Differential- und Integralrechnung I
Lösungen der Übungen für Woche 9

23. Dezember 2002

1: Definiere die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch die Formel

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Wo ist die Funktion f stetig? Wo ist sie differenzierbar?

(b) Finde die Ableitung $f'(x)$, wo sie existiert.

Lösung: Für $x < 0$ gilt $f'(x) = 0$, für $x > 0$ gilt $f'(x) = 2x^{-3}\exp(-1/x^2)$ nach Kettenregel, da Ableiten und Ableitbarkeit eine lokale Frage ist. Für $x = 0$ erhält man $f(h) = 0 + 0 \cdot h + f(h)$. Wir zeigen: $\exp(-1/h^2)/h \xrightarrow{h \to 0} 0$, dann folgt diffbarkeit an 0 mit $f'(0) = 0$. Nun gilt $\exp(-1/h^2)/h = h \cdot (\exp(-1/h^2)/h^2)$. Es genügt also, zu zeigen, dass für $y > 0$ $y/\exp(y)$ beschränkt ist (wende dies mit $y = 1/h^2$ an, und benutze $\exp(-y) = 1/\exp(y)$). Da für $y > 0$ $\exp(y) = \sum y^k/k! \leq 1 + y$, gilt $y/\exp(y) \leq y/1 + y < 1$, und wir sind fertig. Aus Diffbarkeit folgt ja insbesondere Stetigkeit.

2: Stelle fest, wo die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechne dort ihre Ableitungen.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = |x|$

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(z) = \begin{cases} z\sin(1/z); & z \neq 0 \\ 0; & z = 0 \end{cases}$

Lösung: Für $x > 0$ gilt $|x| = x$, für $x < 0$ gilt $|x| = -x$ und man erhält sofort die Ableitungen. An $x = 0$ hat der Differenzenquotient $|h|/h$ keinen Grenzwert, was die Folgen $1/n$ und $-1/n$ sofort zeigen, also ist die Fkt. dort nicht diffbar.

$z\sin(1/z)$ ist nach Produkt und Kettenregel für $z \neq 0$ diffbar. Für $z = 0$ hat der Differenzenquotient $\sin(1/h)$ keinen Grenzwert für $h \to 0$: Wir wissen, dass $\sin(z)$ 2π-periodisch ist (mit $\pi > 0$), und $\sin(0) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$. Die beiden Nullfolgen $1/(2\pi n)$ und $1/(2\pi n + \pi/2)$ zeigen, dass kein Grenzwert existiert.

3: Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ so dasss $f(z_1 + z_2) = z_1 + z_2$, $f(z_1 z_2) = f(z_1)f(z_2)$, und f ist stetig. Beweise dass die Funktion f ist definiert durch eine der folgenden Formeln.

- $f(z) = 0$ für alles $z \in \mathbb{C}$.
- $f(z) = z$ für alles $z \in \mathbb{C}$.
- $f(z) = \overline{z}$ für alles $z \in \mathbb{C}$.

Tipp: Was ist $f(1)$? Finde $f(z)$ für $z \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{Q}$, $z \in \mathbb{R}$, und $z \in \mathbb{C}$.

Falls nicht $f(z) = 0$ für alle z, gibt es a mit $f(a) \neq 0$. Dann $f(a \cdot 1) = f(a) \cdot f(1)$. Da $f(a) \neq 0$ gilt $f(1) = 1$. Genauso folgt (immer) $f(0) = 0$. Wegen Additivität gilt dann $f(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $0 = f(0) = f(n + (-n)) = n + f(-n)$ folgt $f(n) = n \ \forall n \in \mathbb{Z}$. Ähnlich $f(p/q) = p/q$ für alle $p/q \in \mathbb{Q}$. Da für jede reelle Zahl x eine Folge x_n rationaler Zahlen mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ existiert, gilt (mit der Stetigkeit von f) $f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Zuletzt gilt $i^2 = -1$, also $f(i)^2 = f(i^2) = -1$, und somit $f(i) = i$ oder $f(i) = -i$. Wegen Multiplikativität und Additivität folgt dann $f(x+iy) = f(x) + f(i)f(y) = x + f(i)y$,also im einen Fall $f(x + iy) = x + iy$ und im anderen Fall $f(x + iy) = x - iy$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

4: Sei $f\colon [a, b] \to [c, d]$ bijektiv und stetig. Beweise dass f^{-1} stetig ist.

Lösung: Wir wissen bereits, dass die Umkehrung einer streng momotonen Funktion stetig ist. Also beweisen wir, dass unsere Funktion notwendigerweise streng monoton ist.

Wähle $a \leq x < y \leq b$. Die Einschränkung der stetigen Funktion f auf das Interval $[x, y]$ hat dort ein Maximum. Dieses kann nicht im Inneren liegen, da wegen des Zwischenwertsatzes bei einem lokalen Maximum die Funktion nicht injektiv sein kann. Für jedes Interval wird also das Maximum am einen Randpunkt angenommen, genauso das Minimum am anderen Randpunkt.

Gibt man nun 4 Punkte $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ vor, und sei zunächst $f(x_1) < f(x_2)$. Da x_1 nicht Maximumstelle von f auf $[x_1, x_3]$ sein kann, gilt dann auch $f(x_1) < f(x_3)$ und $f(x_2) < f(x_3)$. Genauso $f(x_3) < f(x_4)$.

Falls $f(x_1) > f(x_2)$ folgt genauso $f(x_3) > f(x_4)$. Die strenge Monotonie ist bewiesen.

5: Stelle fest, wo die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechne dort ihre Ableitungen.

(a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad |z| < 1$

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(z) = \sin(\cos z)$

(c) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid \cos(z) = 0\} \to \mathbb{R}$; $f(z) = \frac{\sin z}{\cos z}$

Bei (a) handelt es sich um eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1. Die Funktion ist also auf $\{|z| < 1\}$ differenzierbar mit Ableitung $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = 1/(1 - z)$, da es sich um die geometrische Reihe handelt.

Für (b) und (c) wende Ketten- und Produktregel an.

Achtung: Das ist doch gar zu langweilig. Behandelt vielleicht statt dessen: $|x^n|\cos(\sin(x))$, sowie $\sin(x)/(x\cos(x))$ (ergänzt durch 1 an 0).

Dann lauten die **Lösungen**: im uninteressanten Bereich wende Produkt-, Ketten- und Quotientenregel an. $\sin(x)/x$ ist konvergente Potenzreihe, also existiert Ableitung von $\sin(x)/x\cos(x)$ auch an 0 und ist wegen der Quotientenregel eine an Null stetige Funktion, damit bereits berechnet.

Für n gerade ist $|x^n|$ kein Problem. Für $n = 1$ diffbar bei 0, da Differenzenquotient linken Limes $+1$ und rechten Limes -1 hat, für $n \geq 2$ diffbar mit Ableitung 0 (einfache Abschätzung).

6: Sei $x > 0$.

(a) Finde

$$\lim_{x\to\infty} \log x$$

(b) Schreibe

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} := \exp\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

Finde

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

Tipp: Die Abbildung $\log x$ ist monoton, und $\log(2^n) = n\log 2$.

Der Limes $+\infty$ soll hier ebenfalls zugelassen sein.

Lösung: Da exp streng monoton wachsende bijektive Funktion $\mathbb{R} \to (0,\infty)$, ist die Umkehrfunktion log streng monoton wachsende bijektive Funktion $(0,\infty) \to \mathbb{R}$. Strenge monoton wachsend und surjektiv implizieren $\lim_{x\to\infty}\log(x) = +\infty$.

Der zweite Limes ist 1. Betrachte zunächst die Folge $x_n = 2^n$. Dann gilt $\log(x_n)/x_n = n\log(2)/2^n$. Da mit binomischer Formel $2^n < 1 + n(n-1)/2$, gilt $n\log(2)/2^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. exp ist stetig an Null, also $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \exp(0) = 1$.

Gilt nun $2^n < x \leq 2^{n+1}$, so gilt $\log(x)/x < 2log(2^{n+1})/2^{n+1}$, und dieselbe Abschätzung wie eben liefert Konvergenz gegen Null im Allgemeinen.