Die Hilbert-Norm

(Moritz Hirdes und Benjamin Tams)

Definition: Es seien f, g komplexwertige Regelfunktionen (Riemann-integrierbar)der Periode 2π *diese bilden einen Vektorraum über* $\mathbb{C}$. Die komplexe Zahl

$$< f, g > := \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

heißt *Skalarprodukt* von f, g.

Bemerkung: *Anders als beim Skalarprodukt, wie wir dies aus der AGLA-Vorlesung kennen, ist dieses Skalarprodukt nicht symmetrisch. Zwar erfüllt es die Symmetrieeigenschaft für reellwertige Funktionen f, g. Doch für komplexwertige f, g im Allgemeinen nicht. Man hat dann folgende Beziehung*

$$< f, g > = \overline{< g, f >} \tag{1}$$

da

$$\begin{aligned}
\overline{< g, f >} &= \overline{\int_0^{2\pi} g(x)\overline{f(x)}dx} \\
&= \int_0^{2\pi} \overline{g(x)\overline{f(x)}}dx \\
&= \int_0^{2\pi} \overline{g(x)}f(x)dx \\
&= \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx \\
&= < f, g >
\end{aligned}$$

Desweiteren gelten folgende leicht nachzuweisende Eigenschaften

$$< f_1 + f_2, g > = < f_1, g > + < f_2, g > \tag{2}$$

$$< f, g_1 + g_2 > = < f, g_1 > + < f, g_2 > \tag{3}$$

$$< cf, g > = c < f, g > \quad \forall c \in \mathbb{C} \tag{4}$$

$$< f, cg > = \overline{c} < f, g > \quad \forall c \in \mathbb{C} \tag{5}$$

Auch hier gilt für alle f:

$$< f, f > \quad \geqq \quad 0 \tag{6}$$

Bemerkung: *Zwar gilt*

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{C} : f(x) = 0 \\
\Rightarrow &< f, f > = 0
\end{aligned}$$

Doch sind die beiden Aussagen nicht äquivalent.

*Gegen**Beispiel:*** *Sei*

$$f(x) := \begin{cases} 1 & , \textit{falls } \exists z \in \mathbb{Z} \mid x = z2\pi \\ 0 & , \textit{sonst} \end{cases}$$

Dann hat f die Periode 2π, ist nicht stetig und $f \neq 0$. Aber

$$< f, f >= \int_0^{2\pi} f(x)\overline{f(x)}dx = 0$$

Allerdings: wenn f stetig ist mit $< f, f >= 0$ so gilt $f = 0$.

Satz (Schwarzsche Ungleichung): Auch bei diesem Skalarprodukt gilt die Schwarzsche Ungleichung unter Berücksichtigung von (1)

$$< f, g > \overline{< f, g >} \leqq \quad < f, f >< g, g > \tag{7}$$

Beweis: Es sind zwei Fälle zu betrachten

(1) $\forall f, g \mid < g, g >= 0 :< f, g > \overline{< f, g >} \leq < f, f >< g, g >$

(2) $\forall f, g \mid < g, g > \neq 0 :< f, g > \overline{< f, g > \leq < f, f >< g, g >}$

(1) Seien f, g beliebige Regelfunktionen so dass $< g, g >= 0$. Dann gilt für alle $c \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
0 \leq < f - cg, f - cg > &=< f, f > + < f, -cg > + < -cg, f > + < -cg, -cg > \\
&=< f, f > -c < f, g > -\bar{c} < g, f > + \mid c \mid^2 < g, g > \\
&=< f, f > -c < f, g > -\bar{c} < g, f > \\
&\Longleftrightarrow \\
c < f, g > +\bar{c} < g, f > \leq < f, f >
\end{aligned}$$

Sei $c := n\overline{< f, g >}$, für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
n\overline{< f, g >} < f, g > +n < f, g > \overline{< f, g >} &\leq < f, f > \\
&\Longleftrightarrow \\
2n \mid < f, g > \mid^2 &\leq < f, f >
\end{aligned}$$

Und es gilt zwangsläufig: $< f, g >= 0$. Damit ist die Schwarzsche Ungleichung für diesen Fall erfüllt. ✓

(2) Sei $c \in \mathbb{C}$ und f, g beliebige Regelfunktionen mit der Periode 2π, so dass $< g, g > \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
0 \leqq < f + cg, f + cg > &=< f, f + cg > + < cg, f + cg > \\
&=< f, f > + < f, cg > + < cg, f > + < cg, cg > \\
&=< f, f > +\bar{c} < f, g > +c < g, f > + \mid c \mid^2 < g, g >
\end{aligned}$$

Sei nun $c := \frac{-< f,g >}{< g,g >}$. Dann gilt

$$0 \leqq < f, f > -\frac{< g, f >}{< g, g >} < f, g > -\frac{< f, g >}{< g, g >} < g, f > + \frac{\mid < f, g > \mid^2}{< g, g >}$$

$$
\begin{aligned}
\iff 0 &\leqq < f,f >< g,g > - < g,f >< f,g > - < f,g >< g,f > + |< f,g >|^2 \\
&= < f,f >< g,g > - < f,g > \overline{< f,g >} - < f,g > \overline{< f,g >} + |< f,g >|^2 \\
&= < f,f >< g,g > - < f,g > \overline{< f,g >} - |< f,g >|^2 + |< f,g >|^2 \\
&= < f,f >< g,g > - < f,g > \overline{< f,g >} \\
&\iff
\end{aligned}
$$

$$< f,g > \overline{< f,g >} \leqq < f,f >< g,g >$$

✓

Wegen (1) und (2) gilt die Schwarzsche Ungleichung. □

Definition (Hilbert-Norm):

$$| f | := \sqrt{< f,f >} = \sqrt{\int_0^{2\pi} | f(x) |^2 \, dx} \tag{8}$$

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R} \to (0, 2\pi)$ gegeben durch

$$\forall x \in (0, 2\pi), \forall a \in \mathbb{R} : f(x) = x \wedge f(a) = f(a + 2\pi)$$

Dann hat f die Periode 2π und ist eine Regelfunktion, also integrierbar. Für die Hilbert-Norm gilt

$$
\begin{aligned}
| f | &= \sqrt{< f,f >} = \sqrt{\int_0^{2\pi} | f(x) |^2 \, dx} \\
&= \sqrt{\int_0^{2\pi} | x |^2 \, dx} = \sqrt{\int_0^{2\pi} x^2 dx} \\
&= \sqrt{\left[\tfrac{1}{3} x^3\right]_0^{2\pi}} \\
&= \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{3} - \frac{0^3}{3}} = \sqrt{\frac{8\pi^3}{3}}
\end{aligned}
$$

Definition (Orthogornalität): Die Funktionen f, g heißen orthogonal zueinander, wenn

$$< f,g > = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} dx = 0 \tag{9}$$

gilt.

Nach dem, was wir schon kennen ist dann naheliegend, daß eine Familie von Funktionen $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ ein Ortho**normal**system bildet, wenn gilt

$$< f_\alpha, f_\beta > = \begin{cases} 0 & \text{, falls } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{, falls } \alpha = \beta \end{cases} \tag{10}$$

wobei $\mathcal{A}$ eine beliebige Indexmenge sein kann. Zum Beispiel die Menge der natürlichen ($\mathbb{N}$) oder ganzen ($\mathbb{Z}$) Zahlen.

Beispiel: Ein Beispiel für ein Orthonormalsystem ist folgende Familie von Funktionen

$$\left(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(i\cdot n\cdot x)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

Denn ($f_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(i\cdot n\cdot x)$) erfüllt

$$\begin{aligned}
< f_n, f_n > &= < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(i\cdot n\cdot x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(i\cdot n\cdot x) > \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(i\cdot n\cdot x)\cdot\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(i\cdot n\cdot x)}dx \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(i\cdot n\cdot x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-i\cdot n\cdot x)dx \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\exp(0) \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\cdot 1 = \left[\tfrac{1}{2\pi}x\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi - 0 = 1
\end{aligned}$$

✓

und seien $n, m \in \mathbb{Z}$ sodass $n \neq m$ dann erfüllt

$$\begin{aligned}
< f_n, f_m > &= < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp(inx), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp(inx) > \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\exp(inx)\cdot\overline{\exp(imx)}dx \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\exp(inx - imx)dx \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\cdot\exp(x\cdot(in - im))dx \text{ , \textbf{(lineare Substitution)}} \\
&= \left[\tfrac{1}{2\pi(in-im)}\cdot\exp(x(in-im))\right]_0^{2\pi} \\
&= \left[\tfrac{i}{2\pi(m-n)}\cdot\exp(x(in-im))\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{i}{2\pi(m-n)}\exp(e\pi(in-im)) - \frac{i}{2\pi(m-n)}\exp(0\cdot(in-im)) \\
&= \frac{i}{2\pi(m-n)}\underbrace{\exp(i\cdot 2\pi(n-m))}_{=1} - \frac{i}{2\pi(m-n)} \\
&= \frac{i}{2\pi(m-n)} - \frac{i}{2\pi(m-n)} = 0
\end{aligned}$$

✓

Da wir nun eine „Basis“, sprich ein Orthonormalsystem, $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ für alle Regelfunktionen der Periode 2π erzeugen können, sind wir dazu in der Lage jedem f aus dem Vektorraum der Regelfunktionen mit Periode 2π eindeutig die Zahlen

$$c_\alpha = < f, f_\alpha > \tag{11}$$

zuzuordnen. Diese heißen die Fourier-Koeffizienten von f bezüglich des Orthonormalsystems $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$

Wir wollen im folgenden eine Regelfunktion f mit der Periode 2π durch eine Linearkombination bezüglich eines Orthonormalsystems $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ möglichst gut im Sinne der Hilbert-Norm approximieren.

Satz: Es sei $\mathcal{E}$ eine <u>endliche</u> Teilmenge von $\mathcal{A}$ und $\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha$ eine beliebige Linearkombination des „Orthonormalsystems“$(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{E}}$ mit $u_\alpha \in \mathbb{C}$ für alle $\alpha \in \mathcal{E}$.
Es gilt: Die Hilbert-Norm von

$$f - \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha$$

ist **minimal** genau dann, wenn

$$u_\alpha = c_\alpha$$

für alle $\alpha \in \mathcal{E}$ gilt.

Beweis: Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}
\mid f - \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha \mid^2 &= < f - \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha, f - \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha > \\
&\stackrel{(2)}{=} < f, f - \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha > - < \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha, f - \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha > \\
&\stackrel{(3)}{=} < f, f > - < f, \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha > - < \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha, f > + < \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha, \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha > \\
&= < f, f > - \underbrace{\sum_{\alpha\in\mathcal{E}} \overbrace{u_\alpha < f, f_\alpha >}^{(4)}}_{(3)} - \underbrace{\sum_{\alpha\in\mathcal{E}} \overbrace{\overline{u_\alpha} < f_\alpha, f >}^{(5)}}_{(2)} + \underbrace{< \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha, \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha >}_{= \sum\limits_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha \overline{u_\alpha} (\textbf{ siehe Nebenrechnung})}
\end{aligned}$$

Nebenrechnung: Aufgrund der Orthogonalitätsrelationen erhält man

$$\boxed{< \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha, \sum_{\beta\in\mathcal{E}} u_\beta f_\beta > \stackrel{(2),(3)}{=} \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} \sum_{\beta\in\mathcal{E}} \overbrace{u_\alpha \underbrace{\overline{u_\beta} < f_\alpha, f_\beta >}_{(5)}}^{(4)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha \overline{u_\alpha} \underbrace{< f_\alpha, f_\alpha >}_{=1} = \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha \overline{u_\alpha}}$$

Also ist

$$\mid f - \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha \mid^2 = < f, f > - \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha \underbrace{< f_\alpha, f >}_{\stackrel{(11),(1)}{=} \overline{c_\alpha}} - \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} \overline{u_\alpha} \underbrace{< f, f_\alpha >}_{\stackrel{(11)}{=} c_\alpha} + \sum_{\alpha\in\mathcal{E}} u_\alpha \overline{u_\alpha}$$

Wir fügen nun eine Nullsumme ein!

$$
\begin{aligned}
\mid f - \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha \mid^2 &= \mid f \mid^2 - \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} u_\alpha \overline{c_\alpha} - \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} \overline{u_\alpha} c_\alpha + \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} u_\alpha \overline{u_\alpha} + \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathcal{E}} c_\alpha \overline{c_\alpha} - \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} c_\alpha \overline{c_\alpha}}_{=0} \\
&= \mid f \mid^2 - \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} \overbrace{c_\alpha \overline{c_\alpha}}^{=|c_\alpha|^2} + \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} \underbrace{(u_\alpha \overline{u_\alpha} - u_\alpha \overline{c_\alpha} - \overline{u_\alpha} c_\alpha + c_\alpha \overline{c_\alpha})}_{=|c_\alpha - u_\alpha|^2 = |c_\alpha - u_\alpha||\overline{c_\alpha - u_\alpha}| = |c_\alpha - u_\alpha||\overline{c_\alpha} - \overline{u_\alpha}| = c_\alpha \overline{c_\alpha} - c_\alpha \overline{u_\alpha} - u_\alpha \overline{c_\alpha} + u_\alpha \overline{u_\alpha}} \\
&= \mid f \mid^2 - \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} \mid c_\alpha \mid^2 + \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathcal{E}} \mid c_\alpha - u_\alpha \mid^2}_{>0 \iff c_\alpha \neq u_\alpha}
\end{aligned}
$$

Folglich gilt der Satz. □

Korrollar/Satz (Besselsche Ungleichung): Für jede Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ist $\sum_{\alpha \in \mathcal{B}} \mid c_\alpha \mid^2$ konvergent und es gilt

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{B}} \mid c_\alpha \mid^2 \leqq \mid f \mid^2 \tag{12}$$

Beweis: Ganz offensichtlich ist für jede endliche Teilmenge $\mathcal{E}$ von $\mathcal{A}$

$$\mid f - \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha \mid^2 \geqq \mid f \mid^2 - \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} \mid c_\alpha \mid^2 \quad \text{, für alle } u_\alpha \in \mathbb{C}$$

und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn für alle $\alpha \in \mathcal{E}$ gilt $u_\alpha = c_\alpha$:

$$\underbrace{\mid f - \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} c_\alpha f_\alpha \mid^2}_{\geqq 0 \Longrightarrow} = \underbrace{\mid f \mid^2 - \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} \mid c_\alpha \mid^2}_{\geqq 0}.$$

Zusammenfassend gilt dann offenbar

$$\underbrace{0 \leqq \mid f \mid^2 - \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} \mid c_\alpha \mid^2}_{\iff \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} |c_\alpha|^2 \leqq |f|^2} {\scriptstyle = \mid f - \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} c_\alpha f_\alpha \mid^2 \leqq \mid f - \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} u_\alpha f_\alpha \mid^2}$$

Folglich gilt insbesondere auch für jede endliche Teilmenge $\mathcal{E}$ von $\mathcal{B}$

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{E}} \mid c_\alpha \mid^2 \leqq \mid f \mid^2$$

so dass auch $\sum_{\alpha \in \mathcal{B}} \mid c_\alpha \mid^2$ konvergent und durch $\mid f \mid^2$ nach oben beschränkt ist.□

Moritz Hirdes (Moritz Hirdes) und Benjamin Tams (Benjamin Tams)