetzung ist $\mathcal{F}$ gleichstetig.

$$\forall \epsilon > 0 \forall z \in X \exists \delta > 0 \forall y \in X, d(z,y) < \delta, \forall f \in \mathcal{F} : d(f(z), f(y)) < \epsilon$$

Wir wählen $z = x$. Dann gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \forall k > k_\epsilon \forall f \in \mathcal{F} : d(f(x), f(x_{n_k})) < \epsilon \quad \text{und} \quad d(f(x), f(y_{n_k})) < \epsilon$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \forall k > k_\epsilon \forall f \in \mathcal{F} : d(f(y_{n_k}), f(x_{n_k})) < 2\epsilon$$

□

Satz. *(Arzela-Ascoli) Es sei (X,d) ein kompakter, metrischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Teilmenge von $C(X)$. $\mathcal{F}$ ist genau dann total beschränkt, wenn $\mathcal{F}$ in $C(X)$ beschränkt und gleichstetig ist.*

Beispiel. *Es sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Menge f_n, $n \in \mathbb{N}$, nicht in $C[0,1]$ total beschränkt und damit nicht kompakt.*

Beweis von Beispiel. Wir zeigen, dass f_n, $n \in \mathbb{N}$, nicht gleichstetig sind. Gleichstetigkeit bedeutet

$$\forall x \in [0,1] \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in [0,1], |x-y| < \delta, \forall n \in \mathbb{N} : |x^n - y^n| < \epsilon$$

Die Negation ist

$$\exists x \in [0,1] \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists y \in [0,1], |x-y| < \delta, \exists n \in \mathbb{N} : |x^n - y^n| \geq \epsilon$$

Wir wählen

$$x = 1 \qquad \epsilon = \tfrac{1}{2} \qquad y = 1 - \tfrac{1}{2}\delta \qquad n > \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln(1 - \frac{1}{2}\delta)}$$

Damit gilt

$$|x^n - y^n| = |1 - (1 - \tfrac{1}{2}\delta)^n|$$

Wenn wir für n eine kleinere, positive Zahl einsetzen, dann wird der Ausdruck kleiner. Wir setzen nun für n die Zahl

$$\frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln(1 - \frac{1}{2}\delta)}$$

ein und erhalten

$$|x^n - y^n| \geq \left| 1 - (1 - \tfrac{1}{2}\delta)^{\frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln(1-\frac{1}{2}\delta)}} \right| = |1 - e^{\ln \frac{1}{2}}| = \tfrac{1}{2}$$

□

Beweis vom Satz von Peano. Es sei $T : C[x_0, x_0 + c] \to C[x_0, x_0 + c]$

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

und

$$X = \{y \in C[x_0, x_0 + c] | \forall x \in [x_0, x_0 + c] : |y(x) - y_0| \leq b\}$$

X ist eine konvexe Menge und $T(X) \subseteq X$. $T(X)$ ist gleichstetig.

$$|Ty(x) - Ty(z)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt - \int_{x_0}^{z} f(t, y(t))dt \right| \leq \int_{z}^{x} |f(t, y(t))|dt \leq M|x - z|$$

Es gilt

$$|Ty(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \right| \leq M|x - x_0| \leq Mc \leq b$$

Mit dem Satz von Arzela-Ascoli folgt, dass $T(X)$ total beschränkt und damit $\overline{T(X)}$ kompakt ist.

Mit dem Fixpunktsatz von Schauder folgt, dass es ein $y \in X$ gibt, so dass

$$Ty = y$$

□

6. Der Satz von Picard-Lindelöf und der Fixpunktsatz von Banach

Wir wollen hier untersuchen, unter welchen Voraussetzungen das Anfangswertproblem
$$y' = f(x,y) \qquad\qquad y(x_0) = y_0$$
eine Lösung hat und wann sie eindeutig ist. (Wir nehmen i.a. an, dass f stetig ist.) Wir beobachten, dass y genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems ist, falls
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$
gilt. Die Äquivalenz ergibt sich durch einfaches Integrieren bzw. Differenzieren.

Die Picard-Iteration ist die Folge
$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 \\ y_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt \qquad\qquad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$
Es stellt sich heraus, dass diese Folge unter bestimmten Voraussetzungen gegen die Lösung konvergiert.

Beispiel.
$$y' = y \qquad\qquad y(0) = 1$$

Wir wissen natürlich, dass $y = e^x$ die Lösung ist. Wir wollen hier aber die Picard-Iteration studieren.
$$\begin{aligned} y_0(x) &= y(0) = 1 \\ y_1(x) &= 1 + \int_0^x dt = 1 + x \\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x 1 + tdt = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 \\ y_3(x) &= 1 + \int_0^x 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 \end{aligned}$$
Durch Induktion erhält man für die n-te Iteration
$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} \qquad\qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
Diese Folge konvergiert punktweise gegen die e-Funktion.

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $T : X \to X$ heißt Kontraktion, falls es ein Θ mit $0 \le \Theta < 1$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$
$$d(T(x), T(y)) \le \Theta d(x, y)$$
gilt.

Satz. *(Fixpunktsatz von Banach) Es sei (X, d) ein vollständiger, metrischer Raum und T eine Kontraktion auf X. Dann gibt es genau einen Fixpunkt von T.*

Beweis. Wir wählen ein beliebiges $x_0 \in X$ und bilden die folgende Iteration

$$x_{n+1} = T(x_n) \qquad\qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wir zeigen, dass die Folge eine Cauchy-Folge ist, deren Grenzwert ein Fixpunkt von T ist. Es gilt

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq \Theta d(x_n, x_{n-1})$$

Mit Induktion zeigen wir

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \Theta^n d(x_1, x_0)$$

Für $m > n$ erhalten wir mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \Theta^k d(x_1, x_0) \\ &\leq \Theta^n d(x_1, x_0) \sum_{k=0}^{m-1-n} \Theta^k \leq \Theta^n d(x_1, x_0) \sum_{k=0}^{\infty} \Theta^k = d(x_1, x_0) \frac{\Theta^n}{1 - \Theta} \end{aligned}$$

Also ist x_n, $n \in \mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge. Sie konvergiert gegen einen Punkt z, weil (X, d) vollständig ist.

Wir zeigen, dass z ein Fixpunkt ist. Mit der Stetigkeit von T folgt

$$z = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} T(x_{n-1}) = T(\lim_{n \to \infty} x_{n-1}) = T(z)$$

Wir zeigen, dass z der einzige Fixpunkt ist. Wir nehmen an, dass es zwei verschiedene z und y gibt. Dann gilt

$$d(y, z) = d(T(y), T(z)) \leq \Theta d(y, z)$$

Da $\Theta < 1$ gilt, folgt $d(y, z) = 0$ und damit $y = z$. $\square$

Der Beweis liefert auch eine Fehlerabschätzung

$$d(z, x_n) \leq d(x_1, x_0) \frac{\Theta^n}{1 - \Theta}$$

Beispiel. *(i) Es sei (X,d) ein metrischer Raum und id die identische Abbildung von X auf sich. Dann ist jeder Punkt aus X ein Fixpunkt. id ist keine Kontraktion.*
(ii) Es sei $(\mathbb{R},d)$ mit $d(x,y)=|x-y|$ und $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $T(x)=\frac{1}{2}x+1$. T hat den Fixpunkt 2 und T ist eine Kontraktion. Nach dem Fixpunktsatz gilt für alle $x\in\mathbb{R}$

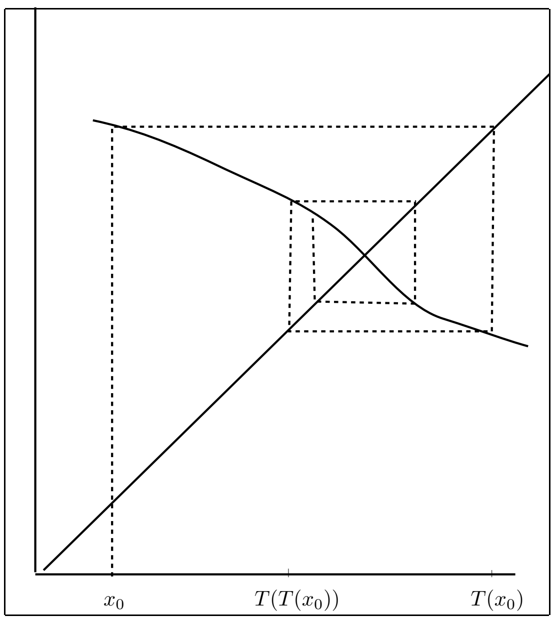
$$\lim_{n\to\infty} T^n x = 2$$

(iii) Es sei $([0,\frac{1}{2}],d)$ mit $d(x,y)=|x-y|$ und $T:[0,\frac{1}{2}]\to[0,\frac{1}{2}]$ mit $T(x)=x^2$. T ist keine Kontraktion und hat den eindeutigen Fixpunkt 0. Für alle $x\in[0,\frac{1}{2}]$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = 0$$

(iv) Graphische Darstellung des Iterationsverfahrens

Es sei x ein Fixpunkt von $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dann ist x Schnittpunkt des Graphen von T mit der Geraden $y=x$.



Beweis. (iii) Wir zeigen, dass T keine Kontraktion ist. Falls T eine Kontraktion wäre, dann gäbe es ein Θ mit $0\le\Theta<1$, so dass für alle x,y mit $0\le x,y\le\frac{1}{2}$

$$|x^2-y^2|\le\Theta|x-y|$$

Es folgt

$$|x+y|\le\Theta$$

Wir wählen $x=\frac{1}{2}$ und $y=\frac{1}{2}$. Wir erhalten $1\le\Theta$. Dies ist ein Widerspruch. $\square$

Beispiel.

$$C = \{f \in C[0,1] | f(0) = 0, f(1) = 1, 0 \leq f(t) \leq 1\}$$

mit der Metrik

$$d(f,g) = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|$$

Die Abbildung $T : C \to C$ sei durch

$$Tf(t) = t \cdot f(t)$$

definiert. T besitzt keinen Fixpunkt, aber es gilt für alle f, g mit $f \neq g$

$$d(T(f), T(g)) < d(f,g)$$

Beweis. Wir nehmen an, dass T einen Fixpunkt f hat. Dann gilt für alle $t \in [0,1]$ die Gleichung $f(t) = tf(t)$. Für $t < 1$ folgt, dass $f(t) = 0$. Da andererseits $f(1) = 1$ gilt, ist f unstetig. Dies ist ein Widerspruch.

Wir zeigen nun, dass $d(T(f), T(g)) < d(f,g)$ gilt.

$$d(T(f), T(g)) = \max_{0 \leq t \leq 1} t|f(t) - g(t)|$$

Die Funktion $t|f(t) - g(t)|$ ist stetig und nimmt deshalb ihr Maximum auf $[0,1]$ an. Falls dies für $t = 1$ angenommen wird, erhalten wir wegen $f(1) = g(1) = 1$, dass $d(T(f), T(g)) = 0$. Wenn dies für ein $t < 1$ angenommen wird

$$d(T(f), T(g)) = \max_{0 \leq t \leq 1} t|f(t) - g(t)| \leq td(f,g)$$

□

Beispiel. *Es sei C eine abgeschlossene, beschränkte, konvexe Menge und $T : C \to C$ eine Abbildung, deren Lipschitzkonstante gleich 1 ist. Dann besitzt T eine approximativen Fixpunkt*

$$\inf\{\|T(x) - x\| | x \in C\} = 0$$

Man kann auf die Voraussetzng, dass C beschränkt ist, nicht verzichten, Dazu betrachten man die reellen Zahlen mit der positiven Halbachse als C und $T(t) = t+1$.

Beispiel. *(i) (Heron von Alexandrien) Wir setzen $a_1 = 1$ und für $n \geq 1$*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$$

(ii) (Newton Iteration) Es sei $x > 0$. Wir setzen $a_1 = 1$ und für $n \geq 1$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x}$$

und für alle $n = 2, 3, \ldots$ gilt

$$a_n \leq \sqrt{x} \leq \frac{x}{a_n}$$

Satz. *(Picard-Lindelöf) Es sei* $f : [x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \to \mathbb{R}$ *stetig und es sei* $L > 0$*, so dass für alle* $x \in [x_0, x_0 + a]$ *und alle* $y_1, y_2 \in [y_0 - b, y_0 + b]$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

gilt. Dann hat das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \qquad\qquad y(x_0) = y_0$$

genau eine Lösung, die auf $[x_0, x_0 + c]$ *mit* $c = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ *und*

$$M = \max_{\substack{x\in[x_0,x_0+a] \\ y\in[y_0-b,y_0+b]}} |f(x, y)|$$

oder einem größeren Intervall existiert.

Falls eine Funktion die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, so sagt man auch, dass sie einer Lipschitzbedingung genügt. Die Konstante L bezeichnet man als Lipschitzkonstante.

Korollar. *Es sei* $f : [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig und es sei* $L > 0$*, so dass für alle* $x \in [x_0, x_0 + a]$ *und alle* $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

gilt. Dann hat das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \qquad\qquad y(x_0) = y_0$$

genau eine Lösung, die auf $[x_0, x_0 + a]$ *existiert.*

Beweis von Korollar. Es gilt

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|$$

Wir setzen $z = 0$

$$|f(x, y) - f(x, 0)| \leq L|y|$$

Deshalb gilt für alle $y \in \mathbb{R}$

$$|f(x, y)| \leq L|y| + \max_{x\in[x_0,x_0+a]} |f(x, 0)|$$

Deshalb gilt für alle y_0 und alle b

$$M = \max_{\substack{x\in[x_0,x_0+a] \\ y\in[y_0-b,y_0+b]}} |f(x, y)| \leq L(|y_0| + b) + \max_{x\in[x_0,x_0+a]} |f(x, 0)|$$

und wir erhalten

$$\frac{b}{M} \leq \frac{b}{L(|y_0| + b) + \max_{x\in[x_0,x_0+a]} |f(x, 0)|}$$

Wir können nun b so groß wählen, dass

$$\frac{b}{M} \geq \frac{1}{4L}$$

Falls $a \leq \frac{1}{4L}$, dann sind wir fertig. Falls nicht, dann teilen wir das Intervall $[x_0, x_0 + a]$ in endlich viele Teilintervalle ein, deren Länge $\frac{1}{4L}$ nicht überschreitet und wenden den Satz von Picard-Lindelöf auf jedes Teilintervall an und setzen eine Lösung zusammen. □

Beweis. Wir führen hier den Beweis nur für das Ergebnis mit $c = \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$. Wir gehen später auf die Verfeinerungen unserer Argumente ein, die zu $c = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ führen.

y ist eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$ und $y(x_0) = y_0$, falls y stetig ist und

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

gilt. $f(t, y(t))$ ist stetig, weil y und f stetig sind. Also lässt sich der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden. Es sei der metrische Raum (X, d) durch

$$\begin{aligned} X &= \{\phi \in C[x_0, x_0 + c] | \phi(x_0) = y_0 \quad \text{und} \quad |\phi(x) - y_0| \leq b\} \\ d(\phi, \psi) &= \|\phi - \psi\|_\infty = \sup_{x \in [x_0, x_0 + c]} |\phi(x) - \psi(x)| \end{aligned}$$

gegeben. Nach Lemma ist (X, d) ein vollständiger, metrischer Raum. Wir zeigen nun, dass $T : X \to X$

$$(T\phi)x = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt$$

eine wohldefinierte Kontraktion ist. Zur Wohldefiniertheit zeigen wir zuerst, dass $T\phi$ stetig ist.

$$|T\phi(x_1) - T\phi(x_2)| = \left| \int_{x_2}^{x_1} f(t, \phi(t))dt \right| \leq \int_{x_2}^{x_1} |f(t, \phi(t))|dt \leq M|x_1 - x_2|$$

Ausserdem gilt

$$(T\phi)x_0 = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, \phi(t))dt = y_0$$

und für alle $x \in [x_0, x_0 + c]$

$$|(T\phi)x - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \phi(t))|dt \leq M|x - x_0| \leq Mc \leq b$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass $T(\phi) \in X$. Wir zeigen nun, dass T eine Kontraktion ist.

$$\begin{aligned}
d(T\phi_1, T\phi_2) &= \sup_{x\in[x_0,x_0+c]} |(T\phi_1)x - (T\phi_2)x| \\
&= \sup_{x\in[x_0,x_0+c]} \left| \int_{x_0}^{x} f(t,\phi_1(t)) - f(t,\phi_2(t))dt \right| \\
&= \sup_{x\in[x_0,x_0+c]} \int_{x_0}^{x} |f(t,\phi_1(t)) - f(t,\phi_2(t))|dt \\
&\leq \sup_{x\in[x_0,x_0+c]} \int_{x_0}^{x} L|\phi_1(t) - \phi_2(t)|dt \\
&\leq \sup_{x\in[x_0,x_0+c]} \int_{x_0}^{x} L \sup_{t\in[x_0,x_0+c]} |\phi_1(t) - \phi_2(t)|dt = Lcd(\phi_1,\phi_2)
\end{aligned}$$

T ist also eine Kontraktion, falls $Lc < 1$ gilt. Wir wählen c also, so dass $(L+\epsilon)c = 1$. Nach dem Fixpunktsatz von Banach existiert die Lösung auf dem Intervall

$$\left[x_0, x_0 + \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L+\epsilon}\right\}\right]$$

Da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt und die Lösungen eindeutig sind, erhalten wir eine Lösung, die auf

$$\left[x_0, x_0 + \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}\right)$$

existiert. Wir setzen nun $c = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}$ und definieren $y(c)$ durch

$$y_0 + \int_{x_0}^{x_0+c} f(t,y(t))dt$$

□

Als Fehlerabschätzung in Banachs Fixpunktsatz erhielten wir

$$d(y,y_n) \leq d(y_1,y_0)\frac{\Theta^n}{1-\Theta}$$

Dies bedeutet für das Anfangswertproblem mit c, so dass $Lc < 1$

$$\max_{x\in[x_0,x_0+c]} |y(x) - y_n(x)| \leq \frac{(Lc)^n}{1-Lc} \max_{x\in[x_0,x_0+c]} |y_1(x) - y_0(x)|$$

Bemerkung Wir wollen beschreiben, welche Verfeinerungen unserer Argumente im Beweis zu Satz $c = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ an Stelle von $c = \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$ liefern.

1. Wir zerlegen das Intervall in kleinere Intervalle der Länge $\frac{a}{k}$, so dass $\frac{a}{k} \leq \frac{1}{L}$ gilt.

$$[x_0, x_0+a] = [x_0, x_0+\tfrac{a}{k}] \cup [x_0+\tfrac{a}{k}, x_0+2\tfrac{a}{k}] \cup \cdots \cup [x_0+\tfrac{k-1}{k}a, x_0+a]$$

Wir finden auf jedem Intervall eine Lösung und setzen diese zu einer Lösung auf dem Gesamtintervall zusammen.

2. Eleganter aber weniger offensichtlich ist die folgende Methode. Statt der Norm

$$\|\phi\|_\infty = \max_{x\in[x_0,x_0+a]} |\phi(x)|$$

benutzen wir die gewichtete Norm

$$\|\phi\|_{\infty,\beta} = \max_{x\in[x_0,x_0+a]} |\phi(x)e^{-\beta x}|$$

Wir erhalten hiermit

$$\begin{aligned}
d(T\phi, T\psi) &= \max_{x\in[x_0,x_0+a]} |(T\phi(x) - T\psi(x))e^{-\beta x}| \\
&\leq \max_{x\in[x_0,x_0+a]} e^{-\beta x} \int_{x_0}^{x} |f(t,\phi(t)) - f(t,\psi(t))|dt \\
&\leq \max_{x\in[x_0,x_0+a]} e^{-\beta x} L \int_{x_0}^{x} |\phi(t) - \psi(t)|dt \\
&\leq \max_{x\in[x_0,x_0+a]} e^{-\beta x} L \int_{x_0}^{x} |\phi(t) - \psi(t)|e^{-\beta t} e^{\beta t} dt \\
&\leq \max_{x\in[x_0,x_0+a]} e^{-\beta x} L \int_{x_0}^{x} \max_{t\in[x_0,x_0+a]} |(\phi(t) - \psi(t))e^{-\beta t}| e^{\beta t} dt \\
&= Ld(\phi,\psi) \max_{x\in[x_0,x_0+a]} e^{-\beta x} \int_{x_0}^{x} e^{\beta t} dt \\
&= Ld(\phi,\psi) \max_{x\in[x_0,x_0+a]} e^{-\beta x} \left(\frac{1}{\beta} e^{\beta x} - \frac{1}{\beta} e^{\beta x_0} \right) \\
&\leq Ld(\phi,\psi) \frac{1}{\beta}
\end{aligned}$$

Wir wählen $\beta = 2L$ und erhalten

$$d(T\phi, T\psi) \leq \tfrac{1}{2} d(\phi,\psi)$$

3. Es besteht auch die Möglichkeit, von einer Variation des Fixpunktsatzes von Banach auszugehen [Wei].

Es sei Y eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes X mit Norm $\| \ \|$. Es sei $\sum a_n$ eine konvergente Reihe positiver Zahlen und $T : Y \to Y$ sei eine Abbildung, so dass für alle $x, y \in Y$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|T^n x - T^n\| \leq a_n \|x - y\|$$

gilt. Dann besitzt T genau einen Fixpunkt x. Für alle $y \in Y$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} T^n y = x$$

und

$$\|x - T^n y\| \le \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_n\right) \|Ty - x\|$$

In diesem Fall erhält man für die Picard-Iteration die folgende Fehlerabschätzung.

$$|y(x) - y_n(x)| \le \frac{(cL)^n}{n!} e^{cL} \max_{x \in [x_0, x_0+c]} |y_1(x) - y_0(x)|$$

wobei $c = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Es reichen auch schwächere Bedingungen als die Lipschitzbedingung, um die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung sicherzustellen.

Satz. *(Satz von Nagumo) Es sei $f : [0, a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass für alle $x \in [0, a]$ und alle $y, z \in \mathbb{R}$*

$$|f(x, y) - f(x, z)| \le \frac{|y - z|}{x}$$

gilt. Dann hat das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \qquad\qquad y(0) = y_0$$

genau eine Lösung auf $[0, c]$, wobei $c = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ und

$$M = \max_{\substack{x \in [0,a] \\ y \in [y_0 - b, y_0 + b]}} |f(x, y)|$$

Beweis. Der Satz von Peano besagt, dass aus der Stetigkeit von f die Existenz einer Lösung folgt. Wir müssen also noch die Eindeutigkeit nachweisen. Wir nehmen an, dass es zwei verschiedene Lösungen y, z

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y(t))dt \qquad z(x) = y_0 + \int_0^x f(t, z(t))dt$$

gibt. Dann folgt

$$\begin{aligned} |y(x) - z(x)| &\le \int_0^x |f(t, y(t)) - f(t, z(t))| dt \\ &\le \int_0^x \frac{|y(t) - z(t)|}{t} dt \end{aligned}$$

Wir beobachten, dass

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{|y(x) - z(x)|}{x} & x \in (0, c] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

eine stetige Funktion ist. Dazu müssen wir nur die Stetigkeit in 0 nachprüfen. Nach l'Hopital gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{y(x)-z(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y'(x)-z'(x)}{1}=\lim_{x\to 0}(f(x,y(x))-f(x,z(x)))=0$$

Die letzte Gleichheit folgt, weil f stetig ist. Da g auf $[0,c]$ stetig ist, nimmt g dort das Maximum an. Das Maximum ist strikt größer als 0, weil y und z verschieden sind.

Da g stetig ist und $g(0)=0$ gilt, gibt es ein $\epsilon>0$, so dass für alle $x\in[0,\epsilon]$, die Ungleichung

$$g(x)\le\tfrac{1}{2}\max_{x\in[0,a]}g(x)$$

gilt. Hiermit folgt

$$\begin{aligned}|y(x)-z(x)|&\le\int_0^\epsilon g(t)dt+\int_\epsilon^x g(t)dt\\&\le\tfrac{\epsilon}{2}\max_{x\in[0,a]}g(x)+(x-\epsilon)\max_{x\in[0,a]}g(x)\\&=(x-\tfrac{\epsilon}{2})\max_{x\in[0,a]}g(x)\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{|y(x)-z(x)|}{x}<\max_{s\in[0,a]}g(s)=\max_{s\in[0,a]}\frac{|y(s)-z(s)|}{s}$$

Dies kann nicht sein, da diese Ungleichung für alle $x\in[0,c]$ gelten muss, andererseits das Maximum angenommen wird. □

Wenn wir eine etwas stärkere Bedingung im Satz von Nagumo fordern, dann konvergiert die Picard-Iteration.

Satz. *(Verschärfte Form vom Satz von Nagumo) Es sei* $0\le k<1$ *und* $f:[0,a]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Für alle* $x\in(0,a]$ *und alle* $y,z\in\mathbb{R}$ *gelte*

$$|f(x,y)-f(x,z)|\le\frac{k}{x}|y-z|.$$

Dann konvergiert die Picard-Iteration gegen eine Lösung für das Anfangswertproblem

$$y'=f(x,y)\qquad\qquad y(0)=y_0$$

Die Lösung ist eindeutig und existiert auf $[0,a]$.

Beweis. Wir betrachten dazu den Vektorraum X aller stetigen Funktionen ϕ auf $[0,a]$, so dass

$$\sup_{x\in(0,a]}\left|\frac{\phi(x)}{x}\right|<\infty$$

mit der Norm

$$\|\phi\|=\sup_{x\in(0,a]}\left|\frac{\phi(x)}{x}\right|$$

Insbesondere gilt $\phi(0) = 0$. Man kann zeigen, dass dies ein Banachraum ist. $T : X \to X$

$$T\phi(x) = \int_0^x f(t, y_0 + \phi(t))dt$$

ist eine Kontraktion.

$$\begin{aligned}
\|T\phi - T\psi\| &= \sup_{x\in(0,a]} \frac{1}{x} \left| \int_0^x f(t, y_0 + \phi(t)) - f(t, y_0 + \psi(t)dt \right| \\
&\leq \sup_{x\in(0,a]} \frac{1}{x} \int_0^x |f(t, y_0 + \phi(t)) - f(t, y_0 + \psi(t))| \, dt \\
&\leq \sup_{x\in(0,a]} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{k}{t} |\phi(t) - \psi(t)| \, dt \\
&\leq \sup_{x\in(0,a]} \frac{k}{x} \int_0^x \|\phi - \psi\| dt = k\|\phi - \psi\|
\end{aligned}$$

Nach dem Fixpunktsatz von Banach gibt es einen Fixpunkt y

$$y(x) = \int_0^x f(t, y_0 + y(t))dt$$

und unsere gesuchte Lösung ist $y_0 + y$. $\square$

Man kann im Satz von Nagumo die Annahme, dass

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq \frac{|y - z|}{x}$$

gilt, nicht dahingehend abschwächen, dass man nur

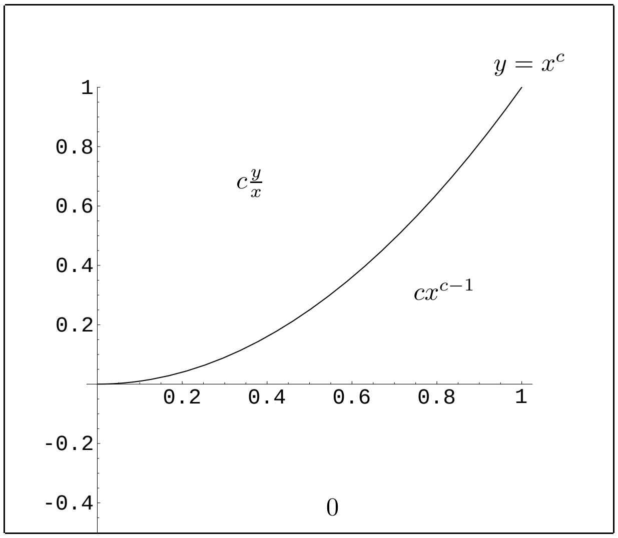
$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq \frac{c}{x}|y - z|$$

wobei c eine positive Konstante ist. Dazu betrachten wir das folgende Gegenbeispiel [Per].

Beispiel. *Es sei $c > 1$ und $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$f(x, y) = \begin{cases} c\dfrac{y}{x} & \textit{für} \quad 0 < y < x^c \\ cx^{c-1} & \textit{für} \quad x^c \leq y \\ 0 & \textit{für} \quad y \leq 0 \end{cases}$$

Dann sind $y = \alpha x^c$ für alle $0 \leq \alpha < 1$ Lösungen. Es liegt also keine Eindeutigkeit vor.



Beispiel. *(i) Das Anfangswertproblem*

$$y' = \sqrt{|y|} \qquad\qquad y(0) = 0$$

besitzt $y = 0$ *und*

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & x \geq 0 \\ -\frac{1}{4}x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$f(x, y) = \sqrt{|y|}$ *erfüllt in keiner Umgebung von* $y = 0$ *eine Lipschitzbedingung.*

(ii) [He, p.69] Das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + y^2 \qquad\qquad y(0) = 1$$

hat genau eine Lösung, die auf $[0, \frac{1}{5}]$ *oder einem größeren Intervall existiert. (Die Lösungen sind nicht durch elementare Funktionen darstellbar.)*

(iii) Es sei $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{x^2 + y^2} & \text{falls} \quad x \neq 0 \quad \text{oder} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

Das Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$ *mit* $y(0) = 0$ *hat eine eindeutige Lösung. Es gibt keine Umgebung von* $(0, 0)$*, so dass* f *in dieser Umgebung eine Lipschitzbedingung erfüllt.*

(iv) [CoLe] Es sei $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \quad \text{und} \quad y \in \mathbb{R} \\ 2x & x \in (0, 1] \quad \text{und} \quad y \in (-\infty, 0) \\ 2x - \dfrac{4y}{x} & x \in (0, 1] \quad \text{und} \quad y \in [0, x^2] \\ -2x & x \in (0, 1] \quad \text{und} \quad y \in (x^2, \infty) \end{cases}$$

Die Lösung des Problems $y' = f(x,y)$ mit $y(0) = 0$ existiert und ist eindeutig. Die Picard-Iteration mit $y_0 = 0$ konvergiert nicht. Es gibt darüber hinaus keine Teilfolge der Picard-Iteration, die gegen eine Lösung konvergiert.

Beweis. (i) Durch Nachrechnen überzeugt man sich davon, dass die angegeben Funktionen Lösungen sind. Damit liegt also keine Eindeutigkeit der Lösung vor. Mit dem Satz von Picard-Lindelöf folgt, dass f keine Lipschitzbedingung erfüllen kann.

Dies kann man aber auch leicht direkt nachrechnen. Wir nehmen an, dass f in einer Umgebung von $(0,0)$ eine Lipschitzbedingung erfüllt. Dann gilt

$$|f(x,0) - f(x,y)| \leq L|y|$$

Es folgt $\sqrt{|y|} \leq L|y|$ bzw. $1 \leq L\sqrt{|y|}$. Dies kann nicht sein.

(ii) Wir schränken f auf $[0,\frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ ein. f ist stetig und genügt einer Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante $L = 3$. Wir prüfen dies nach.

$$|f(x,y) - f(x,z)| = |y^2 - z^2| = |y+z||y-z| \leq 3|y-z|$$

Ausserdem gilt

$$M = \max_{\substack{x\in[0,\frac{1}{2}]\\ y\in[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]}} |x^2 + y^2| \leq \frac{5}{2}$$

Damit erhalten wir

$$c = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right\} = \frac{1}{5}$$

(iii) f erfüllt die Voraussetzungen der Verschärfung des Satzes von Nagumo.

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{|y-z|}{x}$$

Wir prüfen dies nach. Nach dem Mittelwertsatz gibt es für alle $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ ein $\bar{y} \in [y_1, y_2]$, so dass

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\bar{y})(y_1 - y_2)$$

Hieraus folgt

$$\sup_{y_1,y_2\in\mathbb{R}} \left|\frac{f(x,y_1) - f(x,y_2)}{y_1 - y_2}\right| \leq \sup_{\bar{y}\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\bar{y})\right| = \sup_{\bar{y}\in\mathbb{R}} \left|\frac{2\bar{y}x^{\frac{5}{2}}}{(x^2+\bar{y}^2)^2}\right|$$

Für festes x bestimmen wir die Extrema der Funktion

$$\frac{2yx^{\frac{5}{2}}}{(x^2+y^2)^2}.$$

Für $|y| \to \infty$ strebt die Funktion gegen 0. Also besitzt die Funktion ein absolutes Maximum, das insbesondere ein relatives ist. Es gilt

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{2yx^{\frac{5}{2}}}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{(x^2+y^2)^2} - \frac{8y^2x^{\frac{5}{2}}}{(x^2+y^2)^3}$$

Die Ableitung ist genau dann 0, wenn

$$0 = 2(x^2+y^2) - 8y^2$$

Das Maximum wird für $\bar{y}^2 = \frac{1}{3}x^2$ bzw. $\bar{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ angenommen. Wir erhalten

$$\sup_{y_1,y_2\in\mathbb{R}}\left|\frac{f(x,y_1)-f(x,y_2)}{y_1-y_2}\right| \le \frac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{x}}$$

und damit

$$|f(x,y)-f(x,z)| \le \sqrt{x}\frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{|y-z|}{x}$$

Da $x \in (0,1]$

$$|f(x,y)-f(x,z)| \le \frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{|y-z|}{x}$$

Wir zeigen jetzt, dass f in keiner Umgebung von $(0,0)$ ein Lipschitzbedingung erfüllt. Wir wählen $z=0$ und $y=x>0$. Dann gilt

$$|f(x,y)-f(x,z)| = |\tfrac{1}{2}\sqrt{x}-\sqrt{x}| = \tfrac{1}{2}\sqrt{x}$$

Falls f eine Lipschitzbedingung erfüllt, dann müsste

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{x} \le Lx$$

gelten. Dies ist nicht der Fall.

(iv) Es gilt $y_0 = 0$ und $f(t,0) = 2t$. Somit

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x f(t,y_0(t))dt = \int_0^x f(t,0)dt = \int_0^x 2tdt = x^2$$

Es gilt $f(t,y_1(t)) = f(t,t^2) = 2t - \frac{4t^2}{t} = -2t$ und somit

$$y_2(x) = \int_0^x f(t,y_1(t))dt = \int_0^x 2t - \frac{4y_1(t)}{t}dt = \int_0^x -2tdt = -x^2$$

Es gilt $f(t,y_2(t)) = f(t,-t^2) = 2t$ und somit

$$y_3(x) = \int_0^x f(t,y_2(t))dt = \int_0^x 2tdt = x^2$$

Durch Induktion weist man nach, dass für $m = 1,2,\dots$

$$y_{2m-1}(x) = x^2 \qquad\qquad y_{2m}(x) = -x^2$$

Diese Folge konvergiert nicht. Falls es eine konvergente Teilfolge gäbe, so kommen als Grenzfunktionen nur x^2 und $-x^2$ in Frage. Beides sind keine Lösungen.

Nach dem Satz von Peano gibt es eine Lösung. Es ist aber nicht schwer eine Lösung zu finden. Es lässt sich leicht nachprüfen, dass $y(x) = \frac{1}{3}x^2$ eine Lösung ist. Für $y = \frac{1}{3}x^2$ gilt $y \in [0, x^2]$ und damit $f(x, y) = 2x - \frac{4y}{x}$. Also gilt

$$y' = \tfrac{2}{3}x \qquad\qquad f(x,y) = 2x - \frac{4y}{x} = 2x - \tfrac{4}{3}x = \tfrac{2}{3}x$$

Wir wollen nun zeigen, dass diese eindeutig ist. Dazu machen wir die folgende Beobachtung. Für alle $x \in [0, 1]$ und für alle $y, z \in \mathbb{R}$ mit $y \leq z$ gilt

$$f(x, z) \leq f(x, y)$$

Dazu müssen wir mehrere Fälle nachprüfen. Für $x = 0$ gilt

$$f(x, z) = 0 = f(x, y)$$

Für $x \in (0, 1]$ und $y < z < 0$

$$f(x, z) = 2x = f(x, y)$$

Für $x \in (0, 1]$ und $y < 0 \leq z \leq x^2$

$$f(x, z) = 2x - \frac{4z}{x} \leq 2x = f(x, y)$$

Für $x \in (0, 1]$ und $y < 0 < x^2 < z$

$$f(x, z) = -2x \leq 2x = f(x, y)$$

Für $x \in (0, 1]$ und $0 \leq y \leq z \leq x^2$

$$f(x, z) = 2x - \frac{4z}{x} \leq 2x - \frac{4y}{x} = f(x, y)$$

Für $x \in (0, 1]$ und $0 \leq y \leq x^2 < z$

$$f(x, z) = -2x \leq 2x - \frac{4y}{x} = f(x, y)$$

Wir nehmen nun an, dass es zwei verschiedene Lösungen y, z mit $y(0) = z(0) = 0$ auf $[0, a]$ gibt. Da die Lösungen verschieden sind, gibt es ein $x_0 \in [0, a]$ mit $y(x_0) < z(x_0)$ (oder umgekehrt). Wir setzen

$$x_1 = \sup\{x | x < x_0 \quad \text{und} \quad y(x) = z(x)\}$$

Da $y(0) = z(0)$ gilt, gibt es ein solches x_1. Weiter gilt $x_1 < x_0$, weil y und z stetig sind. Es gilt für alle x mit $x_1 < x \leq x_0$, dass $y(x) < z(x)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} y(x_0) < z(x_0) &= \int_0^{x_0} f(t, z(t))dt \\ &= \int_0^{x_1} f(t, z(t))dt + \int_{x_1}^{x_0} f(t, z(t))dt = z(x_1) + \int_{x_1}^{x_0} f(t, z(t))dt \end{aligned}$$

Da $y(x_1) = z(x_1)$ gilt, folgt

$$y(x_0) < y(x_1) + \int_{x_1}^{x_0} f(t, z(t))dt = \int_0^{x_1} f(t, y(t))dt + \int_{x_1}^{x_0} f(t, z(t))dt$$

Da $f(t, z(t)) \leq f(t, y(t))$ für $t \in [x_1, x_0]$ gilt, folgt

$$y(x_0) < \int_0^{x_1} f(t, y(t))dt + \int_{x_1}^{x_0} f(t, y(t))dt = y(x_0)$$

Dies ist ein Widerspruch. $\square$

7. Lokale Lipschitzbedingung

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion. Man sagt, dass f lokal einer Lipschitzbedingung bzgl. y genügt, falls für alle $(x_0, y_0) \in D$ eine Umgebung $\mathcal{U}$ von (x_0, y_0) und eine Konstante L existieren, so dass für alle $(x, y), (x, z) \in \mathcal{U} \cap D$

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|$$

gilt.

Satz. *D sei eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ besitze eine stetige, partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$. Dann genügt f einer lokalen Lipschitzbedingung.*

Beweis. Wir können annehmen, dass $\mathcal{U}(x_0, y_0)$ eine abgeschlossene Kreisscheibe ist, die ganz in D enthalten ist. Insbesondere ist $\mathcal{U}(x_0, y_0)$ damit kompakt. Deshalb nimmt $\frac{\partial f}{\partial y}$ auf $\mathcal{U}$ Minimum und Maximum an. Es gibt also ein L, so dass

$$\max_{(x,y)\in\mathcal{U}} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq L$$

Mit dem Mittelwertsatz folgt, dass es für alle y, z ein $\eta \in (z, y)$ gibt, so dass

$$f(x, y) - f(x, z) = (y - z)\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)$$

gilt. Also

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq |y - z| \max_{(x,y)\in\mathcal{U}} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| = L|y - z|$$

□

Der Graph einer Funktion $\phi : M \to \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\mathrm{Graph}(\phi) = \{(x, \phi(x)) | x \in M\}$$

Es sei I ein Intervall. Das Intervall kann beschränkt oder unbeschränkt sein, die Endpunkte des Intervalls können zum Intervall gehören oder auch nicht. Wir sagen, dass eine Funktion $\phi : I \to \mathbb{R}$, deren Graph in einer offenen Menge D enthalten ist, nach rechts dem Rand von D beliebig nahe kommt, wenn es ein $a \in I$, so dass die abgeschlossene Hülle von

$$\mathrm{Graph}(\phi) = \{(x, \phi(x)) | x \in I \cap [a, \infty)\}$$

keine kompakte Teilmenge von D ist. Analog wird dieselbe Aussage für links definiert.

Dies ist eine knappe Formulierung für die Gesamtheit der folgenden Fälle.

(i) $I \cap [a, \infty)$ ist unbeschränkt.

(ii) $\{\phi(x) | x \in I \cap [a, \infty)\}$ ist unbeschränkt.

(iii)
$$\inf\{\|(x, \phi(x)) - (y, z)\| \ |x \in I \cap [a, \infty), (y, z) \in \partial D\} = 0$$

Wir wollen uns davon überzeugen, dass Graph(ϕ) keine kompakte Menge ist, falls eine der Eigenschaften (i),(ii) oder (iii) gilt.

Falls (i) oder (ii) gilt, so ist Graph(ϕ) über $I \cap [a, \infty)$ unbeschränkt und damit nicht komkakt. Wir nehmen nun an, dass (iii) gilt. Außerdem wollen wir annehmen, dass Graph(ϕ) kompakt ist. Es gibt zwei Folgen $(x_n, \phi(x_n))$, $n \in \mathbb{N}$, (y_n, z_n), $n \in \mathbb{N}$, mit
$$\lim_{n \to \infty} \|(x_n, \phi(x_n)) - (y_n, z_n)\| = 0$$

Dann gibt es wegen der Kompaktheit von Graph(ϕ) eine konvergente Teilfolge
$$\lim_{k \to \infty} (x_{n_k}, \phi(x_{n_k})) = (y_0, z_0)$$

die in D konvergiert. Andereseits gilt ebenfalls
$$\lim_{k \to \infty} (y_{n_k}, z_{n_k}) = (y_0, z_0)$$

und somit $(y_0, z_0) \in \partial D$. Dies ist ein Widerspruch.

Wir zeigen nun die Umkehrung. Wir nehmen an, dass (i),(ii) und (iii) nicht gelten. Da (i) und (ii) nicht gelten ist Graph(ϕ) über $I \cap [a, \infty)$ eine beschränkte Menge. Wegen
$$\inf\{\|(x, \phi(x)) - (y, z)\| \ |x \in I \cap [a, \infty), (y, z) \in \partial D\} > 0$$

ist $\overline{\text{Graph}(\phi)}$ eine Teilmenge von D, also eine kompakte Teilmenge von D.

Satz. *Es sei D eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig und genüge einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. y. Dann hat das Anfangswertproblem*
$$y' = f(x, y) \qquad\qquad y(x_0) = y_0 \qquad (x_0, y_0) \in D$$

genau eine Lösung, die nach links und nach rechts dem Rand beliebig nahe kommt. Jede andere Lösung ist eine Restriktion dieser Lösung auf ein kleineres Intervall.

Wir benötigen zwei Lemmata. Das erste ist offensichtlich.

Lemma. *Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ und für alle $\alpha \in A$ seien I_α Intervalle mit $x_0 \in I_\alpha$. Es seien $\phi_\alpha : I_\alpha \to \mathbb{R}$ Lösungen des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$ mit $y(x_0) = y_0$, so dass für alle $x \in I_\alpha \cap I_\beta$ gilt, dass $\phi_\alpha(x) = \phi_\beta(x)$. Dann ist*
$$\phi : \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha \to \mathbb{R}$$
$$\phi(x) = \phi_\alpha(x) \qquad\qquad x \in I_\alpha$$

eine Lösung des Anfangswertproblems. ϕ ist auf $\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$ die einzige Lösung, so dass für alle $\alpha \in A$ die Gleichung $\phi_{|I_\alpha} = \phi_\alpha$ gilt.

Lemma. *Es sei D eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig.*
(i) Ist $\phi : [x_0, b) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, so dass $\overline{\text{Graph}\,\phi}$ eine kompakte Teilmenge von D ist, dann gibt es $\tilde{\phi} : [x_0, b] \to \mathbb{R}$, die Lösung der Differentialgleichung ist und

$$\tilde{\phi}_{|[x_0,b)} = \phi$$

(ii) Sind $\phi : [x_0, b] \to \mathbb{R}$ und $\psi : [b, c] \to \mathbb{R}$ Lösungen mit $\phi(b) = \psi(b)$, dann ist $y : [x_0, c] \to \mathbb{R}$

$$y(x) = \begin{cases} \phi(x) & x \in [x_0, b] \\ \psi(x) & x \in [b, c] \end{cases}$$

Lösung der Differentialgleichung.

Beweis. (i) Wir definieren

$$\tilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) & x \in [x_0, b) \\ \lim\limits_{x \to b} \phi(x) & x = b \end{cases}$$

Es muss nachgeprüft werden, dass $\tilde{\phi}$ wohldefiniert ist. Laut Voraussetzung ist $\overline{\text{Graph}\,\phi}$ eine kompakte Teilmenge von D. Da f auf D stetig ist, ist f auch auf der kompakten Menge $\overline{\text{Graph}\,\phi}$ stetig. Deshalb ist f auf $\overline{\text{Graph}\,\phi}$ beschränkt und insbesondere auf Graph ϕ beschränkt. Da f auf Graph ϕ stetig ist, ist $f(t, \phi(t))$ auf $[x_0, b)$ stetig und beschränkt und damit Riemann integrierbar auf $[x_0, b)$. Der Grenzwert $\lim_{x \to b} \phi(x)$ existiert, weil

$$\lim_{x \to b} \phi(x) = y_0 + \lim_{x \to b} \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt = y_0 + \int_{x_0}^{b} f(t, \phi(t))dt$$

Wir zeigen nun, dass $\tilde{\phi}$ in b linksseitig differenzierbar ist.

$$\lim_{x \to b} \frac{\tilde{\phi}(b) - \tilde{\phi}(x)}{b - x} = \lim_{x \to b} \frac{\int_x^b f(t, \phi(t))dt}{b - x}$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt, dass es ein $t_x \in (x, b)$ mit

$$\lim_{x \to b} \frac{\tilde{\phi}(b) - \tilde{\phi}(x)}{b - x} = \lim_{x \to b} \frac{(b - x) f(t_x, \tilde{\phi}(t_x))}{b - x}$$

gibt. Weil f stetig ist

$$\lim_{x \to b} \frac{\tilde{\phi}(b) - \tilde{\phi}(x)}{b - x} = \lim_{x \to b} f(t_x, \tilde{\phi}(t_x)) = f\left(\lim_{x \to b} t_x, \lim_{x \to b} \tilde{\phi}(t_x)\right) = f(b, \tilde{\phi}(b))$$

und $\tilde{\phi}$ genügt in b (linksseitig) der Differentialgleichung. (ii) y genügt im Punkt b der Differentialgleichung. $\square$

Beweis von Satz. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf gibt es eine Lösung des Anfangswertproblems, die zumindest auf einem kleinen Intervall existiert. Wir indizieren die Funktionen ϕ_α, $\alpha \in A$, die Lösungen des Anfangswertproblems sind. Zwei Lösungen $\phi : I \to \mathbb{R}$ und $\psi : J \to \mathbb{R}$ stimmen auf $I \cap J$ überein. Wir überlegen uns dies. Falls die Lösungen nicht übereinstimmen, dann gibt es ein x_1 mit $\phi(x_1) \neq \psi(x_1)$ Wir betrachten

$$x_2 = \inf\{x|\phi(x) \neq \psi(x)\}$$

Wegen der Stetigkeit von ϕ und ψ folgt $\phi(x_2) = \psi(x_2)$. Mit dem Satz von Picard-Lindelöf folgt, dass in einer Umgebung von x_2 die Gleichung $\phi(x) = \psi(x)$ gilt. Dies ist ein Widerspruch. (Man könnte hier auch das Lemma von Zorn verwenden.) Nach Lemma gibt es eine Lösung y, die sich auf kein größeres Intervall fortsetzen lässt.

Wir nehmen an, dass y nicht nach rechts dem Rand beliebig nahe kommt. Dann ist y auf einem Intervall $[x_0, b)$ oder einem Intervall $[x_0, b]$ definiert. Wir betrachten den Fall $[x_0, b)$ zuerst.

Nach Lemma (i) können wir den Definitionsbereich von y auf $[x_0, b]$ erweitern.

Falls y auf $[x_0, b]$ definiert ist, dann gibt es eine Umgebung $\mathcal{U}$ von $(b, y(b))$, die ganz in D liegt. Dann gibt es eine Lösung des Anfangswertproblems $z' = f(x, z)$ mit $z(b) = y(b)$, die zumindest auf einem kleinen Intervall existiert. Nun wenden wir Lemma (ii) an.

Damit haben wir die Existenz einer Lösung gezeigt, die sich nach links und rechts dem Rand beliebig nähert. Die Eindeutigkeit folgt aus der lokalen Lipschitzbedingung. $\square$

Maximal- und Minimalintegrale

Wir erhalten hier Abschätzungen für das Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$ mit $y(x_0) = y_0$. Diese sind insbesondere dann nützlich, wenn eine Differentialgleichung so kompliziert ist, dass wir keine Lösungen angeben können.

Lemma. *Es seien $\phi, \psi : (x_0, x_0 + a] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Es gebe ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ die Ungleichung $\phi(x) < \psi(x)$ gilt. Dann gilt*
(i) Für alle $x \in (x_0, x_0 + a]$ gilt $\phi(x) < \psi(x)$.
oder
(ii) Es gibt ein $x_1 \in (x_0, x_0 + a]$, so dass $\phi(x_1) = \psi(x_1)$, $\phi'(x_1) \geq \psi'(x_1)$, und für alle $x \in (x_0, x_1)$ die Ungleichung $\phi(x) < \psi(x)$ gilt.

Beweis. Wir nehmen an, dass (i) nicht gilt. Dann gibt es ein x_1 mit $\phi(x_1) = \psi(x_1)$, so dass für alle $x \in (x_0, x_1)$ die Ungleichung $\phi(x) < \psi(x)$ gilt. Hieraus folgt

$$\phi(x_1) - \phi(x_1 - h) > \psi(x_1) - \psi(x_1 - h)$$

und somit

$$\frac{\phi(x_1) - \phi(x_1 - h)}{h} > \frac{\psi(x_1) - \psi(x_1 - h)}{h}$$

Also

$$\phi'(x_1) \geq \psi'(x_1)$$

□

Man bezeichnet

$$P\phi = \phi' - f(x, \phi(x))$$

als Defekt von ϕ bzgl. der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.

Lemma. *Es sei D eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Es seien $\phi, \psi : (x_0, x_0 + a] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit Graph(ϕ), Graph$(\psi) \subseteq D$. Es gebe ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$*

$$\phi(x) < \psi(x)$$

Für alle $x \in (x_0, x_0 + a]$

$$P\phi(x) < P\psi(x)$$

Dann gilt für alle $x \in (x_0, x_0 + a]$

$$\phi(x) < \psi(x)$$

Beweis. Wir benutzen Lemma. Falls Lemma (i) gilt, dann ist die Behauptung bewiesen. Falls (i) nicht gilt, so gilt (ii). Andererseits gilt

$$\phi'(x_1) = (P\phi)(x_1) + f(x_1, \phi(x_1)) < (P\psi)(x_1) + f(x_1, \psi(x_1)) = \psi'(x_1)$$

im Widerspruch zu Lemma (ii). $\square$

Man sagt, dass eine stetig differenzierbare Funktion v eine Unterfunktion bzgl. des Anfangswertproblems $y' = f(x,y)$ mit $y(x_0) = y_0$ ist, falls für alle $x \in [x_0, x_0+a]$

$$v'(x) < f(x, v(x)) \qquad\qquad v(x_0) \leq y_0$$

gilt. Eine stetig differenzierbare Funktion v ist Oberfunktion, falls für alle $x \in [x_0, x_0 + a]$

$$v'(x) > f(x, v(x)) \qquad\qquad v(x_0) \geq y_0$$

gilt.

Satz. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig. Es seien v eine Unterfunktion und w eine Oberfunktion des Anfangswertproblems $y' = f(x,y)$ mit $y(x_0) = y_0$ auf $[x_0, x_0 + a]$. Dann gilt für alle $x \in [x_0, x_0 + a]$ und alle Lösungen y, die auf $[x_0, x_0 + a]$ existieren*

$$v(x) \leq y(x) \leq w(x)$$

Beweis. Wir wollen Lemma anwenden. v' ist nach Voraussetzung stetig und y' ist wegen $y' = f(x,y)$ stetig. Wir weisen $v(x) \leq y(x)$ nach.

Falls $v(x_0) < y_0$ gilt, so folgt aus der Stetigkeit von v und y, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in [x_0, x_0 + \epsilon]$

$$v(x) < y(x)$$

gilt. Da v eine Unterfunktion ist, gilt

$$v' - f(x, v) < 0 = y' - f(x, y)$$

Damit können wir Lemma anwenden.

Falls $v(x_0) = y_0$ gilt, dann folgt

$$v'(x_0) < f(x_0, v(x_0)) = f(x_0, y_0) = y'(x_0)$$

Da v' und y' stetig sind, gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $x \in [x_0, x_0 + \epsilon]$

$$v'(x) < y'(x)$$

gilt. Also gilt für alle $x \in (x_0, x_0 + \epsilon]$

$$v(x) - v(x_0) = \int_{x_0}^{x} v'(t)dt < \int_{x_0}^{x} y'(t)dt = y(x) - y(x_0)$$

Da aber $y(x_0) = v(x_0)$ gilt, folgt für alle $x \in (x_0, x_0 + \epsilon]$, dass $v(x) < y(x)$ gilt. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma erfüllt. $\square$

Um Abschätzungen für Lösungen von $y' = f(x,y)$ zu finden, modifiziert man f etwas, so dass $f_1 < f < f_2$ gilt und f_1 und f_2 Funktionen lösbarer Differentialgleichungen sind.

Beispiel. *Die Lösung der Riccatischen Differentialgleichung*

$$y' = x^2 + y^2 \qquad\qquad y(0) = 1$$

erfüllt

$$\frac{1}{1-x} \leq y(x) \leq \tan(x + \tfrac{\pi}{4})$$

und y existiert mindestens auf $[0, \frac{\pi}{4}]$ und höchstens auf $[0, 1]$.

Beweis. Für alle $\epsilon > 0$ und alle x mit $|x| \leq 1$ gilt

$$(1-\epsilon)y^2 < x^2 + y^2 < (1+\epsilon)(1+y^2)$$

Wir bestimmen nun die Unterfunktion.

$$v' = (1-\epsilon)v^2 \qquad\qquad v(0) = 1$$

$$\begin{aligned}(1-\epsilon)x = (1-\epsilon)\int_0^x dt = \int_0^x \frac{v'}{v^2}dt = \int_{v(0)}^{v(x)} \frac{1}{v^2}dv \\ = -\frac{1}{v(x)} + \frac{1}{v(0)} = -\frac{1}{v(x)} + 1\end{aligned}$$

$$v(x) = \frac{1}{1-(1-\epsilon)x}$$

Also gilt für alle $\epsilon > 0$

$$y(x) \geq \frac{1}{1-(1-\epsilon)x}$$

und somit

$$y(x) \geq \frac{1}{1-x}$$

Wir bestimmen die Oberfunktion.

$$w' = (1+\epsilon)(w^2+1) \qquad\qquad w(0) = 1$$

$$\begin{aligned}(1+\epsilon)x = (1+\epsilon)\int_0^x dt = \int_0^x \frac{w'}{1+w^2}dt = \int_{w(0)}^{w(x)} \frac{1}{1+w^2}dw \\ = \arctan(w(x)) - \arctan(w(0))\end{aligned}$$

Da $w(0) = 1$ gilt, folgt

$$(1+\epsilon)x = \arctan(w(x)) - \tfrac{\pi}{4}$$

Also gilt

$$w(x) = \tan((1+\epsilon)x + \tfrac{\pi}{4})$$

und somit für alle $\epsilon > 0$

$$y(x) \leq \tan((1+\epsilon)x + \tfrac{\pi}{4})$$

Deshalb gilt

$$y(x) \leq \tan(x + \tfrac{\pi}{4})$$

□

Eine Lösung y^* des Anfangswertproblems $y' = f(x,y)$ mit $y(x_0) = y_0$ heisst Maximallösung, falls
(i) y^* dem Rand von D nach rechts und nach links beliebig nahe kommt.
(ii) Für alle Lösungen y des Anfangswertproblems und alle x, für die y^* und y definiert sind, $y(x) \leq y^*(x)$ gilt.

Analog wird die Minimallösung definiert.

Satz. *Es sei D eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ mit $(x_0, y_0) \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Dann gibt es zum Anfangswertproblem $y' = f(x,y)$ mit $y(x_0) = y_0$ Minimal- und Maximallösungen.*

Beweis. Wir beweisen den Satz für den speziellen Fall, dass $D = [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}$ und dass f stetig und beschränkt ist (D ist hier nicht offen). Der allgemeine Fall folgt hieraus.

Wir konstruieren eine Maximallösung. Nach dem Satz von Peano hat

$$y' = f(x,y) + \tfrac{1}{n} \qquad\qquad y(x_0) = y_0 + \tfrac{1}{n}$$

mindestens eine Lösung $w_n : [x_0, x_0 + a] \to \mathbb{R}$. Hierbei nutzt man aus, dass f beschränkt ist. Nach Lemma gilt dann für alle Lösungen y des Anfangswertproblems $y' = f(x,y)$ mit $y(x_0) = y_0$ und alle $x \in [x_0, x_0 + a]$

$$y(x) \leq w_{n+1}(x) \leq w_n(x)$$

Da $w_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, für jedes x monoton fallend ist, existiert für alle $x \in [x_0, x_0 + a]$

$$y^*(x) = \lim_{n\to\infty} w_n(x)$$

und es gilt für alle $x \in [x_0, x_0 + a]$ und alle Lösungen y

$$y(x) \leq y^*(x)$$

Die Folge w_n, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert gleichmässig gegen y^*. Dazu zeigen wir, dass die Folge w_n, $n \in \mathbb{N}$, eine gleichstetige Menge von $C[x_0, x_0 + a]$ ist. Ausserdem zeigen wir, dass w_n, $n \in \mathbb{N}$, in $C[x_0, x_0 + a]$ beschränkt ist. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli ist die Folge damit total beschränkt.

Wir weisen die Gleichstetigkeit nach. Es sei $y \leq x$ und

$$M = \max_{\substack{x \in (x_0 - a, x_0 + a) \\ y \in \mathbb{R}}} |f(x,y)|$$

$$\begin{aligned}|w_n(x) - w_n(y)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(t, w_n(t)) + \tfrac{1}{n}dt - \int_{x_0}^{y} f(t, w_n(t)) + \tfrac{1}{n}dt\right| \\ &\leq \int_{y}^{x} |f(t, w_n(t)) + \tfrac{1}{n}|dt \\ &\leq (M+1)\,|x-y|\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass die Folge w_n, $n \in \mathbb{N}$, beschränkt ist.

$$|w_n(x)| \leq |y_0| + \int_{x_0}^{x} |f(t, w_n(t)) + \tfrac{1}{n}|dt \leq (M+1)|x - x_0| \leq (M+1)a$$

Also ist die Folge total beschränkt und der Abschluss der Folge $\overline{\{w_n | n \in \mathbb{N}\}}$ ist kompakt. Somit hat jede Folge in $\overline{\{w_n | n \in \mathbb{N}\}}$ eine konvergente Teilfolge. Insbesondere hat w_n, $n \in \mathbb{N}$, eine konvergente Teilfolge

$$\lim_{k\to\infty} w_{n_k} = w$$

Da y^* der punktweise Limes der Folge w_n ist, muss $w = y^*$ gelten. Da die Folge w_n monoton fällt, schliessen wir

$$\lim_{n\to\infty} w_n = y^*$$

bzw. dass w_n, $n \in \mathbb{N}$, gleichmässig gegen y^* konvergiert.

Wir zeigen nun, dass damit $g_n : [x_0, x_0 + a] \to \mathbb{R}$ mit

$$g_n(x) = f(x, w_n(x))$$

gleichmässig gegen $g : [x_0, x_0 + a] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = f(x, y^*(x))$$

konvergiert. f ist auf $[x_0, x_0 + a] \times [y_0 - (M+1)a, y_0 + (M+1)a]$ stetig und damit dort gleichmässig stetig.

$$\forall\epsilon\exists\delta\forall(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}), \sqrt{|x - \tilde{x}|^2 + |y - \tilde{y}|^2} < \delta : |f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})| < \epsilon$$

Insbesondere gilt

$$\forall\epsilon\exists\delta\forall x \in [x_0, x_0 + a]\forall y, \tilde{y}, |y - \tilde{y}| < \delta : |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| < \epsilon$$

Da w_n gleichmässig gegen y^* konvergiert, erhalten wir

$$\forall\epsilon\exists N\forall x \in [x_0, x_0 + a]\forall n \geq N : |f(x, y^*(x)) - f(x, w_n(x))| < \epsilon$$

Dies ist aber gerade die gleichmässige Konvergenz, die wir nachprüfen wollten. Damit erhalten wir nun

$$\begin{aligned}y^*(x) = \lim_{n\to\infty} w_n(x) &= \lim_{n\to\infty}\left\{y_0 + \tfrac{1}{n} + \int_{x_0}^{x} f(t, w_n(t)) + \tfrac{1}{n}dt\right\} \\ &= y_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t, w_n(t))dt\end{aligned}$$

Da wir gleichmässige Konvergenz haben, dürfen wir Limes und Integral vertauschen.

$$y^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(t, w_n(t))dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y^*(t))dt$$

□

Bemerkung. *Es sei $f : [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und y^* sei Maximallösung und y_* sei Minimallösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$ mit $y(x_0) = x_0$ auf $[x_0, x_0 + a]$. Dann gibt es für alle (s, t) mit $s \in [x_0, x_0 + a)$ und $y_*(s) \leq t \leq y^*(s)$ eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$ mit $y(x_0) = x_0$ und $y(s) = t$.*

(Die Lösungen füllen also den gesamten Bereich zwischen y_* und y^* aus.)

Beweisidee. Nach dem Satz von Peano gibt es eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$ mit $y(s) = t$, die dem Rand nach links beliebig nahe kommt. Falls es ein $x_1 \in [x_0, s]$ mit $y(x_1) = y^*(x_1)$ gibt, dann gilt

$$y'(x_1) = f(x_1, y(x_1)) = f(x_1, y^*(x_1)) = y^{*\prime}(x_1)$$

Wir können y also auf $[x_0, x_1]$ durch y^* fortsetzen. Ebenso verfahren wir, falls $y(x_1) = y_*(x_1)$ gilt.

Falls keiner diesen beiden Fälle eintritt, kann man y bis x_0 nach links fortsetzen und es gilt $y(x_0) = y_0$. $\square$

Beispiel.

$$y' = \sqrt{|y|} \qquad\qquad y(0) = 0$$

Die Maximallösung ist

$$y^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Die Minimallösung ist

$$y^*(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -\frac{1}{4}x^2 & x < 0 \end{cases}$$

Für (s, t) mit $0 < t, t^2 < s$ ist

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x - (s - 2\sqrt{t}))^2 & x \geq s - 2\sqrt{t} \\ 0 & x < s - 2\sqrt{t} \end{cases}$$

die eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(s) = t$.

Beweis. In $D = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ genügt $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ einer lokalen Lipschitzbedingung. Falls

$$y^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

nicht Maximallösung ist, so gibt es ein $x_0 > 0$ mit $y^*(x_0) > \frac{1}{4}x_0^2$ oder ein $x_0 < 0$ mit $y^*(x_0) > 0$. Es ist aber

$$y(x) = \tfrac{1}{4}(x - (x_0 - 2\sqrt{y^*(x_0)}))^2 \qquad\qquad x \geq x_0 - 2\sqrt{y^*(x_0)}$$

die eindeutige Lösung der Differentialgleichung durch den Punkt $(x_0, y^*(x_0))$. $\square$

9. Stetige Abhängigkeit

Gegeben seien zwei Anfangswertprobleme $y' = f(x,y)$ mit $y(x_0) = y_0$ und $y' = g(x,y)$ mit $y(x_0) = \tilde{y}_0$. Wir sprechen von stetiger Abhängigkeit, falls folgendes vorliegt: Falls sich sowohl f und g als auch y_0 und $\tilde{y}_0$ nicht stark unterscheiden, dann liegen auch die entsprechenden Lösungen dicht beieinander.

Satz. *Es seien $f, g : [x_0, x_0+a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige, beschränkte Funktionen. f genüge einer Lipschitzbedingung mit Konstante L, $La \leq \frac{1}{2}$. Für alle $(x,y) \in [x_0, x_0+a] \times \mathbb{R}$ gelte*

$$|f(x,y) - g(x,y)| < \epsilon$$

Dann gilt für alle Lösungen $y' = f(x,y)$ und $v' = g(x,y)$ mit $y(x_0) = v(x_0) = y_0$

$$\max_{x \in [x_0, x_0+a]} |y(x) - v(x)| < 2\epsilon a$$

Man kann das Ergebnis noch dahingehend erweitern, dass auch die Anfangswerte verschieden sind. Die Bedingung $La \leq \frac{1}{2}$ kann vermieden werden.

Beweis. Es gilt für alle $(x,y) \in [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}$

$$f(x,y) - \epsilon < g(x,y) < f(x,y) + \epsilon$$

Nach Satz gilt für die Lösungen $v' = g(x,v)$ und $z' = f(x,z) + \epsilon$ mit $v(x_0) = z(x_0) = y_0$ und alle $x \in [x_0, x_0 + a]$, dass $v(x) \leq z(x)$.

Wir zeigen nun, dass Lösungen $z' = f(x,z) + \epsilon$ und $y' = f(x,y)$ mit $y(x_0) = z(x_0) = y_0$ dicht zusammenliegen. Da f eine Lipschitzbedingung erfüllt, konvergiert die Picard-Iteration.

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n \qquad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt$$
$$z = \lim_{n\to\infty} z_n \qquad z_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, z_{n-1}(t)) + \epsilon dt$$

Es gilt

$$\begin{aligned} |y_n(x) - z_n(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, z_{n-1}(t)) - \epsilon dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, z_{n-1}(t))| dt + \int_{x_0}^{x} \epsilon dt \end{aligned}$$

Wir wenden nun an, dass f die Lipschitzbedingung erfüllt.

$$\begin{aligned} |y_n(x) - z_n(x)| &\leq L|x - x_0| \max_{t \in [x_0, x_0+a]} |y_{n-1}(t) - z_{n-1}(t)| + \epsilon |x - x_0| \\ &\leq La \|y_{n-1} - z_{n-1}\|_\infty + \epsilon a \end{aligned}$$

Hieraus folgt
$$\|y_n - z_n\|_\infty \leq La\|y_{n-1} - z_{n-1}\|_\infty + \epsilon a$$
und
$$\|y_n - z_n\|_\infty \leq \epsilon a + La\{\epsilon a + La\|y_{n-2} - z_{n-2}\|_\infty\}$$
Mit Induktion und $\|y_1 - z_1\|_\infty \leq \epsilon a$ erhalten wir
$$\|y_n - z_n\|_\infty \leq \epsilon a \sum_{k=0}^{n-1} (La)^k \leq \epsilon a \sum_{k=0}^{\infty} (La)^k = \frac{\epsilon a}{1 - La}$$
Weiter folgt
$$\|y - z\|_\infty \leq \frac{\epsilon a}{1 - La}$$
und somit
$$v(x) \leq z(x) \leq y(x) + \frac{\epsilon a}{1 - La}$$
Ebenso erhalten wir
$$v(x) \geq y(x) - \frac{\epsilon a}{1 - La}$$
Insgesamt gilt damit
$$|v(x) - y(x)| \leq \frac{\epsilon a}{1 - La}$$
□

10. Systeme von Differentialgleichungen

Es sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$. Man nennt

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

ein System von Differentialgleichungen. Man schreibt auch kurz

$$y' = f(x, y)$$

dafür. Gesucht sind ein Intervall I und Funktionen $y_1, \dots, y_n$ auf I, so dass sämtliche Differentialgleichungen des Systems erfüllt sind.

Es sei $\| \ \|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Wir sagen, dass f auf D einer Lipschitzbedingung bzgl. y genügt, falls ein $L > 0$ existiert, so dass für alle $(x, y), (x, z) \in D$

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \le L\|y - z\|$$

gilt. Diese Definition hängt nicht von der Norm ab, wohl aber die Konstante L. Dies folgt aus dem nächsten Lemma.

Lemma. *Für je zwei Normen $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_2$ auf dem $\mathbb{R}^n$ existieren $a, b \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$*

$$a\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b\|x\|_1$$

gilt.

Es ist hier günstig, die Norm

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

zu verwenden.

Wir sagen, dass f auf D einer lokalen Lipschitzbedingung genügt, falls es für alle $(x, y) \in D$ eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von (x, y) gibt, so dass f in $D \cap \mathfrak{U}$ einer Lipschitzbedingung genügt.

Satz. *Ist D eine offene, konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ und sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, \dots, n$ stetig und beschränkt in D, dann genügt f in D einer Lipschitzbedingung.*

Satz. *(Picard-Lindelöf) Es sei Q ein kompakter Quader*

$$Q = \{(x,y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n, |x - x_0| \leq a, \|y - y_0\|_\infty \leq b\}$$

und $f : Q \to \mathbb{R}^n$ sei eine stetige Funktion, die in Q einer Lipschitzbedingung genügt. Dann besitzt das Anfangswertproblem $y' = f(x,y)$ mit $y(x_0) = y_0$ in $[x_0 - c, x_0 + c]$ genau eine Lösung, wobei

$$M = \max_{(x,y)\in Q} \|f(x,y)\|_\infty \qquad \textit{und} \qquad c = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

Um den letzten Satz zu beweisen, verwendet man eine verallgemeinerte Picard-Iteration.

$$y_{k,j+1}(x) = y_{k,0} + \int_{x_0}^{x} f_k(t, y_{1,j}(t), \ldots, y_{n,j}(t)))dt \qquad \begin{array}{l} k = 1, \ldots, n \\ j = 0, 1, 2, \ldots \end{array}$$

In Vektorenschreibweise

$$y_{j+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_j(t))dt \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

nimmt dies formal die Gestalt der Picard-Iteration im 1-dimensionalen Fall an. Auch im mehrdimensionalen trifft es zu, dass die Picard-Iterationen gegen die Lösung konvergieren.

Auch alle übrigen Existenz- und Eindeutigkeitssätze lassen sich auf mehrere Dimensionen verallgemeinern. Den folgenden Satz wollen wir noch einmal herausheben.

Satz. *Es sei $f : [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die bzgl. y einer Lipschitzbedingung genügt. Dann gibt es genau eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x,y)$ mit $y(x_0) = y_0$, die auf $[x_0, x_0 + a]$ existiert.*

Man beachte, dass die Lipschitzbedingung nicht lokal ist, sondern global. Man erhält damit

$$\|f(x,y)\| \leq L\|y\| + \|f(x,0)\|$$

und kann damit die Existenz der Lösung auf dem gesamten Intervall $[x_0, x_0 + a]$ sicherstellen.

11. Lineare Systeme

Es sei I ein Intervall und $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ eine $n \times n$ Matrix und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ ein Spaltenvektor stetiger Funktionen, die von I nach $\mathbb{R}$ abbilden. Dann heißt

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{1,1}(x)y_1 + \cdots + a_{1,n}(x)y_n + b_1(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n,1}(x)y_1 + \cdots + a_{n,n}(x)y_n + b_1(x) \end{aligned}$$

ein lineares System von Differentialgleichungen. Wir notieren dies auch kürzer

$$y' = Ay + b$$

Man sagt, dass das System homogen ist, falls $b = 0$.

Lemma. *Es seien A eine $n \times m$ Matrix, B eine $m \times k$ Matrix und C eine $n \times n$ Matrix differenzierbarer Funktionen. Die Zeilen der Matrix C bezeichnen wir mit c_i, $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt*

(i) $(AB)' = A'B + AB'$

(ii)
$$(\det C)' = \sum_{i=1}^n \det(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_i', c_{i+1}, \ldots, c_n)$$

Beweis. (i) Es seien

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,m} \qquad B = (b_{j,\ell})_{j,\ell=1}^{m,k}$$

Dann gilt

$$(AB)' = \left(\left(\sum_{j=1}^m a_{i,j} b_{j,\ell} \right)_{i,\ell=1}^{n,k} \right)' = \left(\left(\sum_{j=1}^m a_{i,j} b_{j,\ell} \right)' \right)_{i,\ell=1}^{n,k}$$

Mit der Produktregel folt

$$(AB)' = \left(\sum_{j=1}^m a_{i,j} b_{j,\ell}' \right)_{i,\ell=1}^{n,k} + \left(\sum_{j=1}^m a_{i,j}' b_{j,\ell} \right)_{i,\ell=1}^{n,k}$$

(ii) Es gilt

$$\det C = \sum_\sigma |\sigma| \prod_{i=1}^n c_{i,\sigma(i)}$$

wobei $|\sigma|$ der Charakter oder das Vorzeichen der Permutation σ ist. $|\sigma|=1$, wenn sich σ als Produkt von einer geraden Anzahl von Transpositionen schreiben lässt, sonst gilt $|\sigma|=-1$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}(\det C)' &= \sum_\sigma |\sigma| \left(\prod_{i=1}^n c_{i,\sigma(i)}\right)' \\ &= \sum_\sigma |\sigma| \sum_{i=1}^n c_{1,\sigma(1)}\cdots c_{i-1,\sigma(i-1)} c'_{i,\sigma(i)} c_{i+1,\sigma(i+1)}\cdots c_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_\sigma |\sigma| c_{1,\sigma(1)}\cdots c_{i-1,\sigma(i-1)} c'_{i,\sigma(i)} c_{i+1,\sigma(i+1)}\cdots c_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{i=1}^n \det(c_1,\dots,c_{i-1},c'_i,c_{i+1},\dots,c_n)\end{aligned}$$

□

Satz. *Es sei I ein Intervall, A eine $n\times n$ Matrix und b ein Spaltenvektor stetiger Funktionen, die von I nach $\mathbb{R}$ abbilden. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$y' = A(x)y + b(x) \qquad\qquad y(x_0) = y_0$$

für alle $x_0 \in I$ und alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung, die auf ganz I existiert. (I kann auch ein unbeschränktes Intervall sein, die Endpunkte von I können zu I gehören oder auch nicht.)

Beweis. Wir wollen Satz anwenden. $f(x,y) = A(x)y + b(x)$ genügt auf jedem kompakten Intervall J einer Lipschitzbedingung. Wir prüfen dies nach.

$$\begin{aligned}\|f(x,y)-f(x,z)\| &= \|A(x)y - A(x)z\| \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}(x)(y_j - z_j)\right|^2\right)^{\frac12}\end{aligned}$$

Mit der Hölder-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}\|f(x,y)-f(x,z)\| &\le \left(\sum_{i=1}^n \left|\left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}(x)|^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{j=1}^n |y_j - z_j|^2\right)^{\frac12}\right|^2\right)^{\frac12} \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}(x)|^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{j=1}^n |y_j - z_j|^2\right)^{\frac12} \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}(x)|^2\right)^{\frac12} \|y - z\|\end{aligned}$$

Da $\left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist, wird dort das Maximum M angenommen. Also

$$\|f(x,y) - f(x,z)\| \leq M\|y - z\|$$

Damit hat das Anfangswertproblem auf jedem kompakten Teilintervall, das x_0 enthält, eine eindeutige Lösung. Damit existiert aber auf ganz I eine eindeutige Lösung. □

Satz. *Es sei I ein Intervall und A eine $n \times n$ Matrix stetiger Funktionen auf I. Dann bilden sämtliche Lösungen des homogenen Gleichungssystems*

$$y' = Ay$$

einen n-dimensionalen Vektorraum. (Man kann diesen Lösungsraum als Teilraum von $C(I) \times C(I) \times \cdots \times C(I)$ auffassen.)

Beweis. Man prüft leicht nach, dass die Lösungsmenge ein Vektorraum ist.

Wir zeigen, dass die Dimension des Lösungsraumes Y gleich n ist, indem wir zeigen, dass Y isomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist. Es sei $x_0 \in I$ und $T : Y \to \mathbb{R}^n$, $T(y) = y(x_0)$. T ist linear und bijektiv. T ist bijektiv, weil es nach Satz für alle y_0 genau eine Lösung y mit $y(x_0) = y_0$ gibt. □

Wir wollen nun ein Kriterium angeben, mit dem man nachprüfen kann, ob ein Lösungssystem eine Basis ist. Es seien $y^1, \ldots, y^n$ Lösungen der Differentialgleichung $y' = Ay$. (Jedes y^i ist also ein Vektor von n Funktionen.) Man nennt

$$W(x) = \det(Y(x))$$

die Wronski-Determinante der Matrix $Y(x) = (y^1(x), \ldots, y^n(x))$.

Jozef Maria Höené-Wronski wurde 1778 vermutlich in Posen geboren Er war Artillerieoffizier bevor er sich der Wissenschaft zuwandte. Er starb 1853 in Paris.

Satz. *Es sei I ein Intervall und $y^1, \ldots, y^n$ ein System von Lösungen von $y' = Ay$. Dann gilt für die Wronski-Determinante dieses Systems*

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} trA(t)dt\right)$$

$\operatorname{tr}(A)$ bezeichnet die Spur der Matrix A, $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Beweis. Wir beweisen, dass W die Differentialgleichung

$$W' = (\operatorname{tr}(A))W$$

erfüllt. Durch Lösen dieser Differentialgleichung folgt unsere Behauptung sofort. Wir zeigen, dass die Differentialgleichung in jedem Punkt $x_0 \in I$ erfüllt ist. Dazu betrachten wir das Lösungssytem $Z = (z^1, \ldots, z^n)$ mit

$$z^i(x_0) = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0) \qquad\qquad i = 1, \ldots, n$$

Wir behaupten, dass für alle $x \in I$ und alle Lösungssysteme $Y = (y^1, \ldots, y^n)$

$$Y(x) = Z(x)Y(x_0)$$

gilt. Wir prüfen dies nach. Wegen

$$\frac{d}{dx}(Z(x)Y(x_0)) = Z'(x)Y(x_0) = (AZ(x))Y(x_0) = A(Z(x)Y(x_0))$$

ist $Z(x)Y(x_0)$ eine Lösung. Da $Z(x_0) = Id$ gilt, stimmen die Werte $Y(x_0) = Z(x_0)Y(x_o)$ in x_0 überein. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz stimmen damit $Y(x)$ und $Z(y)Y(x_0)$ auf ganz I überein. Damit folgt

$$\frac{dW}{dx}(x_0) = \frac{d \det Y}{dx}(x_0) = \frac{d \det(Z(x)Y(x_0))}{dx}(x_0)$$

Die Determinante von dem Produkt von zwei Matrizen ist gleich dem Produkt der Determinanten.

$$\frac{dW}{dx}(x_0) = \det(Y(x_0))\frac{d \det(Z(x))}{dx}(x_0) = W(x_0)\frac{d \det(Z(x))}{dx}(x_0)$$

Wir wenden nun Lemma an und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dx}(x_0) &= W(x_0)\sum_{i=1}^{n} \det(z^1(x_0), \ldots, z^{i-1}(x_0), z^{i\prime}(x_0), z^{i+1}(x_0), \ldots, z^n(x_0)) \\
&= W(x_0)\sum_{i=1}^{n} \det(z^1(x_0), \ldots, z^{i-1}(x_0), Az^i(x_0), z^{i+1}(x_0), \ldots, z^n(x_0)) \\
&= W(x_0)\sum_{i=1}^{n} \det(e_1, \ldots, e_{i-1}, A(x_0)e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \\
&= W(x_0)\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}(x_0)
\end{aligned}$$

□

Satz. *Es sei I ein Intervall und A eine Matrix stetiger Funktionen $a_{i,j} : I \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Es sei $y^1, \ldots, y^n$ ein System von Lösungen von $y' = Ay$ und $Y = (y^1, \ldots, y^n)$ sei die vom System erzeugte Matrix. Dann sind äquivalent:*

(i) $y^1, \ldots, y^n$ ist eine Basis des Lösungsraumes.

(ii) Für alle $x \in I$ gilt, dass $W(x) \neq 0$.

(iii) Es gibt ein $x \in I$, so dass $W(x) \neq 0$.

Beweis. Die Implikation $(ii) \Rightarrow (iii)$ ist trivial. Die Implikation $(iii) \Rightarrow (ii)$ folgt aus Satz, da die Exponentialfunktion überall verschieden von 0 ist.

Wir zeigen nun $(ii) \Rightarrow (i)$ bzw. $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$. $y^1, \ldots, y^n$ ist genau dann linear abhängig, wenn es reelle Zahlen $c_1, \ldots, c_n$ gibt, von denen mindestens eine Zahl c_{i_0} von 0 verschieden ist und für die

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y^i = 0$$

gilt. Ausführlich aufgeschrieben bedeutet dies

$$\exists c_1, \ldots, c_n \exists i_0, c_{i_0} \neq 0 \forall x \in I : \sum_{i=1}^{n} c_i y^i(x) = 0.$$

Hieraus folgt, dass für alle $x \in I$ die Vektoren $y^1(x), \ldots, y^n(x)$ des $\mathbb{R}^n$ linear abhängig sind. Somit gilt für alle $x \in I$, dass $W(x) = 0$.

Nun zeigen wir $(i) \Rightarrow (ii)$ bzw. $\neg(ii) \Rightarrow \neg(i)$. Falls (ii) nicht gilt, dann gibt es ein x_0, so dass $y^1(x_0), \ldots, y^n(x_0)$ linear abhängig ist. Also gibt es reelle Zahlen $c_1, \ldots, c_n$, von denen mindestens eine Zahl c_{i_0} von 0 verschieden ist und für die

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y^i(x_0) = 0$$

gilt.((iii) besagt, dass dies für alle x gilt. Hierbei hängen die Koeffizienten c_i aber von x ab.) Offensichtlich ist

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y^i$$

eine Lösung des Systems mit dem Anfangswert

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y^i(x_0) = 0$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf gibt es aber genau eine Lösung mit diesem Anfangswert und dies ist die konstante Funktion 0. Somit gilt für alle $x \in I$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y^i(x) = 0$$

und $y^1, \ldots, y^n$ sind linear abhängig. $\square$

Satz. *Man erhält sämtliche Lösungen des inhomogenen Systems*

$$y' = Ay + b$$

indem man zu sämtlichen Lösungen z des homogenen Systems $z' = Az$ eine spezielle Lösung des inhomogenen addiert.

Beweis.. Es sei y eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems und v eine weitere Lösung des inhomogenen Systems. Dann ist $z = v - y$ eine Lösung des homogenen Systems und $v = y + z$. $\square$

Satz. *Es sei I ein Intervall und A eine Matrix stetiger Funktionen $a_{i,j} : I \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Das Anfangswertproblem $y' = Ay + b$ mit $y(x_0) = y_0$ hat die eindeutige Lösung*

$$y(x) = Y(x)y_0 + Y(x) \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)b(t)dt$$

wobei Y das Lösungssystem mit $Y(x_0) = Id$ ist. (Das Integral bedeutet, dass koordinatenweise integriert wird.)

Beweis. Die Matrix $Y(t)$ ist für alle t invertierbar, weil $W(x_0) = 1$ und deshalb für alle x die Ungleichung $W(x) \neq 0$ gilt.

Wir wissen bereits, dass die Lösung eindeutig ist. Es reicht also nachzuweisen, dass y eine Lösung ist und den Anfangswert erfüllt.

Der Anfangswert ist erfüllt, weil $y(x_0) = Y(x_0)y_0 = y_0$.

$$\begin{aligned} y' &= Y'(x)y_0 + Y'(x) \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)b(t)dt + Y(x)Y^{-1}(x)b(x) \\ &= Y'(x)y_0 + Y'(x) \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)b(t)dt + b(x) \\ &= (AY(x))y_0 + AY(x) \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)b(t)dt + b(x) \\ &= A\left\{ Y(x)y_0 + Y(x) \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)b(t)dt \right\} + b(x) \\ &= Ay + b \end{aligned}$$

$\square$

Wir wollen noch zeigen, wie man die Lösung in dem letzten Satz findet. Man benutzt die Methode der *Variation der Konstanten*. Es sei

$$Y = \left(y^1, \ldots, y^n\right) \qquad \text{mit} \qquad Y(x_0) = Id$$

eine Basis des Lösungsraumes. Für alle Lösungen y des homogenen Systems gibt es $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y^i$$

Wir nehmen an, dass $c_1, \dots, c_n$ Funktionen von x sind, und wir nehmen an, dass es eine Lösung des inhomogenen Systems gibt, das die Form $\sum_{i=1}^n c_i y^i$ hat. Es gelten

$$y' = Ay \qquad\qquad y' = \sum_{i=1}^n c_i' y^i + \sum_{i=1}^n c_i y^{i\prime}$$

Deshalb soll

$$\sum_{i=1}^n c_i' y^i + \sum_{i=1}^n c_i y^{i\prime} = A\left(\sum_{i=1}^n c_i y^i\right) + b$$

gelten. Es folgt

$$\sum_{i=1}^n c_i' y^i = b \qquad \text{bzw.} \qquad Yc' = b$$

Also gilt $c' = Y^{-1}b$ oder

$$c(x) - c(x_0) = \int_{x_0}^x Y^{-1}(t)b(t)dt$$

Hieraus folgt

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x)y^i(x) = Y(x)c(x) = Y(x)\left\{c(x_0) + \int_{x_0}^x Y^{-1}(t)b(t)dt\right\}$$

Da $Y(x_0) = Id$ gilt, muss $c(x_0) = y_0$ gelten.

Bemerkung. *(Reduktionsverfahren von d'Alembert) Es sei I ein Intervall und A eine Matrix stetiger Funktionen $a_{i,j} : I \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$. Falls man eine spezielle Lösung v von $y' = Ay$ kennt, dann kann man dieses $n \times n$ System in ein $(n-1) \times (n-1)$ System überführen.*

Lösung. Für eine Lösung y machen wir den Ansatz

$$y = \phi v + z$$

wobei $\phi : I \to \mathbb{R}$ und $z : I \to \mathbb{R}^n$ mit $z = (0, z_2, \dots, z_n)$. Die Funktion z_1 ist also identisch 0. Es gelten

$$y' = \phi' v + \phi v' + z' \qquad\qquad Ay = A\phi v + Az$$

Weil wir annehmen, dass $y = \phi v + z$ eine Lösung ist

$$\phi' v + \phi v' + z' = A\phi v + Az$$

Da v eine Lösung ist, folgt $\phi v' = A\phi v$, und somit

$$\phi' v + z' = Az$$

Da z_1 identisch 0 ist

$$\phi' v_i + z_i' = \sum_{j=2}^{n} a_{i,j} z_j \qquad\qquad i = 1, \ldots, n$$

Insbesondere für $i = 1$ gilt

$$\phi' = \frac{1}{v_1} \sum_{j=2}^{n} a_{1,j} z_j$$

Für $i \geq 2$ gilt

$$z_i' = \sum_{j=2}^{n} a_{i,j} z_j - \phi' v_i = \sum_{j=2}^{n} a_{i,j} z_j - \frac{v_i}{v_1} \sum_{j=2}^{n} a_{1,j} z_j$$

$$z_i' = \sum_{j=2}^{n} \left(a_{i,j} - \frac{v_i}{v_1} a_{1,j} \right) z_j \qquad\qquad i = 2, \ldots, n$$

Damit haben wir das gesuchte $(n-1) \times (n-1)$ System. Wenn man dieses System gelöst hat, dann finden wir Lösungen des ursprünglichen Systems, indem wir ϕ aus

$$\phi' = \frac{1}{v_1} \sum_{j=2}^{n} a_{1,j} z_j$$

berechnen. $\square$

Beispiel. *Für $t \neq 0$ sei*

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{t} x - y \\ y' &= \tfrac{1}{t^2} x + \tfrac{2}{t} y \end{aligned}$$

Lösung. Wir wissen, dass $(t^2, -t)$ eine Lösung ist. Wir benutzen das Reduktionsverfahren von d'Alembert.

$$z' = \left(\tfrac{2}{t} - (\tfrac{-t}{t^2})(-1) \right) z \qquad \text{bzw.} \qquad z' = \tfrac{1}{t} z$$

$z(t) = t$ ist eine Lösung und damit Basis des 1-dimensonalen Lösungsraumes.

$$\phi'(t) = \tfrac{1}{t^2}(-1)t = -\tfrac{1}{t} \qquad \text{bzw.} \qquad \phi(t) = -\ln|t|$$

Die letzte Gleichung gilt bis auf Integrationskonstante.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = -\ln|t| \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \ln|t| \\ t + t\ln|t| \end{pmatrix}$$

ist eine Lösung und als Basis des Lösungsraumes erhalten wir

$$\begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -t^2 \ln|t| \\ t + t\ln|t| \end{pmatrix}$$

Die Wronski-Determinante ist

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \ln|t| \\ -t & t + t\ln|t| \end{pmatrix} = t^2(t + t\ln|t|) - t^3 \ln|t| = t^3$$

Man beachte, dass wir $t = 0$ ausgeschlossen hatten. $\square$

12. Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Falls die Matrix A konstant ist, d.h. die Koordinatenfunktionen konstant sind, dann lässt sich die allgemeine Lösung des Systems angeben. Wir stellen vorher einige einfache Betrachtungen an.

Es sei die $n \times n$ Matrix diagonalisierbar, also

$$A = BDB^{-1}$$

wobei D eine Diagonalmatrix ist.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & d_n \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem $y' = Ay$ können wir dann als

$$y' = BDB^{-1}y$$

schreiben. Dies bedeutet, dass

$$B^{-1}y' = DB^{-1}y \qquad \text{bzw.} \qquad (B^{-1}y)' = D(B^{-1}y)$$

gilt. Wir setzen $z = B^{-1}y$ und erhalten das Gleichungssystem

$$z' = Dz$$

Als Basis des Lösungsraumes dieses Systems erhalten wir

$$\begin{pmatrix} e^{d_1x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{d_2x} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e^{d_nx} \end{pmatrix}$$

und damit ist

$$B\begin{pmatrix} e^{d_1x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 0 \\ e^{d_2x} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e^{d_nx} \end{pmatrix}$$

eine Basis des Lösungsraumes des Systems $y' = Ay$. Die Wronski-Determinante berechnet sich zu

$$W(x) = \det(BZ(x)) = \det(B) \exp\left(x \sum_{i=1}^{n} d_i\right)$$

wobei $Z(x)$ die Matrix ist, deren Spalten die Basisvektoren des Systems $z' = Dz$ sind. $W(x) \neq 0$, weil B invertierbar ist und die Exponentialfunktion immer positiv ist.

Dies ist im Prinzip die Methode mit der man solche Systeme löst. Im allgemeinen lässt sich eine Matrix jedoch nicht diagonalisieren. Deshalb benutzen wir die Jordansche Normalform.

Satz. *(Jordansche Normalform) Jede reelle, quadratische Matrix A ist zu einer Matrix der folgenden Normalform ähnlich, die bis auf die Reihenfolge der Untermatrizen durch A eindeutig bestimmt ist.*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}$$

Die Untermatrizen J_i, $i = 1, \dots, r$ haben die Form

$$\begin{pmatrix} d_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 & d_i \end{pmatrix}$$

falls d_i ein reeller Eigenwert ist, und

$$\begin{pmatrix} \Re d_i & -\Im d_i & 1 & 0 & & & & & \\ \Im d_i & \Re d_i & 0 & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \Re d_i & -\Im d_i & 1 & 0 \\ & & & & & \Im d_i & \Re d_i & 0 & 1 \\ & & & & & & & \Re d_i & -\Im d_i \\ & & & & & & & \Im d_i & \Re d_i \end{pmatrix}$$

falls d_i ein komplexer Eigenwert der Matrix A ist. (Mit d_i tritt auch $\bar{d}_i$ als Eigenwert auf, es wird aber nur ein Block für d_i und $\bar{d}_i$ gewählt.)

Lemma. *Es sei $d \in \mathbb{R}$. Das $k \times k$ System*

$$z' = \begin{pmatrix} d & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 & d \end{pmatrix} z$$

hat die Spalten der Matrix

$$Z = e^{dx} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{3!}x^3 & \cdots & \frac{1}{(k-1)!}x^{k-1} \\ 0 & 1 & x & \frac{1}{2}x^2 & \cdots & \frac{1}{(k-2)!}x^{k-2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

als Fundamentalsystem.

Beweis. Für die Wronski-Determinante erhalten wir

$$\det(Z) = e^{dkx} > 0$$

Wir können Satz anwenden und es bleibt einzusehen, dass die Spaltenvektoren tatsächlich Lösungen sind. Es gilt

$$\begin{aligned} z_1' &= dz_1 + z_2 \\ z_2' &= dz_2 + z_3 \\ &\vdots \\ z_{k-1}' &= dz_{k-1} + z_k \\ z_k' &= dz_k \end{aligned}$$

Die i-te Spalte z^i der Lösungsmatrix ist

$$z_\ell^i(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(i-\ell)!} x^{i-\ell} e^{dx} & \text{falls } 1 \le \ell \le i \\ 0 & \text{falls } i+1 \le \ell \le k \end{cases}$$

Es folgt

$$(z_\ell^i)'(x) = \begin{cases} \dfrac{d}{(i-\ell)!} x^{i-\ell} e^{dx} + \dfrac{1}{(i-\ell-1)!} x^{i-\ell-1} e^{dx} & \text{falls } 1 \le \ell \le i-1 \\ de^{dx} & \text{falls } \ell = i \\ 0 & \text{falls } i+1 \le \ell \le k \end{cases}$$

bzw.

$$(z_\ell^i)'(x) = \begin{cases} dz_\ell^i(x) + z_{\ell+1}^i(x) & \text{falls } 1 \le \ell \le i-1 \\ dz_i^i(x) & \text{falls } \ell = i \\ 0 & \text{falls } i+1 \le \ell \le k \end{cases}$$

□

Lemma. *Es seien $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Das Differentialgleichungssystem*

$$\begin{aligned} v' &= \mu v - \nu w \\ w' &= \nu v + \mu w \end{aligned}$$

hat

$$e^{\mu x} \begin{pmatrix} \cos \nu x \\ \sin \nu x \end{pmatrix}, e^{\mu x} \begin{pmatrix} -\sin \nu x \\ \cos \nu x \end{pmatrix}$$

als Basis des Lösungsraumes.

Beweis. Für die Wronski-Determinante erhalten wir

$$\det \begin{pmatrix} e^{\mu x} \cos \nu x & -e^{\mu x} \sin \nu x \\ e^{\mu x} \sin \nu x & e^{\mu x} \cos \nu x \end{pmatrix} = e^{2\mu x}$$

Wir überprüfen, dass der erste Basisvektor eine Lösung ist.

$$
\begin{aligned}
v' &= (e^{\mu x}\cos \nu x)' = \mu e^{\mu x}\cos \nu x - \nu e^{\mu x}\sin \nu x = \mu v - \nu w \\
w' &= (e^{\mu x}\sin \nu x)' = \mu e^{\mu x}\sin \nu x + \nu e^{\mu x}\cos \nu x = \nu v + \mu w
\end{aligned}
$$

$\square$

Wir wollen noch einmal untersuchen, warum die Funktionen sin und cos bei den Lösungen auftreten. Die Eigenwerte der Matrix

$$
\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}
$$

sind $\mu + i\nu$ und $\mu - i\nu$. Diese Matrix ist ähnlich zu der *komplexen* Matrix

$$
\begin{pmatrix} \mu + i\nu & 0 \\ 0 & \mu - i\nu \end{pmatrix}
$$

weil

$$
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu + i\nu & 0 \\ 0 & \mu - i\nu \end{pmatrix}
$$

Die Lösungen des Systems

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \mu + i\nu & 0 \\ 0 & \mu - i\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

führt (ohne weitere mathematische Begründung) auf

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{(\mu+i\nu)t} = e^{\mu t}(\cos \nu t + i \sin \nu t) \\
y(t) &= e^{(\mu-i\nu)t} = e^{\mu t}(\cos \nu t - i \sin \nu t)
\end{aligned}
$$

Die letzten Gleichungen bezeichnet man als Euler-Identitäten.

Lemma. *Es seien $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ und*

$$
z' = \begin{pmatrix}
\mu & -\nu & 1 & 0 & & & & & & \\
\nu & \mu & 0 & 1 & & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & \mu & -\nu & 1 & 0 \\
 & & & & & \nu & \mu & 0 & 1 \\
 & & & & & & & \mu & -\nu \\
 & & & & & & & \nu & \mu
\end{pmatrix} z
$$

Dann bilden die Spalten der Matrix

$$
Z = e^{\mu x}\begin{pmatrix}
\cos \nu x & -\sin \nu x & x\cos \nu x & -x\sin \nu x & \cdots & \cdots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cos \nu x & -\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\sin \nu x \\
\sin \nu x & \cos \nu x & x\sin \nu x & x\cos \nu x & \cdots & \cdots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\sin \nu x & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cos \nu x \\
 & & \cos \nu x & -\sin \nu x & \cdots & \cdots & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\cos \nu x & -\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\sin \nu x \\
 & & \sin \nu x & \cos \nu x & \cdots & \cdots & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\sin \nu x & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\cos \nu x \\
 & & & & \ddots & & & \vdots \\
 & & & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & & \cos \nu x & -\sin \nu x \\
 & & & & & & \sin \nu x & \cos \nu x
\end{pmatrix}
$$

ein Fundamentalsystem.

Beweis. Wir beginnen mit den beiden letzten Zeilen.

$$\begin{aligned} z'_{n-1} &= \mu z_{n-1} - \nu z_n \\ z'_n &= \nu z_{n-1} + \mu z_n \end{aligned}$$

Mit Lemma erhalten wir sofort die Lösungen

$$\begin{pmatrix} z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} = c_{n-1} e^{\mu x} \begin{pmatrix} \cos \nu x \\ \sin \nu x \end{pmatrix} + c_n e^{\mu x} \begin{pmatrix} -\sin \nu x \\ \cos \nu x \end{pmatrix} \qquad c_{n-1}, c_n \in \mathbb{R}$$

Die nächsten beiden Zeilen lauten

$$\begin{aligned} z'_{n-3} &= \mu z_{n-3} - \nu z_{n-2} + z_{n-1} \\ z'_{n-2} &= \nu z_{n-3} + \mu z_{n-2} + z_n \end{aligned}$$

Da wir z_{n-1} und z_n gerade bestimmt haben, erhalten wir

$$\begin{aligned} z'_{n-3} &= \mu z_{n-3} - \nu z_{n-2} + c_{n-1} e^{\mu x} \cos \nu x - c_n e^{\mu x} \sin \nu x \\ z'_{n-2} &= \nu z_{n-3} + \mu z_{n-2} + c_{n-1} e^{\mu x} \sin \nu x + c_n e^{\mu x} \cos \nu x \end{aligned}$$

Mit Satz erhalten wir

$$\begin{pmatrix} z_{n-3} \\ z_{n-2} \end{pmatrix} = c_{n-3} e^{\mu x} \begin{pmatrix} \cos \nu x \\ \sin \nu x \end{pmatrix} + c_{n-2} e^{\mu x} \begin{pmatrix} -\sin \nu x \\ \cos \nu x \end{pmatrix} +$$

$$e^{\mu x} \begin{pmatrix} \cos \nu x & -\sin \nu x \\ \sin \nu x & \cos \nu x \end{pmatrix} \int_0^x e^{-\mu t} \begin{pmatrix} \cos \nu t & \sin \nu t \\ -\sin \nu t & \cos \nu t \end{pmatrix} e^{\mu x} \left(c_{n-1} \begin{pmatrix} \cos \nu x \\ \sin \nu x \end{pmatrix} + c_n \begin{pmatrix} -\sin \nu x \\ \cos \nu x \end{pmatrix} \right) dt$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_{n-3} \\ z_{n-2} \end{pmatrix} &= c_{n-3} e^{\mu x} \begin{pmatrix} \cos \nu x \\ \sin \nu x \end{pmatrix} + c_{n-2} e^{\mu x} \begin{pmatrix} -\sin \nu x \\ \cos \nu x \end{pmatrix} \\ &\quad + e^{\mu x} \begin{pmatrix} \cos \nu x & -\sin \nu x \\ \sin \nu x & \cos \nu x \end{pmatrix} \int_0^x \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt mit Induktion. $\square$

Satz. *Es sei A eine reelle $n \times n$ Matrix und J eine Jordan-Normalform von A, $J = B^{-1}AB$.*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}$$

$Lös_i$, $i = 1, \ldots, r$, sei ein Fundamentalsystem der Gleichung $z' = J_i z$. Dann ist

$$B \begin{pmatrix} Lös_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Lös_r \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.

Um ein Differentialgleichungssystem zu lösen, hat man also die Jordan-Normalform der Matrix A und die dazugehörige Transformationsmatrix zu berechnen. Im folgenden beschreiben wir einen Weg, bei dem dies nicht explizit gemacht wird.

Beispiel.

$$\begin{aligned} x' &= -2x + y - 2z \\ y' &= x - 2y + 2z \\ z' &= 3x - 3y + 5z \end{aligned}$$

Es ist

$$e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Lösungsraumes.

Lösung. Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-2-\lambda)\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -3 & 5-\lambda \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5-\lambda \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 1 & -2-\lambda \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \\ &= (-2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) - (-1-\lambda) - 2(3+3\lambda) \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 \\ &= -(\lambda+1)^2(\lambda-3) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind 3 und -1 mit algebraischer Vielfachheit 2. Die Jordansche Normalform hat also (bis auf Permutation der Blöcke) die Gestalt

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Deshalb hat nach Satz die Lösung die Form

$$\begin{aligned} x(t) &= (a_1 + b_1 t)e^{-t} + c_1 e^{3t} \\ y(t) &= (a_2 + b_2 t)e^{-t} + c_2 e^{3t} \\ z(t) &= (a_3 + b_3 t)e^{-t} + c_3 e^{3t} \end{aligned}$$

(Die Koeffizienten b_1, b_2, b_3 sind sämtlich 0, falls die Jordan-Form eine Diagonalmatrix ist.) Wir setzen nun die Lösungen in das Differentialgleichungssystem ein und erhalten ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten.

Wir benutzen zunächst die erste Gleichung.

$$x'(t) = -2x + y - 2z$$

$$
\begin{aligned}
&-(a_1+b_1t)e^{-t}+b_1e^{-t}+3c_1e^{3t}\\
&\quad=-2((a_1+b_1t)e^{-t}+c_1e^{3t})+(a_2+b_2t)e^{-t}+c_2e^{3t}-2((a_3+b_3t)e^{-t}+c_3e^{3t})
\end{aligned}
$$

Es folgt, dass für alle $t \in \mathbb{R}$

$$
e^{3t}(-5c_1+c_2-2c_3)+e^{-t}(-b_1-a_1+a_2-2a_3)+te^{-t}(-b_1+b_2-2b_3)=0
$$

gilt. Die Funktionen e^{3t}, e^{-t} und te^{-t} sind im Raum $C(\mathbb{R})$ linear unabhängig. Deshalb folgt

$$
\begin{aligned}
-5c_1+c_2-2c_3&=0\\
-b_1-a_1+a_2-2a_3&=0\\
-b_1+b_2-2b_3&=0
\end{aligned}
$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir aus der zweiten Gleichung

$$
\begin{aligned}
a_1-a_2+2a_3-b_2&=0\\
b_1-b_2+2b_3&=0\\
c_1-5c_2+2c_3&=0
\end{aligned}
$$

Aus der dritten Gleichung folgt

$$
\begin{aligned}
3a_1-3a_2+6a_3-b_3&=0\\
3b_1-3b_2+6b_3&=0\\
3c_1-3c_2+2c_3&=0
\end{aligned}
$$

Insgesamt haben wir ein lineares Gleichungssystem mit 9 Gleichungen und 9 Unbekannten. Als Lösungen erhalten wir $c_2=-c_1$, $c_3=-3c_1$, $b_1=b_2=b_3=0$ und $a_2=a_1+2a_3$. Die Konstanten c_1, a_1 und a_3 können wir frei wählen.

$$
\begin{aligned}
x(t)&=a_1e^{-t}+c_1e^{3t}\\
y(t)&=(a_1+2a_3)e^{-t}-c_1e^{3t}\\
z(t)&=a_3e^{-t}-3c_1e^{3t}
\end{aligned}
$$

□

Beispiel. *Das Gleichungssystem*

$$
\begin{aligned}
x'&=3x+2y\\
y'&=-5x+y
\end{aligned}
$$

hat

$$
e^{2t}\begin{pmatrix}\cos 3t\\ -\frac{1}{2}\cos 3t-\frac{3}{2}\sin 3t\end{pmatrix}, e^{2t}\begin{pmatrix}\sin 3t\\ \frac{3}{2}\cos 3t-\frac{1}{2}\sin 3t\end{pmatrix}
$$

als Basis des Lösungsraumes.

Lösung. Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = (\lambda - (2+3i))(\lambda - (2-3i))$$

Die reelle Jordansche Normalform ist

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Nach Satz hat die Lösung die Form

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^{2t}\cos 3t + be^{2t}\sin 3t \\ y(t) &= ce^{2t}\cos 3t + de^{2t}\sin 3t \end{aligned}$$

Wir setzen diese Lösungen in die Gleichungen ein, um die Koeffizienten zu bestimmen. Die Gleichung $x' = 3x + 2y$ liefert

$$\begin{aligned} & a(2e^{2t}\cos 3t - 3e^{2t}\sin 3t) + b(2e^{2t}\sin 3t + 3e^{2t}\cos 3t) \\ & = 3(ae^{2t}\cos 3t + be^{2t}\sin 3t) + 2(ce^{2t}\cos 3t + de^{2t}\sin 3t) \end{aligned}$$

Dies liefert

$$(a - 3b + 2c)e^{2t}\cos 3t + (3a + b + 2d)e^{2t}\sin 3t = 0$$

Die Funktionen $\cos 3t$ und $\sin 3t$ sind linear unabhängig. Also gilt

$$\begin{aligned} a - 3b + 2c &= 0 \\ 3a + b + 2d &= 0 \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir aus der Gleichung $y' = -5x + y$

$$\begin{aligned} -5a - c - 3d &= 0 \\ -5b + 3c - d &= 0 \end{aligned}$$

Es folgt $c = -\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b$ und $d = -\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^{2t}\cos 3t + be^{2t}\sin 3t \\ y(t) &= (-\tfrac{1}{2}a + \tfrac{3}{2}b)e^{2t}\cos 3t + (-\tfrac{3}{2}a - \tfrac{1}{2}b)e^{2t}\sin 3t \end{aligned}$$

□

13. Matrixfunktionen

Wir beschreiben hier eine weitere Methode, um eine Lösung eines Linearen Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten anzugeben. Für das Anfangswertproblem

$$y' = Ay \qquad\qquad y(x_0) = y_0$$

finden wir in völliger Analogie zum skalaren Fall

$$y(x) = e^{(x-x_0)A}y_0$$

als Lösung. Dazu müssen wir zunächst die Matrixexponentialfunktion e^A für $n \times n$ Matrizen A definieren.

$\mathcal{M}_n$ sei der Vektorraum aller $n \times n$ Matrizen. Als Norm wählen wir die Operatornorm

$$\|A\|_{\mathrm{Op}} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Im nächsten Lemma stellen wir sicher, dass dies tatsächlich eine Norm ist.

Lemma. *Für alle $A, B \in \mathcal{M}_n$, alle $y \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gelten*

(i) $\|A + B\|_{\mathrm{Op}} \le \|A\|_{\mathrm{Op}} + \|B\|_{\mathrm{Op}}$

(ii) $\|tA\|_{\mathrm{Op}} = |t|\|A\|_{\mathrm{Op}}$

(iii) $\|A\|_{\mathrm{Op}} = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(iv) $\|Ay\| \le \|A\|_{\mathrm{Op}}\|y\|$

(v) $\|AB\|_{\mathrm{Op}} \le \|A\|_{\mathrm{Op}}\|B\|_{\mathrm{Op}}$

Beweis. (i)

$$\begin{aligned}\|A + B\|_{\mathrm{Op}} &= \max_{\|x\|=1} \|(A + B)x\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax + Bx\| \\ &\le \max_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \le \max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\|_{\mathrm{Op}} + \|B\|_{\mathrm{Op}}\end{aligned}$$

(v)

$$\|AB\|_{\mathrm{Op}} = \max_{\|x\|=1} \|(AB)x\| = \max_{\|x\|=1} \|A(Bx)\|$$

Mit (iv) folgt weiter

$$\|AB\|_{\mathrm{Op}} \le \max_{\|x\|=1} \|A\|_{\mathrm{Op}}\|Bx\| = \|A\|_{\mathrm{Op}}\|B\|_{\mathrm{Op}}$$

□

Lemma. $(\mathcal{M}_n, \|\cdot\|_{\mathrm{Op}})$ *ist ein Banachraum.*

Bweis. $\mathcal{M}_n$ ist isomorph zum $\mathbb{R}^{n^2}$. Nach Lemma sind auf $\mathbb{R}^{n^2}$ alle Normen äquivalent. $\mathbb{R}^{n^2}$ ist also bzgl. jeder Norm vollständig. □

Lemma. *Es seien $A_k, B_k \in \mathcal{M}_n$, $k \in \mathbb{N}$, mit*
$$A = \lim_{k\to\infty} A_k \qquad\qquad B = \lim_{k\to\infty} B_k$$
Dann gelten

(i) $A + B = \lim_{k\to\infty}(A_k + B_k)$

(ii) $AB = \lim_{k\to\infty} A_k B_k$

Beweis. (ii)
$$\begin{aligned}\|AB - A_kB_k\|_{\mathrm{Op}} &= \|AB - AB_k + AB_k - A_kB_k\|_{\mathrm{Op}}\\ &\le \|AB - AB_k\|_{\mathrm{Op}} + \|AB_k - A_kB_k\|_{\mathrm{Op}}\\ &\le \|A\|_{\mathrm{Op}}\|B - B_k\|_{\mathrm{Op}} + \|B_k\|_{\mathrm{Op}}\|A - A_k\|_{\mathrm{Op}}\end{aligned}$$
□

Satz. *(i) Für alle $A \in \mathcal{M}_n$ ist*
$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$
wohldefiniert, wobei wir $A^0 = I$ setzen.

(ii) Für alle $A, B \in \mathcal{M}_n$ mit $AB = BA$ gilt
$$e^A e^B = e^{A+B}$$
(iii)
$$e^0 = I$$

Beweis. (i) Da $\mathcal{M}_n$ vollständig ist, reicht es zu zeigen, dass
$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k \qquad\qquad m \in \mathbb{N}$$
eine Cauchy-Folge ist. Es sei $\ell > m$
$$\left\| \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} A^k - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{\ell} \frac{1}{k!} A^k \right\| \le \sum_{k=m+1}^{\ell} \frac{1}{k!} \left\| A^k \right\|$$
Mit Lemma folgt, dass dies kleiner als
$$\sum_{k=m+1}^{\ell} \frac{1}{k!} \|A\|^k$$
ist.

(iii)
$$e^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 0^0 = I$$
□

Beispiel. *(i)*

$$\exp\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \exp\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(ii)

$$\exp\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(iii)

$$\exp\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e & e\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(iv)

$$\exp\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e & e-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Insbesodere gilt

$$\exp\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \neq \exp\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\exp\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \neq \exp\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Hieraus folgt

$$\exp\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = I + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}^n = I + (e-1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Für alle $n = 2, 3, \ldots$ gilt

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Hiermit folgt

$$\exp\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = I + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Für alle $n = 1, 2, \ldots$ gilt

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Deshalb gilt

$$\exp\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = I + \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = I + (e-1)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\square$

Satz. *Für alle $A \in \mathcal{M}_n$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\frac{d}{dx} e^{xA} = A e^{xA}$$

(e^{xA} ist eine $n \times n$ Matrix. Die Ableitung wird koordinatenweise vorgenommen.)

Beweis.

$$\frac{d}{dx} e^{xA} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{(x+h)A} - e^{xA}}{h}$$

Mit Satz folgt

$$\frac{d}{dx} e^{xA} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(e^{hA} e^{xA} - e^{xA} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(e^{hA} - I \right) e^{xA}$$

Mit der Definition der Matrixexponentialfunktion erhalten wir

$$\frac{d}{dx} e^{xA} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (hA)^k - I \right) e^{xA} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (hA)^k \right) e^{xA}$$

Mit Lemma folgt

$$\frac{d}{dx} e^{xA} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (hA) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (hA)^{k-1} \right) e^{xA} = \lim_{h \to 0} A \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (hA)^{k-1} \right) e^{xA}$$

Nun vertauschen wir Summe und Limes.

$$\frac{d}{dx} e^{xA} = A e^{xA}$$

$\square$

Satz.

$$y(x) = e^{(x-x_0)A} y_0$$

ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$ mit $y(x_0) = y_0$

Beweis. Wir weisen nach, dass es sich um eine Lösung handelt.

$$y' = \frac{d}{dx} \left(e^{(x-x_0)A} y_0 \right) = A e^{(x-x_0)A} y_0 = Ay$$

Ausserdem gilt

$$y(x_0) = e^{0A} y_0 = y_0$$

$\square$

Beispiel. *(i) Es sei*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$e^{xA} = I + \tfrac{1}{n}(e^{nx} - 1)A$$

(iii)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$e^{xA} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

(iv) Es seien $A, B \in \mathcal{M}_n$ und B sei invertierbar. Dann gilt

$$B^{-1} e^A B = e^{B^{-1}AB}$$

Beweis. (i) Es gilt

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Es folgt weiter

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^m \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^m \frac{\lambda_2^k}{k!} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & \sum_{k=0}^m \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}$$

(ii) Es gilt $A^0 = I$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $A^k = n^{k-1}A$. Damit folgt

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xA)^k}{k!} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k n^{k-1}}{k!} A = I + \tfrac{1}{n} A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = I + \tfrac{1}{n} A(e^{nx} - 1)$$

(iii) Es gilt

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-I$$

Hieraus folgt für $k=1,2,\dots$

$$A^{2k}=(-1)^k I \qquad A^{2k+1}=(-1)^k A$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{xA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(xA)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(xA)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(xA)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}I+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}A \\ &= (\cos x)I+(\sin x)A \end{aligned}$$

□

Satz. *Es sei A eine reelle $n\times n$ Matrix. Dann gilt*

$$e^A=\lim_{k\to\infty}(I+\frac{1}{k}A)^k$$

Satz. *Es sei A eine reelle $n\times n$ Matrix. Dann gilt*

$$\det(e^A)=e^{trA}$$

Wir setzen

$$\ln A=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(A-I)^k$$

Hierbei übernimmt die Einheitsmatrix I die Rolle der Zahl 1.

Lemma. *(i) Für alle $A\in\mathcal{M}_n$ mit $\|A-I\|_{\mathrm{Op}}<1$ konvergiert die Reihe*

$$\ln A=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(A-I)^k$$

(ii) Für alle $A\in\mathcal{M}_n$ mit $\|A-I\|_{\mathrm{Op}}<1$ gilt

$$e^{\ln A}=A$$

14. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Es seien $a_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$ und $b : I \to \mathbb{R}$ stetige, reellwertige Funktionen auf einem Intervall I.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b$$

heisst lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung. Falls $b = 0$ gilt, dann heisst die Differentialgleichung homogen.

Unter dem Anfangswertproblem verstehen wir hier

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + & a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b \\ & \text{mit } \ y(x_0) = y_0(0), y'(x_0) = y_0(1), \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0(n-1) \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Problems führen wir auf ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung zurück. Wir nehmen im folgenden an, dass $a_n = 1$ bzw. dass wir durch a_n dividieren können.

Lemma. *(i) Es sei y Lösung von*

$$\begin{aligned} y^{(n)} + & a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b \\ & \textit{mit } \ y(x_0) = y_0(0), y'(x_0) = y_0(1), \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0(n-1) \end{aligned}$$

Dann ist $z = (y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ Lösung von

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

mit $z(x_0) = (y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0))$.

(ii) Es sei $z = (z_1, \dots, z_n)$ Lösung des obigen Systems mit $z(x_0) = (y_0(0), \dots, y_0(n-1))$. Dann ist z_1 Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y^{(n)} + & a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b \\ & \textit{mit } \ y(x_0) = y_0(0), y'(x_0) = y_0(1), \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0(n-1) \end{aligned}$$

und es gilt für $i = 1, \dots, n$, dass $z_i = z_1^{(i-1)}$.

Beweis. z ist genau dann Lösung des Systems, falls

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_3 \\ &\vdots \\ z_{n-1}' &= z_n \\ z_n' &= -a_0 z_1 - a_1 z_2 - \dots - a_{n-1} z_n + b \end{aligned}$$

Es folgt sofort, dass

$$\begin{aligned} z_2 &= z_1' \\ z_3 &= z_1'' \\ &\vdots \\ z_n &= z_1^{(n-1)} \\ z_1^{(n)} + a_{n-1} z_1^{(n-1)} + \cdots + a_0 z_1 &= b \end{aligned}$$

$y = z_1$ ist also Lösung der Differentialgleichung n-ter Ordnung. $\square$

Satz. *(i) Die Lösungen der homogenen Gleichung*

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$$

bilden einen n-dimensionalen Vektorraum differenzierbarer Funktionen.

(ii) Ein System von Lösungen $y_1, \dots, y_n$ ist genau dann eine Basis, wenn die Wronski-Determinante

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

an einer Stelle (überall) von 0 verschieden ist.

(iii) Für die Wronski-Determinante gilt

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(- \int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t) dt \right)$$

(iv) Die Lösungen der inhomogenen Gleichung erhält man, indem man zu den Lösungen der homogenen Gleichung eine spezielle Lösung der inhomogenen addiert.

(v) Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) (-1)^{n+i} \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{W(t)} W_i(t) dt$$

wobei $W_i(t)$ die Determinante der $(n-1) \times (n-1)$-Matrix ist, die aus

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

durch Streichen der i-ten Spalte und der letzten Zeile entsteht. Die Lösung y erfüllt die Gleichung für den Anfangswert $y_0 = 0$.

Beweis. Alle Behauptungen wurden bereits für lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung bewiesen. Nach Lemma können wir lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung in ein lineares Differentialgleichungssystem transformieren.

$y_1, \ldots, y_n$ sind nach Lemma genau dann Lösungen der Differentialgleichung, wenn

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} y_n \\ y_n' \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Lösungen des zugeordneten, linearen Systems erster Ordnung sind.

Wir müssen noch überprüfen, dass $y_1, \ldots, y_n$ genau dann linear unabhängig sind, wenn die obigen Vektoren linear unabhängig sind.

$$\forall x \in I : \sum_{i=1}^{n} c_i \begin{pmatrix} y_i(x) \\ y_i'(x) \\ \vdots \\ y_i^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = 0$$

$$\forall x \in I \forall k, 0 \le k \le n-1 : \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(k)}(x) = 0$$

$$\forall x \in I : \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) = 0$$

(iii) Mit Satz folgt

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr}(A(t)) dt \right) = W(x_0) \exp\left(- \int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t) dt \right)$$

(v) Nach Satz erhalten wir als spezielle Lösung des inhomogenen Systems

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = Y(x) y_0 + Y(x) \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t) B(t) dt$$

mit $B(x) = (0, \ldots, 0, b(x))$. Für $y_0 = 0$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = Y(x) \int_{x_0}^{x} b(t) \begin{pmatrix} Y_{1,n}^{-1}(t) \\ Y_{2,n}^{-1}(t) \\ \vdots \\ Y_{n,n}^{-1}(t) \end{pmatrix} dt$$

Das Ergebnis folgt mit der Formel von Cramer für die Inverse einer Matrix. $\square$

Wir wenden uns nun Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu. Den Eigenwerten der Matrizen im Fall von Systemen entsprechen hier die Nullstellen des Polynoms

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Wir bezeichnen dies als das charakteristische Polynom der Differentialgleichung.

Satz. *Es sei*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$$

eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Falls λ eine reelle, k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, dann sind

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$$

Lösungen der Differentialgleichung.

Falls $\lambda = \mu + i\nu$ eine komplexe, k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, dann sind

$$\begin{gathered} e^{\mu x}\cos\nu x, xe^{\mu x}\cos\nu x, x^2 e^{\mu x}\cos\nu x, \ldots, x^{k-1}e^{\mu x}\cos\nu x \\ e^{\mu x}\sin\nu x, xe^{\mu x}\sin\nu x, x^2 e^{\mu x}\sin\nu x, \ldots, x^{k-1}e^{\mu x}\sin\nu x \end{gathered}$$

Lösungen der Differentialgleichung. Die Gesamtheit dieser Lösungen bildet eine Basis des Lösungsraumes.

Beweis. Das Ergebnis lässt sich aus Satz für Systeme erster Ordnung herleiten. Wir wollen hier noch untersuchen, wie man auf diese Lösungen kommt. Dies geschieht am einfachsten mit dem e-Ansatz. Wir nehmen an, dass die Lösung von der Form $y(x) = e^{\lambda x}$ ist. Dann folgt

$$\begin{gathered} (e^{\lambda x})^{(n)} + a_{n-1}(e^{\lambda x})^{(n-1)} + \cdots + a_0 e^{\lambda x} = 0 \\ \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \cdots + a_0 e^{\lambda x} = 0 \\ \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \end{gathered}$$

λ muss also Nullstelle des charakteristischen Polynoms sein. Falls n verschiedene reelle Nullstellen des charakteristischen Polynoms vorliegen, dann bilden $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ eine Basis des Lösungsraumes. Die Wronski-Determinante dieses Systems ist

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$$

$$W(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i x}\right) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Hierbei handelt es sich um die Vandermondesche Determinante.

$$W(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i x}\right) \prod_{1\leq i<j\leq n} (\lambda_i - \lambda_j)$$

Da alle Eigenwerte verschieden sind, gilt $W(x) \neq 0$. $\square$

Beispiel (i) Mathematisches Pendel

Eine Masse m ist an einem Faden der Länge ℓ aufgehängt. Aus dem Newtonschen Gesetz folgt für die Bewegungsgleichung

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\ell\frac{d^2\phi}{dt^2} = -mg\sin\phi$$

$s(t)$ ist die vom Pendel zurückgelegte Wegstrecke. Für kleine Ausschläge des Pendels, d.h. für kleine Winkel ϕ gilt $\sin\phi \sim \phi$ und

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\phi$$

beschreibt approximativ die Bewegung. Mit Satz lässt sich sofort die Lösung angeben.

$$\lambda^2 + \tfrac{g}{\ell} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Wir erhalten

$$\cos\sqrt{\tfrac{g}{\ell}}t, \sin\sqrt{\tfrac{g}{\ell}}t$$

als Fundamentalsystem.

Die obige Lösung ist nur für kleine Ausschläge approximativ richtig. Wir wollen nun die exakte Lösung bestimmen.

Das Pendel habe zur Zeit $t = 0$ eine Auslenkung um den Winkel θ_0. Die Funktion $t(\theta)$ gibt an, wieviel Zeit vergeht, bis sich das Pendel von der Auslenkung θ_0 zur Auslenkung θ bewegt. Dann gilt [Spi]

$$t(\theta) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{\ell}{g}}\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\sqrt{(\sin\frac{\theta_0}{2})^2 - (\sin\frac{\phi}{2})^2}}d\phi \qquad \theta_0 < 0$$

Für eine volle Periode P erhält man damit

$$P = 4\sqrt{\tfrac{\ell}{g}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}d\phi \qquad k = \sin\frac{\theta_0}{2}$$

$$P = 2\pi\sqrt{\tfrac{\ell}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right\}$$

Das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}d\phi$$

ist ein elliptisches Integral. Allgemein werden $\int R(x,y)dx$ als elliptische Integrale bezeichnet, wenn R eine rationale Funktion von x und y ist und y^2 ein Polynom dritten oder vierten Grades in x ist.

Wir leiten nun die beiden Formeln her.

$$\theta''(t) = -\frac{g}{\ell}\sin\theta(t)$$

Als Anfangspunkt wählen wir $t_0 = 0$, $\theta(0) = \theta_0$ und $\theta'(0) = 0$, d.h. das Pendel ist an einem Umkehrpunkt. Wir substituieren $u = \theta'$.

$$\theta'' = u' = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{d\theta}u$$

$$\frac{du}{d\theta}u = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{du}{d\phi}ud\phi = -\frac{g}{\ell}\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\phi d\phi$$

$$\tfrac{1}{2}u(\theta)^2 - \tfrac{1}{2}u(\theta_0)^2 = \frac{g}{\ell}\cos\theta - \frac{g}{\ell}\cos\theta_0$$

Wegen $u(\theta_0) = u(\theta(0)) = \theta'(0) = 0$

$$u(\theta) = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}$$

Wegen $u(\theta) = u(\theta(t)) = \theta'(t) = \frac{d\theta}{dt}$

$$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{dt}{d\phi}d\phi = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{1}{\sqrt{\cos\phi - \cos\theta_0}}d\phi$$

Mit $t(\theta_0) = 0$ erhalten wir

$$t(\theta) = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{1}{\sqrt{\cos\phi - \cos\theta_0}}d\phi$$

Mit $\cos\theta = 2\sin^2(\frac{\theta}{2}) - 1$ folgt

$$t(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{1}{\sqrt{\sin^2(\frac{\theta_0}{2}) - \sin^2(\frac{\phi}{2})}}d\phi$$

Für eine ganze Periode erhält man

$$P = 4\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{|\theta_0|}\frac{1}{\sqrt{\sin^2(\frac{\theta_0}{2}) - \sin^2(\frac{\phi}{2})}}d\phi$$

Wir substituieren

$$\sin\frac{\phi}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\psi$$

Es gilt

$$(\cos\frac{\phi}{2})\frac{1}{2}d\phi = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\psi d\psi$$

Es folgt

$$d\phi = \frac{2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\psi}{\cos\frac{\phi}{2}}d\psi = \frac{2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}d\psi$$

Wir erhalten das gewünschte Ergebnis. Die asymptotische Formel erhalten wir mit

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$$

$$\begin{aligned} P &= 4\sqrt{\tfrac{\ell}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}d\phi \\ &= 4\sqrt{\tfrac{\ell}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1 + \tfrac{1}{2}k^2\sin^2\phi + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\phi + \cdots\right\}d\phi \end{aligned}$$

Mit der Formel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\phi d\phi = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\frac{\pi}{2}$$

folgt nun das Ergebnis.

(ii) Harmonischer Oszillator
Die Differentialgleichung

$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad y(0) = y_0 \quad y'(0) = y_1$$

wobei $a, b, c, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ gilt, beschreibt verschiedene physikalische Probleme.

Eine Masse, die an einer Feder aufgehängt ist, genügt für kleine Schwingungen der Gleichung

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

wobei m die Masse, k die Federkonstante und r der Reibungskoeffizient sind. Mit $\rho = \frac{1}{2}\frac{r}{m}$ und $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ erhalten wir

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Man bezeichnet diese als die Gleichung des gedämpften harmonischen Oszillators. Fehlt der Term $2\rho\dot{x}$, so spricht man vom ungedämpften harmonischen Oszillator.

Ein Stromkreis mit Widerstand R, Kapazität C und Induktivität L genügt der Differentialgleichung

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}Q=E(t)$$

wobei $E(t)$ die angelegte Spannung, Q die Ladung des Kondensators und I der Strom ist.

$$L\ddot{Q}+R\dot{Q}+\frac{1}{C}Q=E(t)$$

(iii) Gekoppelte Pendel

Wir betrachten zwei Pendel mit gleicher Masse m und gleicher Länge ℓ. Sie seien durch eine Feder mit der Federkonstanten k gekoppelt. Wenn sich das System in Ruhelage befindet, sollen beide Pendel keinen Ausschlag haben. Die Ausschläge werden in $x(t)$ und $y(t)$ angegeben. Für kleine Ausschläge lässt sich das System der Bewegungsgleichungen approximativ mit

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{mg}{\ell}x-k(x-y) \\ m\ddot{y} &= -\frac{mg}{\ell}y-k(y-x) \end{aligned}$$

angeben. Wir wollen nun ein Fundamentalsystem finden und dann die Lösung für die Anfangswerte

$$x(0)=y(0)=\dot{y}(0)=0 \qquad\qquad \dot{x}(0)=1$$

berechnen. Bei diesem Anfangswertproblem handelt es sich physikalisch darum, dass sich das System in Ruhelage befindet und dann eine Kugel angestossen wird. Wir transformieren das System in ein System erster Ordnung.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ \dot{y} &= v \\ \dot{u} &= -(\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m})x+\frac{k}{m}y \\ \dot{v} &= \frac{k}{m}x-(\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m})y \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

mit $\alpha=-(\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m})$ und $\beta=\frac{k}{m}$. Wir bestimmen das charakteristische Polynom.

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ -\alpha & -\beta & \lambda & 0 \\ -\beta & -\alpha & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^4-2\alpha\lambda^2+\alpha^2-\beta^2$$

Als Eigenwerte erhalten wir

$$\lambda^2 = \alpha \pm \sqrt{\beta^2} = \alpha \pm \beta = -(\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m}) \pm \frac{k}{m}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad\qquad \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{\frac{g}{\ell} + 2\frac{k}{m}}$$

Als eine Jordansche Normalform der Matrix erhalten wir

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{g}{\ell}} & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{g}{\ell}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{g}{\ell} + 2\frac{k}{m}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{g}{\ell} + 2\frac{k}{m}} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Spalten der Matrix

$$Z = \begin{pmatrix} \cos\mu t & -\sin\mu t & 0 & 0 \\ \sin\mu t & \cos\mu t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\nu t & -\sin\nu t \\ 0 & 0 & \sin\nu t & \cos\nu t \end{pmatrix}$$

mit $\mu = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ und $\nu = \sqrt{\frac{g}{\ell} + 2\frac{k}{m}}$ sind eine Basis des Lösungsraumes von $z' = Jz$. Die Lösungen des ursprünglichen Systems erster Ordnung sind von der Form BZ wobei B eine $n \times n$ Matrix ist. Die erste Spalte dieser Matrix ist

$$\begin{pmatrix} b_{1,1}\cos\mu t + b_{1,2}\sin\mu t \\ b_{2,1}\cos\mu t + b_{2,2}\sin\mu t \\ b_{3,1}\cos\mu t + b_{3,2}\sin\mu t \\ b_{4,1}\cos\mu t + b_{4,2}\sin\mu t \end{pmatrix}$$

Die anderen Spalten sehen ähnlich aus. Wir setzen diese Lösungen in das ursprüngliche Gleichungssytem erster Ordnung ein und erhalten als Basis für den Lösungsraum

$$\begin{pmatrix} \cos\mu t \\ \cos\mu t \\ -\mu\sin\mu t \\ -\mu\sin\mu t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\mu t \\ \sin\mu t \\ \mu\cos\mu t \\ \mu\cos\mu t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\nu t \\ -\cos\nu t \\ -\nu\sin\nu t \\ \nu\sin\nu t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\nu t \\ -\sin\nu t \\ \nu\cos\nu t \\ -\nu\cos\nu t \end{pmatrix}$$

Als Basis des Lösungsraumes des Systems

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{mg}{\ell}x - k(x-y) \\ m\ddot{y} &= -\frac{mg}{\ell}y - k(y-x) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\cos\mu t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \sin\mu t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \cos\nu t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \sin\nu t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dieses Lösungssystem haben wir so erhalten: Aus den Basisvektoren für das System erster Ordnung haben wir alle Koordinaten gestrichen, die nicht der x- oder y-Koordinate entsprechen, also die dritte und vierte Koordinate.

Wir bestimmen nun die Lösungen mit

$$x(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0 \qquad\qquad \dot{x}(0) = 1$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \cos \mu t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \sin \mu t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cos \nu t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_4 \sin \nu t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aus

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

folgt $c_1 = c_3 = 0$. Aus

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = c_2 \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

folgt $1 = c_2\mu + c_4\nu$ und $c_2\mu = c_4\nu$, also

$$c_2 = \frac{1}{2\mu} \qquad\qquad c_4 = \frac{1}{2\nu}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{\ell}{g}} \sin\left(\sqrt{\tfrac{g}{\ell}} t\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{g}{\ell} + 2\frac{k}{m}}} \sin\left(\sqrt{\tfrac{g}{\ell} + 2\tfrac{k}{m}} t\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist die eindeutige Lösung mit $x(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$.

(ii) Doppelpendel

An einem Pendel der Länge ℓ_1 und der Masse m_1 ist ein weiteres Pendel der Länge ℓ_2 und Masse m_2 befestigt. θ_1 und θ_2 seien die Winkel, welche die Fäden ℓ_1 und ℓ_2 mit der Vertikalen einschliessen. Es ergibt sich für die kinetische Energie

$$T_1 = \tfrac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_1$$

und die potentielle Energie

$$U_1 = -m_1 g \ell_1 \cos \theta_1$$

Die Koordinaten des zweiten Punktes sind

$$\begin{aligned} x_2 &= \ell_1 \sin \theta_1 + \ell_2 \sin \theta_2 \\ y_2 &= \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Also

$$T_2 = \tfrac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \tfrac{1}{2} m_2 (\ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)$$

und

$$\begin{aligned} L = \frac{m_1 + m_2}{2} \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 &+ \frac{m_2}{2} \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 \\ &+ m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \ell_1 \cos \theta_1 + m_2 g \ell_2 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Falls wir kleine Winkel betrachten, so gilt

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) \sim 1 - \tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)^2$$

und wir erhalten, wenn wir Produkte der Ordnung 3 vernachlässigen

$$\begin{aligned} L \sim \frac{m_1 + m_2}{2}\ell_1^2\dot\theta_1^2 + \frac{m_2}{2}\ell_2^2\dot\theta_2^2 \\ + m_2\ell_1\ell_2\dot\theta_1\dot\theta_2 + (m_1+m_2)g\ell_1(1 - \tfrac{1}{2}\theta_1^2) + m_2 g\ell_2(1 - \tfrac{1}{2}\theta_2^2) \end{aligned}$$

Damit ergeben sich als Bewegungsgleichungen [LaLi1]

$$\begin{aligned} (m_1+m_2)\ell_1\ddot\theta_1 + m_2\ell_2\ddot\theta_2 + (m_1+m_2)g\theta_1 &= 0 \\ \ell_1\ddot\theta_1 + \ell_2\ddot\theta_2 + g\theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

Wir wollen nun annehmen, dass $m_1 = m_2 = 1$ und $\ell_1 = \ell_2 = \ell$. Dann erhalten wir für die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} 2\ell\ddot\theta_1 + \ell\ddot\theta_2 + 2g\theta_1 &= 0 \\ \ell\ddot\theta_1 + \ell\ddot\theta_2 + g\theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

Wir wollen ein Fundamentalsystem dieses Systems angeben und die Lösung mit den Anfangswerten $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \dot\theta_1(0) = 0$ und $\dot\theta_2(0) = 1$.

Wir transformieren dieses System in ein System erster Ordnung.

$$\begin{aligned} \dot\theta_1 &= \phi_1 \\ \dot\theta_2 &= \phi_2 \\ 2\ell\dot\phi_1 + \ell\dot\phi_2 &= -2g\theta_1 \\ \ell\dot\phi_1 + \ell\dot\phi_2 &= -g\theta_2 \end{aligned}$$

Da die Inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{die Matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot\theta_1 &= \phi_1 \\ \dot\theta_2 &= \phi_2 \\ \dot\phi_1 &= -2\tfrac{g}{\ell}\theta_1 + \tfrac{g}{\ell}\theta_2 \\ \dot\phi_2 &= 2\tfrac{g}{\ell}\theta_1 - 2\tfrac{g}{\ell}\theta_2 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \\ \dot\phi_1 \\ \dot\phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2\frac{g}{\ell} & \frac{g}{\ell} & 0 & 0 \\ 2\frac{g}{\ell} & -2\frac{g}{\ell} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^4 + 4\tfrac{g}{\ell}\lambda^2 + 2(\tfrac{g}{\ell})^2$$

Die Eigenwerte sind

$$\pm i\sqrt{\tfrac{g}{\ell}(2+\sqrt{2})} \qquad\qquad \pm\, i\sqrt{\tfrac{g}{\ell}(2-\sqrt{2})}$$

Als Jordansche Normalform erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mu & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu \\ 0 & 0 & \nu & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\mu = \sqrt{\tfrac{g}{\ell}(2+\sqrt{2})}$ und $\nu = \sqrt{\tfrac{g}{\ell}(2-\sqrt{2})}$. Als Basis des Lösungsraumes für das System der Jordanmatrix erhalten wir

$$Z = \begin{pmatrix} \cos\mu t & -\sin\mu t & 0 & 0 \\ \sin\mu t & \cos\mu t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\nu t & -\sin\nu t \\ 0 & 0 & \sin\nu t & \cos\nu t \end{pmatrix}$$

Als Basis des ursprünglichen Systems erster Ordnung erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \cos\mu t \\ -\sqrt{2}\cos\mu t \\ -\mu\sin\mu t \\ \mu\sqrt{2}\sin\mu t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\mu t \\ -\sqrt{2}\sin\mu t \\ \mu\cos\mu t \\ -\mu\sqrt{2}\cos\mu t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\nu t \\ \sqrt{2}\cos\nu t \\ -\nu\sin\nu t \\ -\nu\sqrt{2}\sin\nu t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\nu t \\ \sqrt{2}\sin\nu t \\ \cos\nu t \\ \nu\sqrt{2}\cos\nu t \end{pmatrix}$$

Als Basis für das System

$$\begin{aligned} 2\ell\ddot{\theta}_1 + \ell\ddot{\theta}_2 + 2g\theta_1 &= 0 \\ \ell\ddot{\theta}_1 + \ell\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\cos\mu t\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \sin\mu t\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \cos\nu t\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \sin\nu t\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

Die Lösung mit den Anfangswerten $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \dot{\theta}_1(0) = 0$ und $\dot{\theta}_2(0) = 1$ ist

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\mu}\sin\mu t\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2\nu}\sin\nu t\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Wir wollen noch einen einfacheren Zugang diskutieren. Dieser ergibt sich, wenn man beachtet, dass in dem System

$$\begin{aligned} 2\ell\ddot{\theta}_1 + \ell\ddot{\theta}_2 + 2g\theta_1 &= 0 \\ \ell\ddot{\theta}_1 + \ell\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

die ersten Ableitungen nicht auftreten. Das System ist nämlich zu

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= -2\frac{g}{\ell}\theta_1 + \frac{g}{\ell}\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 &= 2\frac{g}{\ell}\theta_1 - 2\frac{g}{\ell}\theta_2\end{aligned}$$

äquivalent. Dies lässt sich auch in Matrizenschreibweise

$$\ddot{\theta} = \begin{pmatrix} -2\frac{g}{\ell} & \frac{g}{\ell} \\ 2\frac{g}{\ell} & -2\frac{g}{\ell} \end{pmatrix} \theta$$

angeben. Als Eigenwerte dieser Matrix erhalten wir $\frac{g}{\ell}(-2+\sqrt{2})$ und $\frac{g}{\ell}(-2-\sqrt{2})$. Somit können wir das Problem auf

$$\ddot{\psi} = \begin{pmatrix} \frac{g}{\ell}(-2+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & \frac{g}{\ell}(-2-\sqrt{2}) \end{pmatrix} \psi$$

transformieren. Die Gleichungen dieses Systems lassen sich unabhängig voneinander lösen.

15. Kontrolltheorie

Wie wir gesehen haben, können wir eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b$$

in ein System erster Ordnung verwandeln.

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Eine solche Matrix nennen wir Nebenmatrix (engl. companion matrix). Ist dies auch umgekehrt möglich? Wann lässt sich zu einem linearen System

$$y' = Ay + Bb(x) \qquad\qquad A\ n \times n \text{ Matrix}, \quad B \in \mathbb{R}^n$$

eine invertierbare Matrix T finden, so dass TAT^{-1} eine Matrix der obigen Form und TB der n-te Einheitsvektor ist? Dies ist nicht immer möglich. Ein Beispiel dafür ist

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Als transformierte Matrix erhalten wir wieder die Einheitsmatrix, nicht aber eine Matrix, die in der $(1,2)$-Koordinate eine 1 hat.

Wir sagen, dass die Systeme

$$y' = Ay + Bb(x) \qquad\qquad z' = Cz + Db(x)$$

linear äquivalent sind, falls es eine invertierbare Matrix T gibt, so dass $TAT^{-1} = C$ und $TB = D$. y ist genau dann Lösung des ersten Systems, wenn Ty Lösung des zweiten ist.

Ein Vektor x heisst zyklischer Vektor der $n \times n$ Matrix, wenn $x, Ax, A^2x, \dots, A^{n-1}x$ linear unabhängig sind.

Satz. *Es sei T eine $n \times n$ Matrix, die das System $y' = Ay + bB$ in das System $z' = Cz + be_n$ verwandelt, wobei C eine Nebenmatrix ist. Dann gilt*
(i) T ist eindeutig.
(ii)

$$B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$$

sind linear unabhängig.

Beweis. (ii) Es gilt $TAT^{-1} = C$ und $TB = e_n$. Es folgt

$$C^k = (TAT^{-1})^k = TA^kT^{-1}$$

$$C^k e_n = TA^k T^{-1} e_n = TA^k B$$

Der von $e_n, Ce_n, \ldots, C^{n-1}e_n$ erzeugte Teilraum ist gleich dem von $TB, TAB, \ldots, TA^{n-1}B$ erzeugten Teilraum. Die Dimension dises Teilraumes ist gleich der Dimension des von $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$ erzeugten Teilraumes. Andererseits gilt

$$e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Ce_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ * \end{pmatrix}, \ldots C^{n-2}e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ * \\ \vdots \\ * \\ * \end{pmatrix}, C^{n-1}e_n = \begin{pmatrix} 1 \\ * \\ \vdots \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

Also ist die Dimension gleich n.

(i) Es ist also $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ Durch

$$C^k e_n = TA^k T^{-1} e_n = TA^k B$$

ist T auf einer Basis definiert und damit eindeutig. $\square$

Satz. *Es sei A eine $n \times n$ Matrix. Das System $y' = Ay + bB$ kann genau dann in das System $z' = Cz + de_n$ verwandelt werden, wobei C eine Nebenmatrix ist, wenn*

$$B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B$$

linear unabhängig sind.

Wir sagen, dass das System $y' = Ay + bB$ vollständig kontrollierbar ist, falls es zu allen $y_0, y_f \in \mathbb{R}^n$ ein $x_f \in \mathbb{R}$ und eine Kontrollfunktion $b : [0, x_f] \to \mathbb{R}$ gibt, so dass für die Lösung y mit $y(0) = y_0$ die Gleichung $y(x_f) = y_f$ gilt. Wir nehmen immer an, dass die Kontrollfunktion b integrierbar ist.

Satz. *Ein lineares Differentialgleichungsystem $y' = Ay + b(x)B$ ist genau dann vollständig kontrollierbar, wenn die Vektoren*

$$B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B$$

linear unabhängig sind.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Notwendigkeit der Bedingung. Es sei p das charakteristische Polynom der Matrix A. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $p(A) = 0$. Hieraus wollen wir herleiten, dass für alle $k \geq n$ reelle Zahlen c_i^k, $i = 0, \ldots, n-1$, existieren, so dass

$$A^k = \sum_{i=0}^{n-1} c_i^k A^i$$

Für $k = n$ folgt sofort aus $p(A) = 0$

$$0 = p(A) = \sum_{i=0}^{n} d_i A^i$$

$$A^n = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{d_i}{d_n} A^i$$

Damit ist der Induktionsanfang bewiesen und wir wollen nun von $n+k$ auf $n+k+1$ schliessen. Wiederum mit $p(A)=0$ erhalten wir

$$A^{n+k+1} = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{d_i}{d_n} A^{i+k+1} = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{d_i}{d_n} \sum_{j=0}^{n-1} c_j^{i+k+1} A^j$$

Eine Lösung ist

$$y(x) = e^{xA}\left\{ y_0 + \int_0^x e^{-tA} b(t) B dt \right\} = e^{xA}\left\{ y_0 + \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-tA)^k b(t) B dt \right\}$$

Wegen der gleichmässigen Konvergenz können wir die Summe mit dem Integral vertauschen.

$$y(x) = e^{xA}\left\{ y_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k B \int_0^x (-t)^k b(t) dt \right\}$$

Wir wollen hier den Fall $y_0 = 0$ betrachten, also

$$y(x) = e^{xA} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k B \int_0^x (-t)^k b(t) dt$$

Wir behaupten nun, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k B \int_0^x (-t)^k b(t) dt$$

ein Element des Teilraumes von $\mathbb{R}^n$ ist, der von den Vektoren $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$ erzeugt wird. Alle Vektoren A^kB, $k \geq 0$, liegen in diesem Teilraum, wie wir oben eingesehen haben. Da dieser Teilraum abgeschlossen ist, ist auch die unendliche Summe ein Element dieses Teilraumes. Hieraus folgt, dass auch

$$y(x) = e^{xA} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k B \int_0^x (-t)^k b(t) dt$$

Element dieses Teilraumes ist.

Da wir annehmen, dass wir für jeden Vektor $y_f \in \mathbb{R}^n$ eine Funktion b finden können, so dass

$$y_f = e^{x_f A} \int_0^{x_f} e^{-tA} b(t) B dt$$

gilt, folgt, dass der von $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$ erzeugte Teilraum die Dimension n haben muss.

Wir zeigen nun, dass die Bedingung auch hinreichend ist. Wir definieren

$$M = \int_0^{x_f} e^{-tA} B B^T (e^{-tA})^T dt$$

und zeigen, dass M eine invertierbare $n \times n$ Matrix ist. Man beachte hierbei, dass $B^T B$ eine $n \times n$ Matrix ist. Wir nehmen an, dass M nicht invertierbar ist. Dann gibt es einen Vektor v mit $\|v\| = 1$ und $Mv = 0$. Insbesondere gilt also

$$\begin{aligned} 0 = v^T M v = v^T \int_0^{x_f} e^{-tA} B B^T (e^{-tA})^T dt v \\ = \int_0^{x_f} v^T e^{-tA} B B^T (e^{-tA})^T v dt = \int_0^{x_f} |v^T e^{-tA} B|^2 dt \end{aligned}$$

$|v^T e^{-xA} B|^2$ ist eine in x stetige, nichtnegative Funktion, deren Integral 0 ist. Also muss diese Funktion identisch 0 sein.

$$\forall x \in [0, x_f] :< v, e^{-xA} B >= v^T e^{-xA} B = 0$$

Für $x = 0$ gilt $e^{-xA} = I$ und $< v, B >= 0$. Nun differenzieren wir diese Funktion und erhalten

$$\forall x \in [0, x_f] :< v, -Ae^{-xA} B >= v^T (-A) e^{-xA} B = 0$$

Für $x = 0$ erhalten wir

$$< v, -AB >= 0$$

Durch Induktion erhalten wir für $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$< v, A^k B >= 0$$

Nach Annahme ist der von $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$ erzeugte Raum gleich $\mathbb{R}^n$. Somit gilt $v = 0$. Damit ist M invertierbar.

Wir setzen nun

$$b(x) = B^T (e^{-xA})^T (M^{-1}(e^{-x_f A} y_f - y_0))$$

und erhalten für die Lösung

$$y(x) = e^{xA} \left\{ y_0 + \int_0^x e^{-tA} b(t) B dt \right\}$$

an der Stelle $x = x_f$

$$\begin{aligned} y(x_f) &= e^{x_f A} \left\{ y_0 + \int_0^{x_f} e^{-tA} B B^T (e^{-tA})^T (M^{-1}(e^{-x_f A} y_f - y_0)) dt \right\} \\ &= e^{x_f A} \left\{ y_0 + \left(\int_0^{x_f} e^{-tA} B B^T (e^{-tA})^T dt \right) (M^{-1}(e^{-x_f A} y_f - y_0)) \right\} \\ &= e^{x_f A} \left\{ y_0 + (e^{-x_f A} y_f - y_0) \right\} \\ &= y_f \end{aligned}$$

□

16. Laplace Transformation

Pierre-Simon Laplace, 1749-1827, war einer der bedeutensten Wissenschaftler überhaupt. Er hat bei d'Alembert studiert und wurde von ihm gefördert.

Es sei $K : I \times J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem Produkt zweier Intervalle I und J. Man bezeichnet

$$F(x) = \int_J K(x,y) f(y) dy$$

als Integraltransformation. K heisst Kern der Transformation. Einer Funktion f auf J wird so eine Funktion F auf I zugeordnet.

Die Laplace-Transformation ist eine solche Integraltransformation

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Es ist also $K(s,t) = e^{-st}$.

Lemma. *Es sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ auf allen Intervallen $[a,b]$, $0 < a \leq b < \infty$, beschränkt und Riemann-integrierbar. Es gebe eine Zahl $s \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \qquad \textit{und} \qquad \int_0^1 |f(t)| dt$$

existieren und endlich sind. Dann gibt es eine Zahl s_0, so dass das Integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

für alle s mit $s > s_0$ endlich ist und für alle s mit $s < s_0$ nicht endlich ist. (Für $s = s_0$ können beide Fälle auftreten.)

Beweis. Wir zeigen, dass

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

existiert und endlich ist, falls es für ein s_1, $s_1 < s$, existiert und endlich ist. Wir definieren

$$g(t) = \int_0^t e^{-s_1 \tau} f(\tau) d\tau$$

g ist stetig, $g(0) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} g(t) = F(s_1)$.

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-s_1\tau} f(\tau) d\tau = \int_0^\infty e^{-s_1\tau} f(\tau) d\tau = F(s_1)$$

Partielle Integration liefert mit $g'(t) = e^{-s_1 t} f(t)$

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{-st} f(t)dt &= \int_a^b e^{-(s-s_1)t} e^{-s_1 t} f(t)dt \\ &= \left[e^{-(s-s_1)t} g(t)\right]_a^b - (s_1 - s) \int_a^b e^{-(s-s_1)t} g(t)dt \\ &= e^{-(s-s_1)b} g(b) - e^{-(s-s_1)a} g(a) - (s_1 - s) \int_a^b e^{-(s-s_1)t} g(t)dt\end{aligned}$$

Da g stetig ist und $g(0) = 0$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}&\int_0^b e^{-st} f(t)dt \\ &\quad= \lim_{a\to 0} \int_a^b e^{-st} f(t)dt \\ &\quad= e^{-(s-s_1)b} g(b) - \lim_{a\to 0} e^{-(s-s_1)a} g(a) - (s_1 - s) \lim_{a\to 0} \int_a^b e^{-(s-s_1)t} g(t)dt \\ &\quad= e^{-(s-s_1)b} g(b) - (s_1 - s) \int_0^b e^{-(s-s_1)t} g(t)dt\end{aligned}$$

Da g stetig ist und $\lim_{b\to\infty} g(b) = F(s)$ gilt, ist g auf $[0, \infty)$ beschränkt. Deshalb existiert

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(s-s_1)t} g(t)dt$$

Also

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt &= \lim_{b\to\infty} e^{-(s-s_1)b} g(b) - (s_1 - s) \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(s-s_1)t} g(t)dt \\ &= (s - s_1) \int_0^\infty e^{-(s-s_1)t} g(t)dt\end{aligned}$$

□

Beispiel. *(i)* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *mit* $f(t) = 1$ *für alle* $t \in [0, \infty)$*. Dann gilt für alle* $s > 0$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

(ii) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *mit* $f(t) = e^{at}$ *für alle* $t \in [0, \infty)$*. Dann gilt für alle* $s > a$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \frac{1}{s - a}$$

Lemma. *f und g seien Funktionen, deren Laplace-Transformationen auf einem Intervall I existieren. Dann gilt auf I*

(i) $\mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(f + g)$

(ii) $\mathcal{L}(\lambda f) = \lambda \mathcal{L}(f)$

Satz. *Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Es gebe Konstanten K und a, so dass für alle $t \in [0, \infty)$*

$$|f(t)| \leq K e^{at}$$

gilt. Dann existiert $\mathcal{L}(f')$ für alle s mit $s > a$ und

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$$

Beweis. Partielle Integration liefert

$$\int_0^b e^{-st} f'(t) dt = [e^{-st} f(t)]_0^b - \int_0^b (-s) e^{-st} f(t) dt = e^{-sb} f(b) - f(0) + s \int_0^b e^{-st} f(t) dt$$

Es gilt

$$\lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-st} f'(t) dt = \lim_{b \to \infty} e^{-sb} f(b) - f(0) + \lim_{b \to \infty} s \int_0^b e^{-st} f(t) dt$$

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$$

□

Korollar. *Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar auf $[0, \infty)$. Es gebe Konstante K und a, so dass für alle $k = 0, 1, \ldots, n-1$ und alle $t \in [0, \infty)$*

$$|f(t)| \leq K e^{at}$$

gilt. Dann existiert $\mathcal{L}(f^{(n)})$ für alle $s > a$ und

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Wir zeigen nun, wie man die Laplace-Transformation benutzen kann, um ein Anfangswertproblem zu lösen.

Beispiel.

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad\qquad \textit{mit } y(0) = 1 \textit{ und } y'(0) = 0$$

Lösung. (i) Wir lösen das Problem zunächst mit den Methoden von Abschnitt 14. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - \lambda - 2$. Die Eigenwerte sind 2 und -1. Somit ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

Die Lösung mit den Anfangswerten $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ ist

$$y(x) = \tfrac{2}{3} e^{-x} + \tfrac{1}{3} e^{2x}$$

(ii) Nun lösen wir das Problem mit der Laplace-Transformation.

$$\mathcal{L}(y'' - y' - 2y) = \mathcal{L}(0) = 0$$

$$\mathcal{L}(y'') - \mathcal{L}(y') - 2\mathcal{L}(y) = 0$$

$$x^2 \mathcal{L}(y) - xy(0) - y'(0) - x\mathcal{L}(y) + y(0) - 2\mathcal{L}(y) = 0$$

$$(x^2 - x - 2)\mathcal{L}(y) = xy(0) + y'(0) - y(0) = x - 1$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{x - 1}{x^2 - x - 2}$$

Durch Partialbruchzerlegung erhält man

$$\mathcal{L}(y) = \tfrac{1}{3} \frac{1}{s - 2} + \tfrac{2}{3} \frac{1}{s + 1}$$

$$y(x) = \tfrac{2}{3} e^{-x} + \tfrac{1}{3} e^{2x}$$

□

Bemerkung. *Man kann für die Inverse von $\mathcal{L}$ eine Formel angeben.*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c - i\infty}^{c + i\infty} F(y) e^{yx} dy$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ grösser als alle Realteile von Singularitäten von F ist.

Notizen

1. Der Abschluss einer total beschränkten Menge ist total beschränkt.

References

[Am] H. Amann, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, de Gruyter, 1983.

[Ar] V.I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, 1973.

[Ay] F. Ayres, *Differential Equations*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1952.

[Bon] H. Bondi, *The rigid body dynamics of unidirectional spin*, Proceedings of the Royal Society London A **405** (1986), 265-274.

[BoDi] W.E. Boyce und R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, 1986.

[Br] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[CoLe] E.A. Coddington und L. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.

[Dr] R.D. Driver, *Torricelli's Law- an Ideal Example of an Elementary ODE*, American Mathematical Monthly (1998), 453-455.

[Er] F. Erwe, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, BI Hochschultaschenbücher, 1964.

[Gra] J.J. Gray, *Linear Differential Equations and Group Theory*, Birkhäuser.

[He] H. Heuser, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B.G. Teubner, 1989.

[HsSi] P-F Hsieh und Y. Sibuya, *Basic Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin.

[In] E.L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, 1956.

[JoSm] D.W. Jordan und P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford University Press, Oxford, 1977.

[Ka] E. Kamke, *Differentialgleichungen*, Lösungsmethoden und Lösungen, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1967.

[Per] O. Perron, Mathematische Zeitschrift **28** (1928).

[Ro] C.C. Ross, *Differential Equations*, An Introduction with Mathematica, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Spi] Spiegel, *Theoretical Mechanics*, Schaums Outline Series.

[Te] W.J. Terrell, *Some Fundamental Control Theory I:Controllability, Observability, and Duality*, American Mathematical Monthly **106** (1999), 705-719.

[Wa] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[We] K.H. Weise, *Differentialgleichungen*, Vandenhoeck & Ruprecht, 1966.

[Wei] Weissinger, J., Mathematische Nachrichten **8** (1952), 193-212.