Differential- und Integralrechnung I
Lösungen der Übungen für Woche 8

30. Dezember 2002

1: Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Zeige, dass f einen Fixpunkt hat, das heißt, dass $t \in [a, b]$ existiert mit $f(t) = t$.

Lösung: Sei $g(x) = f(x) - x$. Es gilt $g(a) \geq 0$ und $g(b) \leq 0$. Entweder hat also g am Rand eine Nullstelle, oder nach Zwischenwertsatz im Inneren. Es gibt also $t \in [a, b]$ mit $g(t) = 0$, und somit $f(t) = t$.

2: Konstruiere eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $f^{-1}(\{y\})$ für jeden Wert y aus genau zwei Punkten besteht, oder beweise, dass es eine solche Abbildung nicht gibt.

Lösung: Eine solche Funktion kann es nicht geben. Wir zeigen zunächst, dass eine solche Funktion keine lokalen Extrema besitzen kann: sei $x \in \mathbb{R}$ und $f(y) \geq f(x)$ für alle $|x - y| \leq \epsilon$ für ein $\epsilon > 0$. Da genau eine weitere Stelle x' den Wert $f(x)$ annimmt, können wir erreichen (indem wir ϵ genügend klein wählen), dass $f(x-\epsilon)$ und $f(x+\epsilon)$ beide größer $f(x)$ sind (da x' außerhalb des Intervals $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ liegt). Nach Zwischenwertsatz wird jeder Wert zwischen $f(x)$ und $\min\{f(x-\epsilon), f(x+\epsilon)\}$ sowohl auf dem Interval $[x - \epsilon, x)$ als auch auf dem Interval $(x, x + \epsilon]$ mindestens einmal angenommen. Wegen unserer Voraussetzung also genau einmal und sonst nie mehr. Nun liegt die zweite Stelle x' mit $f(x') = f(x)$, entweder links von $x-\epsilon$ oder rechts von $x+\epsilon$. In beiden Fällen muss jeder Wert zwischen $f(x') = f(x)$ und $\min\{f(x-\epsilon), f(x+\epsilon)\}$ noch ein drittes Mal angenommen werden, entweder in $(x', x - \epsilon]$ oder in $[x + \epsilon, x')$.

Dies ist ein Widerspruch, eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften kann also keine lokalen Extrema besitzen (Maxima werden genauso behandelt).

Seien andererseits $x < x'$ mit $f(x) = f(x')$. Dann hat die stetige Funktion $f|_{[x,x']}$ auf $[x, x']$ mindestens eine Minimalstelle t und eine Maximalstelle s, mit $f(t) \neq f(s)$, da die Funktion nicht konstant auf $[x, x']$ ist. Also liegt einer der beiden Punkte s und t im Inneren von $[x, x']$, und ist somit eine lokale Extremstelle.

Insgesamt erhalten wir einen Widerspruch zur Existenz der gewünschten Funktion.

3: Finde alle $b \in \mathbb{C}$, so dass die Abbildung f_b mit

$$f_b(x) = \begin{cases} b & \text{falls } x = 0 \\ \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{falls } x \neq 0 \end{cases}$$

stetig ist.

Lösung:

Für $x \neq 0$ gilt $f_b(x) = x^2/(x(1 + \sqrt{1 - x^2})) = x/(1 + \sqrt{1 - x^2})$. Dies ist $f_0(x)$ auch für $x = 0$. Als Summe, Quotient, ... ist diese Funktion stetig, wenn wir bewiesen haben, dass $\sqrt{\ }\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig ist. Ist aber x_n eine Folge aus $[0, \infty)$ mit Grenzwert $x \neq 0$, so gilt $|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| = |x_n - x|/|\sqrt{x_n} + \sqrt{x}| \leq |x_n - x|/\sqrt{x} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Ist $x = 0$, so haben wir bereits gezeigt dass $\sqrt{x_n} \xrightarrow{0} = \sqrt{0}$.

4: Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = 0$ falls x irrational oder $x = 0$, und $f(x) = 1/q$ falls $x = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, und p und q teilerfremd.

Wo ist f stetig, wo nicht?

Lösung: Ist x rational, $x \neq 0$, so ist f an x nicht stetig, da in jeder ϵ-Umgebung von x irrationale Zahlen enthalten sind, also der Funktionswert 0 angenommen wird, während $f(x) > 0$ ist.

Ist x nicht entweder nicht rational oder 0, so wähle zu $\epsilon > 0$ zunächst $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $1/n < \epsilon$. Betrachte nun die Menge $M := \{p/n!; p \in$

$\mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Da x irrational oder 0, ist x nicht in M enthalten. Der Abstand zwischen zwei verschiedenen Elementen von M ist mindestens $1/n!$. Es gibt also $\delta > 0$, so dass der Abstand von x zu jedem Element aus M größer als δ ist. Außerhalb der Menge M nimmt f nur Werte $< 1/n$ an, also insbesondere auf gefundenen der δ-Umgebung von x. Da $f(t) \geq 0$, gilt $|f(t) - f(x)| = f(t) < 1/n < \epsilon$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t - x| < \delta$. Die Funktion ist also stetig an x. Insgesamt: stetig an allen irrationalen Stellen und 0, unstetig an allen rationalen Stellen $\neq 0$.

5: Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(a) $|f|$ stetig impliziert f stetig.

(b) fg stetig impliziert f und g stetig.

(c) f, g stetig impliziert h stetig, wobei $h(x) := \max\{|f(x)|, |g(x)|\}$.

(d) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}; f(z) = \exp(\sin(z)) + \log(\left|\frac{1}{\exp(z)^2}\right|) + z^{n!}\cos(iz)$ ist stetig.

Lösung: (a) ist falsch: $f(x) = 1$ falls x rational, -1 falls x irrational. (b) ist falsch: f wie eben, $g = 1/f$. (c) ist richtig: fixiere x. Falls $|f(x)| > |g(x)|$ wähle $\delta > 0$ so dass $|f| > |g|$ auf δ-Umgebung von x (geht, da f und g und $|\cdot|$ stetig). Dann gilt aber: $h(x) = |f(x)|$ auf dieser δ-Umgebung, insbesondere ist $h(x)$ hier stetig.

Analog argumentiert man, wenn $|g(x)| > |f(x)|$.

Falls $|f(x)| = |g(x)|$, wähle zu $\epsilon > 0$ (unter Nutzung der Stetigkeit von f, g und $|\cdot|$ und weil Kompositionen stetiger Funktionen stetig sind) $\delta > 0$, so dass $|f(t)|$ und $|g(t)|$ sich von $|f(x)|$ um höchstens ϵ unterscheiden, falls $|x - t| < \delta$. Insbesondere gilt dieselbe Aussage dann auch für $\max\{|f(t)|, |g(t)|\}$. Da andererseits $h(x) = |f(x)|$, folgt Stetigkeit an x auch in diesem Fall.

(d) ist stetig als Verkettung und Summe stetiger Funktionen (das sollte vielleicht noch etwas ausgeführt werden).

6: Sei D Teilmenge von $\mathbb{R}$, aber D entweder nicht abgeschlossen, oder nicht beschränkt. Man zeige: auf D existiert eine stetige reellwertige unbeschränkte Funktion, und eine stetige reellwertige beschränkte Funktion, die kein Maximum hat.

Löse dieselbe Aufgabe wenn D Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist.

Lösung: Fall D nicht beschränkt, wähle $f(x) = |x|$ für die erste Frage, und $f(x) = 1/(1 + |x|)$ für die zweite. Falls D nicht abgeschlossen, gibt es nach Definition ein $z \in \mathbb{C}$ mit $z \notin D$, aber eine Folge $z_n \in D$ mit $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$. Wähle in diesem Fall $f(x) = 1/|x - z|$ für die unbeschränkte Funktion, und $f(x) = 1/(1 + |x - z|)$ für die beschränkte Funktion ohne Maximum.

Es ist klar, dass die beschränkten Funktionen durch 0 und 1 beschränkt sind und der Wert 1 nicht angenommen wird. Geeignete Folgen $z_n \in D$ mit $\lim f(z_n) = 1$ sind einfach zu erhalten.

Entsprechend erhält man im unbeschränkten Fall $f(z_n) \xrightarrow{+} \infty$.