Der Satz von Seifert-van Kampen - Gruppoide, Pushouts & der Satz von Brown.

Sebastian Hage*

19.12.2004

$$\begin{tikzcd}
\pi X_0 \arrow[r, "\pi i_2"] \arrow[d, "\pi i_1"'] & \pi X_2 \arrow[d, "\pi j_2"] \arrow[ddr, bend left, "\gamma_2"] & \\
\pi X_1 \arrow[r, "\pi j_1"'] \arrow[drr, bend right, "\gamma_1"'] & \pi X \arrow[dr, dotted, "\gamma"] & \\
 & & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X_0, x_0) \arrow[r, "i_{2*}"] \arrow[d, "i_{1*}"'] & \pi_1(X_2, x_0) \arrow[d, "j_{2*}"] \arrow[ddr, bend left, "\psi_2"] & \\
\pi_1(X_1, x_0) \arrow[r, "j_{1*}"'] \arrow[drr, bend right, "\psi_1"'] & \pi_1(X, x_0) \arrow[dr, dotted, "\phi"] & \\
 & & G
\end{tikzcd}$$

Vortrag im Rahmen des Seminars

"Knotentheorie"

von Prof. Schick

WS 2004/05

*email: sebhage@math.uni-goettingen.de

Inhaltsverzeichnis

1 Kategorientheorie

Dieser einleitende Abschnitt führt in allgemeiner Weise die kategorientheoretischen Begriffe des Gruppoids und Pushouts ein und stellt die wichtigsten, im weiteren Verlauf benötigten Eigenschaften zur Verfügung. Dabei werden grundlegende Kenntnisse über Kategorien und Funktoren vorausgesetzt. Als Quellen dienen hier im wesentlichen [1] und [5], deren Material damit noch lange nicht ausgeschöpft ist.

1.1 Gruppoide

Der Begriff Gruppoid ist eine Verallmeinerung des Gruppenbegriffs und ein Spezialfall des Begriffs der Kategorie: bei einem Gruppoid handelt es sich um eine Kategorie, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist. Als wichtiges Beispiel ist hier sofort das Fundamentalgruppoid πX eines topologischen Raumes X zu nennen, welches im Satz von Brown eine zentrale Rolle spielt. Dieser Abschnitt dient der Einführung von Grundbegriffen der Gruppoid-Theorie.

Zu Beginn soll an drei wichtige Grundbegriffe hinsichtlich der Morphismen einer beliebigen Kategorie erinnert werden.

Definition 1.1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ Objekte von $\mathcal{C}$.

1. Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$[1] von $\mathcal{C}$ heißt ***Isomorphismus***, falls er einen inversen Morphismus besitzt, d.h. es existiert ein Morphismus $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ mit $fg = 1_Y$ und $gf = 1_X$.[2] Man setzt $g := f^{-1}$. Die Objekte X und Y heißen dann ***isomorph***, in Zeichen $X \cong Y$. [3]
2. Ein Morphismus von $\mathcal{C}$ heißt ***Schnitt***, falls er ein Linksinverses besitzt.
3. Ein Morphismus von $\mathcal{C}$ heißt ***Retraktion***, falls er ein Rechtsinverses besitzt.

Zu bemerken ist, daß ein Morphismus genau dann ein Isomorphismus ist, wenn er ein Schnitt und eine Retraktion ist.

Wir widmen uns nun den Gruppoiden und beginnen mit ihrer (schon bekannten)

Definition 1.2. Ein ***Gruppoid*** ist eine Kategorie, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist.

Es schließen sich Beispiele von Gruppoiden an.

Beispiel 1.3. Insbesondere zeigt sich hier, daß sowohl eine Menge als auch eine Gruppe als Gruppoid aufgefaßt werden können.

1. Sei $\{*\}$ eine einelementige Menge. Man erhält ein Gruppoid $\mathcal{G}$ durch

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{G}) := \{*\} \quad \text{und} \quad \mathrm{Mor}(*, *) := \{1_* : * \to *\}$$

und nennt es schlicht $*$.

[1] Mit $\mathcal{C}(X, Y)$ wird hier die Morphismenmenge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ bezeichet. Für $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ wird auch die Darstellung $f : X \to Y$ verwendet.

[2] Falls zu einem Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ ein inverser Morphismus existiert, so ist dieser eindeutig bestimmt. Sind nämlich $g, g' \in \mathcal{C}(Y, X)$ invers zu f, dann gilt $gf = 1_X = g'f$ sowie $fg = 1_Y = fg'$, und damit folgt $g = g \circ 1_Y = g(fg') = (gf)g' = 1_X \circ g' = g'$.

[3] Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation in $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

2. Sei M eine Menge. Man erhält ein Gruppoid $\mathcal{M}$ mit den Definitionen
$$\mathrm{Ob}(\mathcal{M}) := M$$
und für $x, y \in M$
$$\mathcal{M}(x,y) := \begin{cases} \emptyset, & x \neq y \\ \{1_x\}, & x = y. \end{cases}$$
Man kann also eine Menge M als Gruppoid auffassen, dessen Objekte die Elemente von M und dessen Morphismen die Identäten sind.

3. Sei G eine Gruppe mit neutralem Element $1 \in G$. Ein Gruppoid $\mathcal{G}$ läßt sich konstruieren durch
$$\mathrm{Ob}(\mathcal{G}) := \{1\} \quad \text{und} \quad \mathcal{G}(1,1) := G,$$
wobei die Komposition von Morphismen in $\mathcal{G}$ durch die Gruppenmultiplikation gegeben ist. Demnach läßt sich ein Gruppe also als ein Gruppoid mit einem Objekt und den Gruppenelementen als Morphismen auffassen.

4. Bezeichne $\mathcal{I}$ das Gruppoid mit den Objekten
$$\mathrm{Ob}(\mathcal{I}) := \{0,1\}$$
und den Identitäten $1_0, 1_1$ sowie den zueinander inversen Morphismen
$$\imath : 0 \longrightarrow 1, \quad \imath^{-1} : 1 \longrightarrow 0.$$
$\mathcal{I}$ hat unter den Gruppoiden eine analoge Bedeutung wie $I = [0,1]$ unter den topologischen Räumen.

5. Ist X ein topologischer Raum, so bekommt man das Fundamentalgruppoid πX von X durch die Objektmenge
$$\mathrm{Ob}(\pi X) := X$$
und die Morphismenmengen
$$\pi X(x,y) := PX(x,y)/\sim$$
für $x, y \in X$, wobei $PX(x,y)$ die Menge aller Wege in X mit Anfang in x und Ende in y und $\sim$ die durch die Homotopie von Wegen bezüglich Anfangs- und Endpunkt gegebene Äquivalenzrelation bedeutet.

Das vorangehende Beispiel zeigt, das eine Gruppe auf natürliche Weise die Struktur eines Gruppoides in sich trägt. Umgekehrt beheimatet ein Gruppoid eine Gruppenfamilie:

Definierendes Lemma 1.4. *Sei $\mathcal{G}$ ein Gruppoid und $x \in Ob(\mathcal{G})$ ein Objekt von $\mathcal{G}$. Dann ist die Morphismenmenge*
$$\mathcal{G}(x) := \mathcal{G}(x,x)$$
mit der durch die Komposition in $\mathcal{G}$ induzierten Verknüpfung
$$\circ : \mathcal{G}(x) \longrightarrow \mathcal{G}(x), \ (f,g) \longmapsto f \circ g$$
*eine Gruppe und heißt **Objektgruppe** von $\mathcal{G}$ in x.*

Beweis. Die Gruppenaxiome ergeben sich für $\mathcal{G}(x)$ problemlos aus den Gruppoideigenschaften von $\mathcal{G}$. □

Beispiel 1.5. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist die Objektgruppe $\pi X(x)$ des Fundamentalgruppoides von X in x gegeben durch die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$. Für eine Gruppe G gilt $\mathcal{G}(1) = G$, d.h. die Objektgruppe von $\mathcal{G}$ stimmt mit der zugrundeliegenden Gruppe G überein.

Es folgt der Zusammenhangsbegriff eines Gruppoides.

Definition 1.6. Ein Gruppoid $\mathcal{G}$ heißt ***zusammenhängend***, falls $\mathcal{G}(x, y) \neq \emptyset$ für alle $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$. Es heißt ***total unzusammenhängend***, falls $\mathcal{G}(x, y) = \emptyset$ für alle $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ mit $x \neq y$.

Nun decken wir den Zusammenhang von zusammenhängendem Fundamentalgruppoid und wegweise zusammenhängendem Raum auf.

Lemma 1.7. *Sei X ein topologischer Raum. X ist genau dann wegweise zusammenhängend, wenn das Fundamentalgruppoid πX von X zusammenhängend ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei X wegweise zusammenhängend. Weiterhin seien $x, y \in \mathrm{Ob}(\pi X) = X$. Dann existiert ein Weg w in X von x nach y, also ist $w \in PX(x, y)$ und damit $[w] \in \pi X(x, y)$. Deshalb gilt $\pi X(x, y) \neq \emptyset$, und πX ist somit zusammenhängend.
($\Leftarrow$) Sei πX zusammenhängend. Seien ferner $x, y \in X$. Dann ist $\pi X(x, y) \neq \emptyset$. Wähle $[w] \in \pi X(x, y)$ und erhalte mit $w \in PX(x, y)$ einen Weg in X von x nach y, womit der wegweise Zusammenhang von X gezeigt ist. $\square$

Im Folgenden schwächen wir den Zusammenhangsbegriff eines Gruppoids ab, indem wir ihn für lediglich zwei Objekte erklären und bekommen dadurch eine Äquivalenzrelation auf den Objekten des Gruppoids.

Definition 1.8. Sei $\mathcal{G}$ ein Gruppoid, und seien $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$. Dann heißt x mit y verbindbar (in Zeichen: $x \equiv y$), falls $\mathcal{G}(x, y) \neq \emptyset$.

Lemma 1.9. *Verbindbarkeit ist eine Äquivalenzrelation in Ob($\mathcal{G}$).*

Beweis. Seien $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ mit $x \equiv y$, d.h. x ist mit y verbindbar. Dann ist definitionsgemäß $\mathcal{G}(x, y) \neq \emptyset$. Wähle $f \in \mathcal{G}(x, y)$. Da $\mathcal{G}$ ein Gruppoid ist, ist f ein Isomorphismus, und es gilt $x \cong y$. Seien andersherum x und y isomorph, also $x \cong y$, dann gibt es einen Isomorphismus $f : x \to y$. Wegen $f \in \mathcal{G}(x, y)$ ist $\mathcal{G} \neq \emptyset$, was bedeutet, daß x mit y verbindbar ist, $x \equiv y$. Es folgt, daß die durch die Verbindbarkeit gegebene Relation mit der Relation Isomorphie übereinstimmt. Da Isomorphie eine Äquivalenzrelation ist, gilt dies auch für die Verbindbarkeit. $\square$

Definition 1.10. Sei $\mathcal{G}$ ein Gruppoid. Die Äquivalenzklassen von $\mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ bezüglich der durch die Verbindbarkeit gegebenen Äquivalenzrelation $\equiv$ heißen ***Komponenten*** von $\mathcal{G}$. Die Menge der Komponenten von $\mathcal{G}$ wird als $\pi_0\mathcal{G} := \mathrm{Ob}(\mathcal{G})/\equiv$ bezeichnet.

Beispiel 1.11. Die Komponenten des Fundamentalgruppoids πX eines topologischen Raumes X entsprechen den Wegzusammenhangskomponenten von X. Für die Menge der Komponenten gilt dann $\pi_0\pi X = \pi_0 X$.

Für die Folgerungen aus dem Satz von Brown - insbesondere für die Gewinnung des Satzes von Seifert-van Kampen - werden noch zwei weitere Begriffe benötigt.

Definition 1.12. Seien $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ Gruppoide. $\mathcal{G}'$ ist ein ***Teilgruppoid*** von $\mathcal{G}$, falls gilt

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{G}') \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$[4]
2. $\mathcal{G}'(x,y) \subset \mathcal{G}(x,y)$ für alle $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G}')$
3. Die Komposition von Morphismen in $\mathcal{G}'$ entspricht der in $\mathcal{G}$, i.e. das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(x,y) \times \mathcal{G}(x,y) \arrow[r, "\circ"] & \mathcal{G}(x,z) \\
\mathcal{G}'(x,y) \times \mathcal{G}'(x,y) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\circ'"] & \mathcal{G}'(x,z) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

ist für alle $x, y, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G}')$ kommutativ.

Definition 1.13. Sei $\mathcal{G}$ ein Gruppoid.

1. Sei $\mathcal{G}'$ ein Teilgruppoid von $\mathcal{G}$. Dann heißt $\mathcal{G}'$ voll bzw. ***volles Teilgruppoid***, falls $\mathcal{G}'(x,y) = \mathcal{G}(x,y)$ für alle $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G}')$ gilt.
2. Sei $A \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ eine Menge von Objekten. Mit $\mathcal{G}A$ wird das eindeutig bestimmte volle Teilgruppoid von $\mathcal{G}$ mit $\mathrm{Ob}(\mathcal{G}A) = A$ bezeichnet.[5]

Als letztes erklären wir die Kategorie Gd der Gruppoide.

Definition 1.14. Die ***Kategorie*** Gd ***der Gruppoide*** sei durch folgende Daten gegeben:

- Die Objekte $\mathrm{Ob}(Gd)$ sind Gruppoide.
- Für zwei Gruppoide $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathrm{Ob}(Gd)$ besteht die Morphismenmenge $\mathrm{Mor}_{Gd}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = Gd(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ aus den Funktoren $\mathcal{F} : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$.
- Die Komposition von Morphismen ist in Gd wie folgt gegeben: Sind $\mathcal{F} : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ und $\mathcal{F}' : \mathcal{H} \to \mathcal{J}$ zwei Funktoren in Gd, so wird $\mathcal{F}' \circ \mathcal{F} : \mathcal{G} \to \mathcal{J}$ definiert durch die Zusammensetzung von Abbildungen

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{Ob}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\mathcal{F}'} \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$$

auf den Objekten und die Komposition von Abbildungen

$$\mathcal{G}(x,y) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{H}(\mathcal{F}x, \mathcal{F}y) \xrightarrow{\mathcal{F}'} \mathcal{J}(\mathcal{F}'\mathcal{F}x, \mathcal{F}'\mathcal{F}y)$$

auf den Morphismen, wobei $x, y \in \mathrm{Ob}(Gd)$ ist. Für ein Gruppoid $\mathcal{G}$ ist die Identität $1_{\mathcal{G}} \in Gd(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ durch den identischen Funktor

$$\mathrm{id}_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

gegeben, der durch die Identitätsabbildungen $\mathrm{id}_{\mathrm{Ob}(\mathcal{G})}$ und $\mathrm{id}_{\mathcal{G}(x,y)}$ auf den Objekten und Morphismen bestimmt ist.

Ohne Beweis schließt dieser Abschnitt mit

Lemma 1.15. *Gd ist eine Kategorie.*

[4] Das Teilgruppoid $\mathcal{G}'$ heißt ***weit*** in $\mathcal{G}$, falls $\mathrm{Ob}(\mathcal{G}') = \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$.

[5] Für das Teilgruppoid $\mathcal{G}A$ gilt $\mathcal{G}A(x,y) = \mathcal{G}(x,y)$ für alle $x, y \in A$. Insbesondere hat man für $A = \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ die Gleichheit $\mathcal{G}\mathrm{Ob}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$.

1.2 Pushouts

Als Vorbereitung der Sätze von Brown und Seifert-van Kampen führen wir den kategorientheoretischen Begriff des Pushouts ein.

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Betrachtet werden nun Diagramme der Form

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[d, "g_2"] \\ X_1 \arrow[r, "g_1"'] & X \end{tikzcd}$$

wobei f_1, f_2, g_1, g_2 Morphismen von $\mathcal{C}$ sind. Zur Präzisierung verwenden wir den Begriff des Quadrates.

Definition 1.16. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein **Quadrat** $\mathcal{Q}$ in $\mathcal{C}$ ist ein Quadrupel $\mathcal{Q} = (f_1, f_2, g_1, g_2)$ von Morphismen f_1, f_2, g_1, g_2 von $\mathcal{C}$, so daß f_1 und f_2 dieselbe Quelle, g_1 und g_2 dasselbe Ziel haben und für $\nu = 1, 2$ jeweils das Ziel von f_ν mit der Quelle von g_ν übereinstimmt. $\mathcal{Q}$ heißt **kommutativ**, falls $g_1 f_1 = g_2 f_2$ gilt.

Schon folgt die zentrale

Definition 1.17. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein kommutatives Quadrat $\mathcal{Q} = (i_1, i_2, j_1, j_2)$ in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{Q}"] & X_2 \arrow[d, "j_2"] \\ X_1 \arrow[r, "j_1"'] & X \end{tikzcd}$$

heißt ein **Pushout (kokartesisches Quadrat)** in $\mathcal{C}$ bzw. von (i_1, i_2), falls es die folgende universelle Eigenschaft hat: zu jedem Objekt Y von $\mathcal{C}$ und jedem Paar $f_\nu : X_\nu \to Y$, $\nu = 1, 2$, von Morphismen von $\mathcal{C}$ mit $f_1 i_1 = f_2 i_2$ gibt es genau einen Morphismus $f : X \to Y$ von $\mathcal{C}$ mit $f j_\nu = f_\nu$.

Anschaulich haben wir bei einem Pushout also folgende Situation:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & X_2 \arrow[d, "j_2"] \arrow[ddr, bend left, "f_2"] & \\ X_1 \arrow[r, "j_1"'] \arrow[drr, bend right, "f_1"'] & X \arrow[dr, dotted, "f"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

Der nachstehende Satz zeigt, daß in einem Pushout (i_1, i_2, j_1, j_2) von (i_1, i_2) das Paar (j_1, j_2) von Morphismen bis auf Isomorphie eindeutig durch (i_1, i_2) bestimmt ist. Insbesondere bedeutet dies, daß das Objekt X (vgl. mit obigen Bezeichnungen) bis auf Isomorphie eindeutig durch (i_1, i_2) bestimmt ist.

Satz 1.18. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, und seien $\mathcal{Q} = (i_1, i_2, j_1, j_2)$ und $\mathcal{Q}' = (i_1, i_2, j_1', j_2')$ Pushouts von (i_1, i_2), gegeben durch die Diagramme*

$$
\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & X_2 \arrow[d, "j_2"] \\
X_1 \arrow[r, "j_1"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & X_2 \arrow[d, "j_2'"] \\
X_1 \arrow[r, "j_1'"'] & X'.
\end{tikzcd}
$$

Dann gibt es einen Isomorphismus $f : X \to X'$ von $\mathcal{C}$, durch den das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[dl, "j_1"'] \arrow[dr, "j_1'"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & X' \\
 & X_2 \arrow[ul, "j_2"] \arrow[ur, "j_2'"'] &
\end{tikzcd}
$$

kommutativ wird, i.e. $fj_\nu = j_\nu'$ für $\nu = 1, 2$.

Beweis. Die Kommutativität des Quadrates $\mathcal{Q}'$ und die Pushout-Eigenschaft von $\mathcal{Q}$ liefern die Existenz und Eindeutigkeit eines Morphismus $f : X \to X'$ mit $fj_\nu = j_\nu'$ für $\nu = 1, 2$.

$$
\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & X_2 \arrow[d, "j_2"] \arrow[ddr, bend left, "j_2'"] & \\
X_1 \arrow[r, "j_1"'] \arrow[drr, bend right, "j_1'"'] & X \arrow[dr, dotted, "f"] & \\
 & & X'
\end{tikzcd}
$$

Es bleibt also lediglich zu zeigen, daß f ein Isomorphimus ist. Analog zur obigen Argumentation existiert wegen der Kommutativität von $\mathcal{Q}$ und der Pushout-Eigenschaft von $\mathcal{Q}'$ eindeutig ein Morphimus $f' : X' \to X$ mit $f'j_\nu' = j_\nu$ für $\nu = 1, 2$:

$$
\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & X_2 \arrow[d, "j_2'"] \arrow[ddr, bend left, "j_2"] & \\
X_1 \arrow[r, "j_1'"'] \arrow[drr, bend right, "j_1"'] & X' \arrow[dr, dotted, "f'"] & \\
 & & X.
\end{tikzcd}
$$

Betrachte nun das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & X_2 \arrow[d, "j_2"] \arrow[ddr, bend left, "j_2"] & \\
X_1 \arrow[r, "j_1"'] \arrow[drr, bend right, "j_1"'] & X \arrow[dr, shift left, "1_X"] \arrow[dr, shift right, "f'f"'] & \\
 & & X
\end{tikzcd}
$$

Für $\nu = 1,2$ ist

$$(f'f)j_\nu = f'(fj_\nu) = f'j'_\nu = j_\nu = 1_X j_\nu.$$

Aus der Eindeutigkeitsaussage der Pushout-Eigenschaft von $\mathcal{Q}$ folgt nun die Gleichheit

$$f'f = 1_X.$$

Schließlich betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & X_2 \arrow[d, "j'_2"] \arrow[ddr, bend left, "j'_2"] & \\
X_1 \arrow[r, "j'_1"'] \arrow[drr, bend right, "j'_1"'] & X' \arrow[dr, shift left, "1_{X'}"] \arrow[dr, shift right, "ff'"'] & \\
 & & X'
\end{tikzcd}$$

Wir haben für $\nu = 1,2$ analog

$$(ff')j'_\nu = f(f'j'_\nu) = fj_\nu = j'_\nu = 1_{X'}j'_\nu$$

und mithilfe der Eindeutigkeitsaussage für $\mathcal{Q}'$

$$ff' = 1_{X'}.$$

Also sind f und f' zueinander inverse Morphismen und somit Isomorphismen. Insbesondere ist damit $X \cong X'$. □

Es folgen nun Beispiele für Pushouts.

Beispiel 1.19. Sei $\mathcal{C} = Set$ die Kategorie der Mengen. Seien weiterhin X eine Menge und $X_0, X_1, X_2 \subset X$ Teilmengen mit $X = X_1 \cup X_2$ und $X_0 = X_1 \cap X_2$, sowie i_ν, j_ν für $\nu = 1,2$ die Inklusionen

$$i_\nu : X_0 \hookrightarrow X_\nu, \quad j_\nu : X_\nu \hookrightarrow X.$$

Dann ist das Quadrat $\mathcal{Q} = (i_1, i_2, j_1, j_2)$

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, hook, "i_2"] \arrow[d, hook, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{Q}"] & X_2 \arrow[d, hook, "j_2"] \\
X_1 \arrow[r, hook, "j_1"'] & X
\end{tikzcd}$$

ein Pushout. Zum Nachweis sei Y eine weitere Menge und $f_\nu : X_\nu \to Y$ ein Paar von Abbildungen mit $f_1 i_1 = f_2 i_2$, was gerade $f_1|_{X_0} = f_2|_{X_0}$ bedeutet. Die Abbildung $f : X \to Y$, gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x), & x \in X_1 \\ f_2(x), & x \in X_2 \end{cases},$$

ist deshalb wohldefiniert, und es gilt $fj_\nu = f_\nu$, wodurch f wegen $X = X_1 \cup X_2$ eindeutig bestimmt ist.

Beispiel 1.20. Sei $\mathcal{C} = Top$ die Kategorie der topologischen Räume. Weiterhin seien X ein topologischer Raum und $X_0, X_1, X_2 \subset X$ Teilräume mit $X = X_1 \cup X_2$ und $X_0 = X_1 \cap X_2$, sowie

$$\begin{aligned} i_\nu : &\quad X_0 \hookrightarrow X_\nu \\ j_\nu : &\quad X_\nu \hookrightarrow X,\ \nu = 1,2 \end{aligned}$$

die bekannten Inklusionen von Teilräumen. Das Quadrat $\mathcal{Q} = (i_1, i_2, j_1, j_2)$ in Top

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, hook, "i_2"] \arrow[d, hook, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{Q}"] & X_2 \arrow[d, hook, "j_2"] \\ X_1 \arrow[r, hook, "j_1"'] & X \end{tikzcd}$$

ist genau dann ein Pushout, wenn jede Abbildung $f : X \to Y$ in einen topologischen Raum Y, deren Einschränkungen $f|_{X_\nu} = fj_\nu$ stetig sind, stetig ist. Dies ist der Fall, wenn $X = \mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2$ gilt, oder X_1 und X_2 abgeschlossen in X sind.

Beispiel 1.21. Sei $\mathcal{C} = Gr$ die Kategorie der Gruppen. Ist das Quadrat $\mathcal{Q} = (i_1, i_2, j_1, j_2)$ in Gr

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{Q}"] & G_2 \arrow[d, "j_2"] \\ G_1 \arrow[r, "j_1"'] & G \end{tikzcd}$$

ein Pushout und sind i_1, i_2 Inklusionen von Untergruppen, so heißt G das *freie Produkt von G_1 und G_2 mit amalgamierter Untergruppe G_0*

$$G = G_1 *_{G_0} G_2.$$

Ist $G_0 = 1$ die triviale Gruppe, so heißt G das *freie Produkt* von G_1 und G_2

$$G = G_1 * G_2.$$

Wie schon gezeigt, ist das freie Produkt $G_1 * G_2$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß zu je zwei Gruppen G_1 und G_2 ein freies Produkt existiert[6], mit anderen Worten: das Quadrat in Gr

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & G_2 \arrow[d, "j_2"] \\ G_1 \arrow[r, "j_1"'] & G_1 * G_2 \end{tikzcd}$$

ist für zwei beliebige Gruppen G_1, G_2 ein Pushout.

[6] Eine Konstruktion hiervon enthält [3].

Im Folgenden soll noch die Invarianz von Pushouts unter Retraktionen gezeigt werden. Zur begrifflichen Präzisierung dieses Sachverhaltes wird zunächst eine Kategorie eingeführt, deren Objekte kommutative Quadrate sind.

Definition 1.22. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Die *Kategorie $\mathcal{C}_\square$ der kommutativen Quadrate* in $\mathcal{C}$ sei durch folgende Daten gegeben:

- die Objekte $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_\square)$ sind die kommutativen Quadrate $\mathcal{Q} = (f_1, f_2, g_1, g_2)$ in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[d, "g_2"] \\ X_1 \arrow[r, "g_1"'] & X. \end{tikzcd}$$

- Sind $\mathcal{Q} = (f_1, f_2, g_1, g_2)$ und $\mathcal{Q}' = (f_1', f_2', g_1', g_2')$ kommutative Quadrate in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[d, "g_2"] \\ X_1 \arrow[r, "g_1"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_0' \arrow[r, "f_2'"] \arrow[d, "f_1'"'] & X_2' \arrow[d, "g_2'"] \\ X_1' \arrow[r, "g_1'"'] & X', \end{tikzcd}$$

  dann ist ein Morphismus $C \in \mathrm{Mor}(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}')$ von $\mathcal{C}_\square$ ein Quadrupel $C = (c_0, c_1, c_2, c)$ von Morphismen von $\mathcal{C}$ mit $c_\nu : X_\nu \to X_\nu', \nu = 0, 1, 2,$ und $c : X \to X'$, so daß in

$$\begin{tikzcd} X_0' \arrow[rrr, "f_2'"] \arrow[ddd, "f_1'"'] & & & X_2' \arrow[ddd, "g_2'"] \\ & X_0 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[ul, "c_0"'] & X_2 \arrow[d, "g_2"] \arrow[ur, "c_2"] & \\ & X_1 \arrow[r, "g_1"'] \arrow[dl, "c_1"] & X \arrow[dr, "c"'] & \\ X_1' \arrow[rrr, "g_1'"'] & & & X' \end{tikzcd}$$

  die Teilquadrate kommutieren, was gleichbedeutend ist mit

$$f_1'c_0 = c_1 f_1,\ \ f_2'c_0 = c_2 f_2,\ \ cg_1 = g_1'c_1,\ \ cg_2 = g_2'c_2.$$

- Sind $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ kommutative Quadrate wie oben, ist $\mathcal{Q}'' = (f_1'', f_2'', g_1'', g_2'')$ ein weiteres kommutatives Quadrat in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X_0'' \arrow[r, "f_2''"] \arrow[d, "f_1''"'] & X_2'' \arrow[d, "g_2''"] \\ X_1'' \arrow[r, "g_1''"'] & X'' \end{tikzcd}$$

und sind $C = (c_0, c_1, c_2, c) : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$ sowie $D = (d_0, d_1, d_2, d) : \mathcal{Q}' \to \mathcal{Q}''$ Morphismen von $\mathcal{C}_\square$, so definiere die Komposition $DC : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}''$ in $\mathcal{C}_\square$ komponentenweise durch die Komposition in $\mathcal{C}$

$$DC := (d_0c_0, d_1c_1, d_2c_2, dc).$$

Für das Quadrat $\mathcal{Q}$ in $\mathcal{C}$ wird die Identität gegeben durch

$$1_\mathcal{Q} = (1_{X_0}, 1_{X_1}, 1_{X_2}, 1_X).$$

Es folgt nun die erwähnte Invarianz von Pushouts unter Retraktion.

Satz 1.23. *Seien $\mathcal{Q} = (i_1, i_2, j_1, j_2)$ und $\mathcal{Q}' = (i_1', i_2', j_1', j_2')$ kommutative Quadrate in einer Kategorie $\mathcal{C}$*

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & X_2 \arrow[d, "j_2"] \\ X_1 \arrow[r, "j_1"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_0' \arrow[r, "i_2'"] \arrow[d, "i_1'"'] & X_2' \arrow[d, "j_2'"] \\ X_1' \arrow[r, "j_1'"'] & X'. \end{tikzcd}$$

Ist $\mathcal{Q}$ ein Pushout in $\mathcal{C}$ und gibt es eine Retraktion $D : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$ in $\mathcal{C}_\square$, dann ist auch $\mathcal{Q}'$ ein Pushout.

Beweis. Sei $D = (d_0, d_1, d_2, d) : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$ eine Retraktion in $\mathcal{C}_\square$. Dann existiert ein Morphismus $C = (c_0, c_1, c_2, c) : \mathcal{Q}' \to \mathcal{Q}$ von $\mathcal{C}_\square$, so daß $DC = 1_{\mathcal{Q}'}$, also

$$DC = (d_0c_0, d_1c_1, d_2c_2, dc) = (1_{X_0'}, 1_{X_1'}, 1_{X_2'}, 1_{X'}) = 1_{\mathcal{Q}'},$$

i.e.

$$d_0c_0 = 1_{X_0'}, d_1c_1 = 1_{X_1'}, d_2c_2 = 1_{X_2'}, dc = 1_{X'}$$

im folgenden Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_0' \arrow[rrr, "i_2'"] \arrow[ddd, "i_1'"'] \arrow[dr, shift right, "c_0"'] & & & X_2' \arrow[ddd, "j_2'"] \arrow[dl, shift right, "c_2"'] \\
& X_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[ul, shift right, "d_0"'] & X_2 \arrow[d, "j_2"] \arrow[ur, shift right, "d_2"'] & \\
& X_1 \arrow[r, "j_1"'] \arrow[dl, shift right, "d_1"'] & X \arrow[dr, shift right, "d"'] & \\
X_1' \arrow[rrr, "j_1'"'] \arrow[ur, shift right, "c_1"'] & & & X'. \arrow[ul, shift right, "c"']
\end{tikzcd}$$

Es ist nun die Pushout-Eigenschaft von $\mathcal{Q}'$ nachzuweisen, nämlich daß für $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und ein Paar $g_\nu : X_\nu' \to Y$ $(\nu = 1, 2)$ von Morphismen von $\mathcal{C}$ mit $g_1i_1' = g_2i_2'$ genau ein Morphismus $g : X' \to Y$ von $\mathcal{C}$ existiert mit $gj_\nu' = g_\nu$. Wir belegen zuerst die Existenz von g und betrachten die beiden Morphismen $g_\nu d_\nu : X_\nu \to Y$. Es gilt

$$\begin{aligned} (g_1d_1)i_1 &= g_1(d_1i_1) = g_1(i_1'd_0) \\ &= (g_1i_1')d_0 = (g_2i_2')d_0 \\ &= g_2(i_2'd_0) = g_2(d_2i_2) \\ &= (g_2d_2)i_2. \end{aligned}$$

Die universelle Eigenschaft des Pushouts $\mathcal{Q}$ liefert dann die Existenz und Eindeutigkeit eines Morphismus $h : X \to Y$ von $\mathcal{C}$ mit

$$hj_1 = g_1 d_1 \text{ und } hj_2 = g_2 d_2.$$

Mit $g := hc : X' \to Y$ erhalte nun für $\nu = 1, 2$

$$\begin{aligned} gj'_\nu &= hcj'_\nu = hj_\nu c_\nu \\ &= g_\nu d_\nu c_\nu = g_\nu 1_{X'_\nu} \\ &= g_\nu, \end{aligned}$$

womit die Existenz von g gezeigt ist. Für die Eindeutigkeit seien $g, g' : X' \to Y$ Morphismen von $\mathcal{C}$ mit $gj'_\nu = g'j'_\nu = g_\nu$ für $\nu = 1, 2$. Es gilt

$$\begin{aligned} (gd)j_\nu &= g(dj_\nu) = g(j'_\nu d_\nu) \\ &= (gj'_\nu)d_\nu \\ &= g_\nu d_\nu, \end{aligned}$$

und analog ist $(g'd)j_\nu = g_\nu d_\nu$, also $(gd)j_\nu = (g'd)j_\nu$. Aufgrund der Eindeutigkeit für das Pushout $\mathcal{Q}$ folgt

$$gd = g'd$$

und somit

$$g = g1_{X'} = gdc = g'dc = g'1_{X'} = g',$$

womit auch die Eindeutigkeit von g gezeigt ist. Es folgt, daß auch $\mathcal{Q}$ ein Pushout ist. $\square$

2 Wege und Fundamentalgruppoid

Ein Grundstein für den Beweis der großen Sätze Brown und Seifert-van Kampen wird hier freigelegt; im Folgenden stellt sich das tragende Knochengerüst zur Schau: die Unterteilung von Wegen und die Deklaration des Fundamentalgruppoid-Funktors.[7] Die hier betrachteten Wege sind von der Gattung $w : [0,1] \to X$, also durch das Einheitsintervall I parametrisiert. Im späteren topologischen Beweis von Seifert-van Kampen werden verallgemeinerte Wege $w' : [0, \|w'\|] \to X$ verwendet, deren Verknüpfung und Unterteilung komfortabler ist. Als Kern jeglicher Unterteilung erweist sich jedoch das legendäre Lemma von Lebesgue.

2.1 Unterteilung von Wegen

Eine grundlegende Methode im Beweis des Satzes von Brown bzw. von Seifert-van Kampen ist die geeignete Unterteilung von Wegen in einem topologischen Raum.

Definition 2.1. Sei X ein topologischer Raum. Sei weiter $n \in \mathbb{N}$ und seien $w_1, \dots, w_n : [0,1] \to X$ Wege in X mit

$$w_i(1) = w_{i+1}(0), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Das Produkt

$$\prod_{i=1}^{n} w_i : [0,1] \to X$$

von $w_1, \dots, w_n$ wird definiert durch

$$\left(\prod_{i=1}^{n} w_i\right)(t) := w_i(nt - i + 1), \quad t \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right].$$

Bemerkung 2.2. Die Abbildung $\prod_{i=1}^{n} w_i$ ist wohldefiniert, da für $t = \frac{i}{n}$ und $i = 1, \dots, n$ die Gleichung

$$w_i(n\frac{i}{n} - i + 1) = w_i(1) = w_{i+1}(0) = w_{i+1}(n\frac{i}{n} - (i+1) + 1)$$

gilt. Die Stetigkeit beruht auf der Stetigkeit der Einschränkungen $(\prod_{i=1}^{n} w_i)|_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]}$ auf die abgeschlossenen Teilintervalle $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \subset [0,1]$.

Definierendes Lemma 2.3. *Für einen Weg $w : [0,1] \to X$ in einem topologischen Raum X und eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein n-Tupel $(w_1, \dots, w_n)$ von Wegen $w_1, \dots, w_n : [0,1] \to X$ in X mit $w_i(1) = w_{i+1}(0)$ für $i = 1, \dots, n-1$, so daß gilt*

$$w = \prod_{i=1}^{n} w_i.$$

Dieses eindeutig bestimmte n-Tupel $(w_1, \dots w_n)$ heißt n***-te Unterteilung*** *von w.*

Beweis. Wir beweisen zunächst die Existenz einer n-ten Unterteilung eines Weges w in X. Dazu definiere für $i = 1, \dots n$ die Wege

$$w_i : [0,1] \to X, \quad w_i(t) := w\left(\frac{i-1}{n} + t\frac{1}{n}\right).$$

[7] Diese Darstellung ist an [5] angelehnt.

Es gilt nun für $i = 1, \ldots n-1$

$$w_i(1) = w\left(\frac{i-1}{n} + \frac{1}{n}\right) = w\left(\frac{i}{n}\right) = w_{i+1}(0).$$

Weiterhin ist für $t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ und $i = 1, \ldots n$

$$\begin{aligned} w_i(nt - i + 1) &= w\left(\frac{i-1}{n} + (nt - i + 1)\frac{1}{n}\right) \\ &= w\left(\frac{i-1}{n} + t - \frac{i-1}{n}\right) \\ &= w(t), \end{aligned}$$

also ist

$$w = \prod_{i=1}^{n} w_i.$$

Für die Eindeutigkeit nehme an, daß $w_1, \ldots w_n : [0,1] \to X$ Wege in X mit $w_i(1) = w_{i+1}(0)$, $i = 1, \ldots n-1$, sind, so daß $w = \prod_{i=1}^{n} w_i$ gilt. Dann ist für $t \in [0,1]$, $i = 1, \ldots n$

$$\frac{i-1}{n} + t\frac{1}{n} \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$$

und wir haben

$$\begin{aligned} w\left(\frac{i-1}{n} + t\frac{1}{n}\right) &= w_i\left(n\left(\frac{i-1}{n} + t\frac{1}{n}\right) - i + 1\right) \\ &= w_i(i - 1 + t - i + 1) \\ &= w_i(t), \end{aligned}$$

womit gezeigt ist, daß w durch w_i eindeutig bestimmt ist. □

Bemerkung 2.4. Für die n-te Unterteilung $(w_1, \ldots, w_n)$ eines Weges w gilt

$$w\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] = w_i\,[0,1]\,.$$

für $i = 1, \ldots, n$.

Definition 2.5. Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Überdeckung von X. Sei weiterhin $w : [0,1] \to X$ ein Weg in X und $n \in \mathbb{N}$. Die n-te Unterteilung $(w_1, \ldots w_n)$ von w heißt **zulässig (bezüglich $\mathcal{U}$)**, falls für jedes $i = 1, \ldots n$ ein $\lambda_i \in \Lambda$ existiert mit

$$w_i[0,1] \subset U_{\lambda_i}.$$

Nun erinnere an das elementare Lemma von Lebesgue, das im weiteren Verlauf benötigt wird.

Lemma 2.6. (Lebesgue) *Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gibt es eine Zahl $\delta > 0$* (Lebesguesche Zahl) *mit folgender Eigenschaft: Zu jeder Teilmenge $A \subset X$ mit diam$(A) < \delta$ existiert ein $\lambda \in \Lambda$ mit $A \subset U_\lambda$.*

Beweis. Für jedes $x \in X$ gibt es ein $\epsilon = \epsilon(x) > 0$ derart, daß $B_{2\epsilon(x)}(x) \subset U_\lambda$ für ein geeignetes $\lambda \in \Lambda$. X wird dann durch endlich viele offene Bälle $B_{\epsilon(x)}(x)$ überdeckt. Sei also $\{B_{\epsilon(x)}(x)\}$ mit $x \in \{x_1, \dots, x_n\}$ eine offene Überdeckung von X. Setze $\delta := \min\{\epsilon(x_i) | i = 1, \dots, n\}$. Sei nun $A \subset X$ eine Teilmenge mit $\operatorname{diam}(A) < \delta$. Wähle einen Punkt $a_0 \in A$. Dann gibt es einen Index i mit $1 \le i \le n$, so daß $d(a_0, x_i) < \epsilon(x_i)$. Für $a \in A$ gilt nun $d(a, a_0) < \delta \le \epsilon(x_i)$. Die Dreiecksungleichung liefert jetzt

$$d(a, x_i) \le d(a, a_0) + d(a_0, x_i) \le 2\epsilon(x_i).$$

Somit folgt $A \subset B_{2\epsilon(x_i)}(x_i) \subset U_\lambda$ für $\lambda \in \Lambda$ geeignet. □

Wir wenden uns nun dem zentralen Aspekt dieses Abschnitts zu, enthalten in

Satz 2.7. *Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{U}$ eine innere* [8] *Überdeckung von X, sowie w ein Weg in X. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$, so daß die n-te Unterteilung von w zulässig bezüglich $\mathcal{U}$ ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine innere Überdeckung von X. Dann ist wegen $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathring{U}_\lambda$ und der Stetigkeit von w die Familie $\{w^{-1}(\mathring{U}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine offene Überdeckung des kompakten metrischen Raumes $I = [0, 1]$. Nach dem vorangehenden Lemma von Lebesgue existiert eine Lebesguesche Zahl $\delta > 0$, so daß jedes Teilintervall $I' \subset I$ mit $\operatorname{diam}(I') < \delta$ in einer Menge $w^{-1}(\mathring{U}_\lambda)$ für ein gewisses λ enthalten ist, i.e. $w(I') \subset \mathring{U}_\lambda$. Wähle nun eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \delta$. Sei $(w_1, \dots, w_n)$ die n-te Unterteilung von w. Für $i = 1, \dots, n$ ist

$$\operatorname{diam}\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right) = \frac{1}{n} < \delta,$$

somit existiert zu $i = 1, \dots, n$ ein $\lambda_i \in \Lambda$ mit

$$w\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \subset \mathring{U}_{\lambda_i} \subset U_{\lambda_i}.$$

Wegen

$$w_i[0, 1] = w\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$$

ergibt sich nun

$$w\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \subset U_{\lambda_i},$$

womit gezeigt ist, daß die n-te Unterteilung von w zulässig bezüglich $\mathcal{U}$ ist. □

Abschließend belegen wir, daß die Verfeinerung einer zulässigen Unterteilung eines Weges wieder zulässig ist.

Lemma 2.8. *Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X und w ein Weg in X, dessen n-te Unterteilung bezüglich $\mathcal{U}$ zulässig ist. Dann ist für alle $k \in \mathbb{N}$ auch die kn-te Unterteilung von w zulässig bezüglich $\mathcal{U}$.*

Beweis. Bei der kn-ten Unterteilung $(v_1, \dots, v_{kn})$ von w wird jedes der n Teilintervalle der n-ten Unterteilung $(w_1, \dots, w_n)$ von w in k Teilintervalle der Länge $\frac{1}{kn}$ zerlegt. Daher gibt es zu jedem $j = 1, \dots, kn$ ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$\left[\frac{j-1}{kn}, \frac{j}{kn}\right] \subset \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right],$$

[8] $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ heißt *innere Übderdeckung* von X, falls $\{\mathring{U}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Überdeckung von X ist.

und es gilt

$$v_j[0,1] = w\left[\frac{j-1}{kn}, \frac{j}{kn}\right] \subset w\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] = w_i[0,1].$$

Da die n-te Unterteilung von w zulässig bezüglich $\mathcal{U}$ ist, gibt es zu jedem $i \in \{1,\ldots,n\}$ ein $\lambda_i \in \Lambda$ mit $w_i[0,1] \subset U_{\lambda_i}$. Damit ist

$$v_j[0,1] \subset w_i[0,1] \subset U_{\lambda_i},$$

die kn-te Unterteilung von w also ebenso zulässig bezüglich $\mathcal{U}$. □

2.2 Der Fundamentalgruppoid-Funktor π

Untersucht man die Beziehung des Fundamentalgruppoids zu stetigen Abbildungen zwischen topologischen Räumen, so stellt sich heraus, daß die Abbildung

$$\pi : \mathit{Top} \longrightarrow \mathit{Gd},$$

die jedem topologischen Raum X sein Fundamentalgruppoid πX zuordnet, die Eigenschaften eines kovarianten Funktors von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Gruppoide besitzt. Dies soll nun nachgewiesen werden.

Zunächst definieren wir die Abbildung π und zeigen im Anschluß ihre Funktoreigenschaften.

Definition 2.9. Die Kategorienabbildung $\pi : \mathit{Top} \longrightarrow \mathit{Gd}$ sei folgendermaßen definiert:

- Auf Objekten. Sei $X \in \mathrm{Ob}(\mathit{Top})$ ein topologischer Raum, dann ist $\pi(X) := \pi X$ das Fundamentalgruppoid von X.
- auf Morphismen. Sei $f \in \mathit{Top}(X, Y)$ ein Morphismus von *Top*, also eine stetige Abbildung $f : X \to Y$. Dann wird ein Morphismus in *Gd*, also ein Funktor,

  $$\pi(f) := \pi f : \pi X \longrightarrow \pi Y$$

  gegeben durch

  - die ursprüngliche Mengenabbildung $f : X \to Y$ auf den Objekten $\mathrm{Ob}(\pi X) = X$.
  - die Abbildungen

    $$\pi f : \pi X(x, x') \longrightarrow \pi Y(f(x), f(x')), \quad [w] \longmapsto [fw],$$

    wobei $x, x' \in X$ und $w \in PX(x, x')$ sind, auf den Morphismen von πX.[9] Man setzt $\pi f := f_*$.

[9] Bemerkung zur Wohldefiniertheit von $\pi f = f_*$. Da w ein Weg in X ist, ist die Komposition $fw : I \to Y$ selbst eine stetige Abbildung, also ein Weg in Y. Wegen $w(0) = x$ und $w(1) = x'$ gilt $(fw)(0) = f(w(0)) = f(x)$ und $(fw)(1) = f(w(1)) = f(x')$ und damit $fw \in PY(f(x), f(x'))$ sowie $[fw] \in \pi Y(f(x), f(x'))$. Die Verträglichkeit mit der Homotopierelation sieht man so: Sind $w, w' \in PX(x, x')$, also $[fw], [fw'] \in \pi Y(f(x), f(x'))$, mit $w \simeq w'$. Dann existiert eine Homotopie

$$\varphi : I \times I \longrightarrow X$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi(s,0) &= w(s) \\ \varphi(s,1) &= w'(s) \\ \varphi(0,t) &= x \\ \varphi(1,t) &= x' \end{aligned}$$

für alle $s, t \in I$. Für die Komposition

$$f\varphi : I \times I \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{f} Y$$

gilt dann für alle $s, t \in I$

$$\begin{aligned} (f\varphi)(s,0) &= (fw)(s) \\ (f\varphi)(s,1) &= (fw')(s) \\ (f\varphi)(0,t) &= f(x) \\ (f\varphi)(1,t) &= f(x'). \end{aligned}$$

Demnach ist $f\varphi$ eine Homotopie von fw nach fw', d.h. $fw \simeq fw'$.

Verwende für diesen Nachweis das folgende (hier nicht bewiesene)

Lemma 2.10. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $\mathcal{G}$ ein Gruppoid, und seien eine Abbildung*

$$F : Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{G})$$

sowie eine Familie von Abbildungen

$$\{F : \mathcal{C}(x,y) \longrightarrow \mathcal{G}(Fx, Fy) |\ x, y \in Ob(\mathcal{C})\}$$

gegeben. Dann bestimmen diese Daten genau dann einen kovarianten Funktor $\mathcal{F} := F : \mathcal{C} \to \mathcal{G}$, wenn für alle $x, y, z \in Ob(\mathcal{C})$ und alle Morphismen $f \in Mor_{\mathcal{C}}(x,y)$ und $g \in Mor_{\mathcal{C}}(y,z)$ gilt

$$\mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f).$$

Nun zeigt man

Lemma 2.11. $\pi f = f_* : \pi X \to \pi Y$ *ist ein kovarianter Funktor.*

Beweis. Da πY ein Gruppoid ist, reicht es zu zeigen, daß für alle $[v] \in \pi X(x, x')$ und $[w] \in \pi X(x', x'')$ gilt

$$f_*([v] \cdot [w]) = f_* [v] \cdot f_* [w] .$$

Betrachte den Weg $f \circ (v \cdot w)$ in Y. Für $t \in I$ ist

$$\begin{aligned}
(f \circ (v \cdot w))(t) &= f((v \cdot w)(t)) \\
&= \begin{cases} f(v(2t)), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f(w(2t-1)), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (fv)(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (fw)(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \\
&= (fv \cdot fw)(t).
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
f_*([v] \cdot [w]) &= f_*([v \cdot w]) = [f(v \cdot w)] \\
&= [fv \cdot fw] = [fv] \cdot [fw] \\
&= f_* [v] \cdot f_* [w] ,
\end{aligned}$$

womit die Funktoreigenschaften von f_* nachgewiesen sind. □

Hieraus ergibt sich problemlos

Satz 2.12. $\pi : Top \longrightarrow Gd$ *ist ein kovarianter Funktor.*

Beweis. Seien dazu $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen. Auf den Objekten gilt nach Definition

$$(gf)_* = g_* f_* = gf : X \longrightarrow Z.$$

Ist $[v] \in \pi X(x, x')$ ein Morphismus von πX, so ist

$$(gf)_* [v] = [(gf)v] = [g(fv)] = g_* [fv] = g_* f_* [v] ,$$

also gilt

$$\pi(gf) = (gf)_* = g_* f_* = (\pi g)(\pi f) : \pi X \longrightarrow \pi Z.$$

Für die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ hat man

$$\pi(\mathrm{id}_X) = (\mathrm{id}_X)_* : \pi X \longrightarrow \pi X$$

definitionsgemäß gegeben durch

$$(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$$

auf den Objekten und durch

$$(\mathrm{id}_X)_* : \pi X(x, x') \longrightarrow \pi X(x, x'), \quad [w] \longmapsto [\mathrm{id}_X \circ w] = [w]$$

auf Morphismen, und somit ist

$$\pi(\mathrm{id}_X) = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi X}$$

und π also ein kovarianter Funktor. $\square$

3 Der Satz von Brown

Der Satz von Seifert-van Kampen über die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ eines topologischen Raumes $X = \mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2$ in einem Punkt $x_0 \in X$ läßt sich mithilfe eines Retraktionsargumentes aus einem bedeutend allgemeineren Satz von R. Brown über das Fundamentalgruppoid πX von X gewinnen. Der Schwerpunkt der Beschäftigung liegt nun auf dem Beweis dieses Satzes über Gruppoide. Hier dient das Original [1] sowie [5] als Quelle.

Satz 3.1. **(Brown)** *Sei X ein topologischer Raum, und seien $X_0, X_1, X_2 \subset X$ Teilräume mit $X = \mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2$ und $X_0 = X_1 \cap X_2$. Weiterhin seien $\pi i_1, \pi i_2, \pi j_1, \pi j_2$ die von den Inklusionen*

$$\begin{aligned} i_\nu &: \quad X_0 \hookrightarrow X_\nu \\ j_\nu &: \quad X_\nu \hookrightarrow X, \quad \nu = 1, 2 \end{aligned}$$

induzierten Morphismen der Fundamentalgruppoide. Dann ist das Quadrat $\Pi = (\pi i_1, \pi i_2, \pi j_1, \pi j_2)$

$$\begin{tikzcd} \pi X_0 \arrow[r, "\pi i_2"] \arrow[d, "\pi i_1"'] \arrow[dr, phantom, "\Pi"] & \pi X_2 \arrow[d, "\pi j_2"] \\ \pi X_1 \arrow[r, "\pi j_1"'] & \pi X \end{tikzcd}$$

ein Pushout in der Kategorie der Gruppoide. [10]

Beweis. Es ist die Kommutativität und die Pushout-Eigenschaft des Quadrates Π nachzuweisen. Die Kommutativität von Π resultiert aus der Tatsache, daß $\pi : Top \to Gd$ ein kovarianter Funktor ist, denn aus $j_1 i_1 = j_2 i_2$ folgt

$$(\pi j_1)(\pi i_1) = \pi(j_1 i_1) = \pi(j_2 i_2) = (\pi j_2)(\pi i_2).$$

Der Nachweis der Pushouteigenschaft erfordert es, Folgendes zu zeigen: Ist $\mathcal{G}$ ein Gruppoid und $\gamma_\nu : \pi X_\nu \to \mathcal{G}$, $\nu = 1, 2$, ein Paar von Funktoren mit $\gamma_1(\pi i_1) = \gamma_2(\pi i_2)$, dann existiert ein eindeutig bestimmter Funktor

$$\gamma : \pi X \longrightarrow \mathcal{G}$$

[10] Wegen $X = \mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2$ und $X_0 = X_1 \cap X_2$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, hook, "i_2"] \arrow[d, hook, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{Q}"] & X_2 \arrow[d, hook, "j_2"] \\ X_1 \arrow[r, hook, "j_1"'] & X \end{tikzcd}$$

ein Pushout in *Top*. Die Aussage des Satzes von Brown ist somit die Folgende: Der Funktor $\pi : Top \to Gd$ erhält die Pushout-Eigenschaft, d.h. er überführt Pushouts aus der Kategorie *Top* der topologischen Räume in Pushouts in der Kategorie *Gd* der Gruppoide. Bemerkenswert ist, daß im Gegensatz zum Satz von Seifert-van Kampen keine Wegzusammenhangsvoraussetzungen der Räume X_0, X_1, X_2 gemacht werden.

mit $\gamma_\nu = \gamma(\pi j_\nu)$.

$$\begin{tikzcd}
\pi X_0 \arrow[r, "\pi i_2"] \arrow[d, "\pi i_1"'] & \pi X_2 \arrow[d, "\pi j_2"] \arrow[ddr, bend left, "\gamma_2"] & \\
\pi X_1 \arrow[r, "\pi j_1"'] \arrow[drr, bend right, "\gamma_1"'] & \pi X \arrow[dr, dotted, "\gamma"] & \\
 & & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

Es müssen nun die Existenz und Eindeutigkeit des Funktors γ gezeigt werden.

I Eindeutigkeit von γ.

Sei γ ein Funktor mit $\gamma(\pi j_\nu) = \gamma_\nu$, $\nu = 1, 2$.

(a) Eindeutigkeit von γ auf Objekten.

Sei $x \in \mathrm{Ob}(\pi X) = X$. Wegen $X = \mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2 = X_1 \cup X_2$ gibt es $\nu \in \{1, 2\}$ mit $x \in X_\nu$. Dann ist $j_\nu(x) = x$ und so

$$\gamma(x) = (\gamma j_\nu)(x) = (\gamma(\pi j_\nu))(x) = \gamma_\nu(x),$$

womit $\gamma(x)$ eindeutig durch γ_ν bestimmt ist.

(b) Eindeutigkeit von γ auf Morphismen.

Seien $x, y \in X$ und $[w] \in \pi X(x, y)$, wobei $w : [0, 1] \to X$ ein Weg in X ist mit $w(0) = x$, $w(1) = y$. Da voraussetzungsgemäß $X = \mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2$ gilt, ist $\mathcal{U} = \{X_1, X_2\}$ eine innere Überdeckung von X. Wähle nun $n \in \mathbb{N}$, so daß die n-te Unterteilung $(w_1, \ldots, w_n)$ von w zulässig bezüglich $\mathcal{U}$ ist. Dann existiert für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein Index $\nu(i) \in \{1, 2\}$ mit

$$w_i[0, 1] \subset X_{\nu(i)},$$

womit $w_i : [0, 1] \to X$ zu einer stetigen Abbildung

$$w_i^{\nu(i)} : [0, 1] \longrightarrow X_{\nu(i)}$$

eingeschränkt werden kann, für die dann gilt

$$w_i = j_{\nu(i)} w_i^{\nu(i)}.$$

Weiter ist nach Definition von $\pi j_{\nu(i)}$

$$[w_i] = [j_{\nu(i)} w_i^{\nu(i)}] = \pi j_{\nu(i)} [w_i^{\nu(i)}].$$

Wegen

$$[w] = \prod_{i=1}^{n} [w_i]$$

ergibt sich jetzt

$$\gamma[w] \quad = \quad \gamma\left(\prod_{i=1}^{n} [w_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \gamma[w_i]$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^{n} \gamma(\pi j_{\nu(i)})[w_i^{\nu(i)}] \\
&= \prod_{i=1}^{n} \gamma_\nu [w_i^{\nu(i)}],
\end{aligned}
$$

was bedeutet, daß $\gamma[w]$ eindeutig durch γ_ν bestimmt ist.

(II) Existenz von γ.

Wir weisen nun die Existenz von γ nach.

(a) Definition und Wohldefiniertheit von γ auf Objekten.

Sei $x \in \mathrm{Ob}(\pi X)$. Dann gibt es $\nu \in \{1,2\}$ mit $x \in X_\nu$. Definiere

$$\boxed{\gamma(x) := \gamma_\nu(x) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})} \; .$$

Für $x \in X_0 = X_1 \cap X_2$ gilt wegen $\gamma_1(\pi i_1) = \gamma_2(\pi i_2)$

$$\gamma_1(x) = \gamma_1(i_1(x)) = \gamma_1(\pi i_1)x = \gamma_2(\pi i_2)x = \gamma_2(i_2(x)) = \gamma_2(x),$$

was die Wohldefiniertheit von γ auf Objekten bedeutet.

(b) Definition und Wohldefiniertheit von γ auf Morphismen.

Um den Funktor γ auf Morphismen zu definieren, benötigen wir für $x, y \in X = \mathrm{Ob}(\pi X)$ eine Abbildung

$$\gamma : \pi X(x,y) \longrightarrow \mathcal{G}(\gamma x, \gamma y)$$

auf der Menge $\pi X(x,y)$ der Homotopieklassen $[w]$ von Wegen w in X mit Anfangspunkt x und Endpunkt y. Dazu beginnen wir mit einer Abbildung

$$g : PX(x,y) \longrightarrow \mathcal{G}(\gamma x, \gamma y)$$

auf der Menge $PX(x,y)$ der Wege w in X von x nach y, um anschließend die Veträglichkeit von g mit der durch die Homotopie von Wegen gegebenen Äquivalenzrelation zu zeigen.

[1] Definition und Wohldefiniertheit der Abbildung $g : PX(x,y) \to \mathcal{G}(\gamma x, \gamma y)$.

Seien $x, y \in X$ und $w \in PX(x,y)$ ein Weg $w : [0,1] \to X$ in X mit $w(0) = x$, $w(1) = y$. Wähle $n \in \mathbb{N}$, so daß die n-te Unterteilung $(w_1, \ldots, w_n)$ von w zulässig bezüglich der Überdeckung $\mathcal{U} = \{X_1, X_2\}$ ist. Dann gibt es für $i \in \{1, \ldots, n\}$ einen Index $\nu(i) \in \{1,2\}$ derart, daß $w_i[0,1] \subset X_{\nu(i)}$ ist. Mit der stetigen Einschränkung von $w_i : [0,1] \to X$ auf $w_i^{\nu(i)} : [0,1] \to X_{\nu(i)}$ gilt $w_i = j_{\nu(i)} w_i^{\nu(i)}$. Setze nun

$$\boxed{g(w) := \prod_{i=1}^{n} \gamma_{\nu(i)}[w_i^{\nu(i)}]} \; .$$

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist $w_i^{\nu(i)}$ ein Weg in $X_{\nu(i)}$ mit

$$w_i^{\nu(i)}(0) = w\left(\frac{i-1}{n}\right) \quad \text{und} \quad w_i^{\nu(i)}(1) = w\left(\frac{i}{n}\right),$$

weswegen $\gamma_{\nu(i)}[w_i^{\nu(i)}]$ ein Morphismus von $\mathcal{G}$

$$\text{von} \quad \gamma_{\nu(i)} w\left(\frac{i-1}{n}\right) = \gamma w\left(\frac{i-1}{n}\right) \quad \text{nach} \quad \gamma_{\nu(i)} w\left(\frac{i}{n}\right) = \gamma w\left(\frac{i}{n}\right)$$

ist. $g(w)$ hat Quelle $\gamma w(0) = \gamma x$ und Ziel $\gamma w(1) = \gamma y$. Im Folgenden wird gezeigt, daß die Definition von $g(w)$ unabhängig von den getroffenen Auswahlen ist.

- Unabhängigkeit von der Wahl des Indexes $\nu(i)$.

  Ist $w_i[0,1] \subset X_1 \cap X_2 = X_0$, kann w_i eingeschränkt werden zu einem Weg
  $$w_i^0 : [0,1] \longrightarrow X_0,$$
  und für die Einschränkungen
  $$w_i^1 : [0,1] \longrightarrow X_1, \quad w_i^2 : [0,1] \longrightarrow X_2$$
  gelten die Beziehungen
  $$w_i^1 = i_1 w_i^0 \quad \text{und} \quad w_i^2 = i_2 w_i^0.$$
  Mit $\gamma_1(\pi i_1) = \gamma_2(\pi i_2)$ erhalte
  $$\begin{aligned} \gamma_1[w_i^1] &= \gamma_1[i_1 w_i^0] = \gamma_1(\pi i_1)[w_i^0] \\ &= \gamma_2(\pi i_2)[w_i^0] = \gamma_2[i_2 w_i^0] \\ &= \gamma_2[w_i^2], \end{aligned}$$
  also ist $g(w)$ unabhängig von der Wahl von $\nu(i) \in \{1,2\}$. $\diamondsuit$

- Unabhängigkeit von der Wahl der zulässigen Unterteilung von w.

  Seien $m, n \in \mathbb{N}$ derart, daß sowohl die n-te Unterteilung $(w_1, \ldots, w_n)$ als auch die m-te Unterteilung $(v_1, \ldots, v_m)$ von w zulässig bezüglich $\mathcal{U} = \{X_1, X_2\}$ ist. Bezeichne $(z_1, \ldots, z_{mn})$ die mn-te Unterteilung von w. Wir haben für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $t \in [0,1]$
  $$\begin{aligned} w_i(t) &= w\left(\frac{i-1}{n} + t\frac{1}{n}\right), \\ z_s(t) &= w\left(\frac{s-1}{mn} + t\frac{1}{mn}\right). \end{aligned}$$
  Für $r \in \{1, \ldots, m\}$ und $t \in \left[\frac{r-1}{m}, \frac{r}{m}\right]$ verifiziert man
  $$\begin{aligned} \left(\prod_{k=m(i-1)+1}^{mi} z_k\right)(t) &= z_{m(i-1)+r}(mt - r + 1) \\ &= w\left(\frac{m(i-1) + r - 1}{mn} + (mt - r + 1)\frac{1}{mn}\right) \\ &= w\left(\frac{i-1}{n} + \frac{r-1}{mn} + t\frac{1}{n} - \frac{r-1}{mn}\right) \\ &= w\left(\frac{i-1}{n} + t\frac{1}{n}\right) \\ &= w_i(t). \end{aligned}$$

Entsprechend findet man für $r \in \{1, \ldots, m\}$

$$v_r = \prod_{k=(r-1)n+1}^{rn} z_k.$$

Um nun $g(w)$ definitionsgemäß mithilfe der n-ten Unterteilung $(w_1, \ldots, w_n)$ von w zu berechnen, muß für $i = 1, \ldots, n$ ein Index $\nu(i) \in \{1, 2\}$ gewählt werden, so daß $w_i[0,1] \subset X_{\nu(i)}$ und anschließend das Produkt

$$\prod(n, \nu) := \prod_{i=1}^{n} \gamma_{\nu(i)}[w_i^{\nu(i)}]$$

gebildet werden. Analog hat man, um $g(w)$ mithilfe der mn-ten Unterteilung $(z_1, \ldots, z_{mn})$ von w zu berechnen, für $s = 1, \ldots, mn$ einen Index $\rho(s) \in \{1, 2\}$ zu wählen mit $z_s[0,1] \subset X_{\rho(s)}$ und dann das Produkt

$$\prod(mn, \rho) := \prod_{s=1}^{mn} \gamma_{\rho(s)}[z_s^{\rho(s)}]$$

zu bilden. Sei nun ν fest gewählt. Wir passen die Wahl von ρ an ν an mittels

$$\rho(s) := \nu(i), \quad s = m(i-1)+1, \ldots, mi \ , \ i = 1, \ldots, n.$$

Wegen

$$w_i = \prod_{k=m(i-1)+1}^{mi} z_k$$

folgt unmittelbar

$$w_i^{\nu(i)} = \prod_{k=m(i-1)+1}^{mi} z_k^{\nu(i)},$$

und es ergibt sich unter Anwendung der Funktoreigenschaften von γ_1, γ_2

$$\begin{aligned}
\prod(mn, \rho) &= \prod_{s=1}^{mn} \gamma_{\rho(s)}[z_s^{\rho(s)}] = \prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{k=m(i-1)+1}^{mi} \gamma_{\rho(k)}[z_k^{\rho(k)}] \right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{k=m(i-1)+1}^{mi} \gamma_{\nu(i)}[z_k^{\nu(i)}] \right) = \prod_{i=1}^{n} \gamma_{\nu(i)} \left(\prod_{k=m(i-1)+1}^{mi} [z_k^{\nu(i)}] \right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \gamma_{\nu(i)} \left[\prod_{k=m(i-1)+1}^{mi} z_k^{\nu(i)} \right] = \prod_{i=1}^{n} \gamma_{\nu(i)}[w_i^{\nu(i)}] \\
&= \prod(n, \nu).
\end{aligned}$$

Berechnet man schließlich $g(w)$ mithilfe der m-ten Unterteilung $(v_1, \ldots, v_m)$ von w, hat man entsprechend für $r = 1, \ldots, m$ einen Index $\mu(r) \in \{1, 2\}$ zu wählen mit

$$v_r[0,1] \subset X_{\mu(r)}$$

und dann

$$\prod(m, \mu) := \prod_{r=1}^{m} \gamma_{\mu(r)}[v_r^{\mu(r)}]$$

zu bilden. Paßt man für die mn-te Unterteilung $(z_1, \ldots, z_{mn})$ die Wahl von ρ', wobei für $s = 1, \ldots, mn$ $\rho'(s) \in \{1, 2\}$ ist mit $z_s[0,1] \subset X_{\rho'(s)}$, mittels

$$\rho'(s) := \mu(r), \quad s = (r-1)n + 1, \ldots, rn \ , \ r = 1, \ldots, m$$

an μ an, so erhählt man analog

$$\prod(mn, \rho') = \prod(m, \mu).$$

Da $\prod(mn, \rho)$ unabhängig von der Wahl von ρ ist, folgt

$$\prod(mn, \rho) = \prod(mn, \rho')$$

und somit

$$\prod(n, \nu) = \prod(m, \mu).$$

Also ist die Definition von $g(w)$ unabhängig von der Wahl der zulässigen Unterteilung von w. $\diamondsuit$

- *Ist w ein Weg in X und ist die n-te Unterteilung $(w_1, \ldots, w_n)$ von w zulässig bezüglich $\mathcal{U} = \{X_1, X_2\}$, dann gilt $g(w) = \prod_{i=1}^n g(w_i)$.*

  Für $i = 1, \ldots, n$ ist die erste Unterteilung von w_i, also w_i selbst, zulässig bezüglich $\mathcal{U}$. Es existiert dann für jedes i ein $\nu(i)$ mit $w_i[0,1] \subset X_{\nu(i)}$. Definitionsgemäß gilt dann

  $$g(w_i) = \gamma_{\nu(i)}[w_i^{\nu(i)},]$$

  und Vergleich mit

  $$g(w) := \prod_{i=1}^n \gamma_{\nu(i)}[w_i^{\nu(i)}]$$

  liefert bereits die Behauptung

  $$g(w) = \prod_{i=1}^n g(w_i). \ \diamondsuit$$

[2] Eigenschaften der Abbildung $g : PX(x,y) \to \mathcal{G}(\gamma x, \gamma y)$.

Wir beschäftigen uns nun weiter mit der Abbildung g und belegen wichtige Eigenschaften.

- *Für einen konstanten Weg w gilt $g(w) = 1$.*

  Sei $w = c_x$ der konstante Weg in $x \in X$. Dann gibt es $\nu \in \{1, 2\}$ mit $x \in X_\nu$. Wegen $w[0,1] = \{x\} \subset X_\nu$ ist die erste Unterteilung w von w zulässig. Somit folgt unter Verwendung der Funktoreigenschaften von γ_ν

  $$g(w) = \gamma_\nu[c_x^\nu] = \gamma_\nu(1) = 1,$$

  was zu zeigen war. $\diamondsuit$

- *Seien $x, y, z \in X$, v ein Weg in X mit $v(0) = x,\ v(1) = y$ sowie w ein Weg in X mit $w(0) = y,\ w(1) = z$. Dann ist $g(v \cdot w) = g(v) \cdot g(w)$.*

  Seien $m, n \in \mathbb{N}$, so daß die m-te Unterteilung von v und die n-te Unterteilung von w zulässig bezüglich $\mathcal{U} = \{X_1, X_2\}$ sind. Dann sind sowohl die mn-te Unterteilung $(v_1, \ldots, .v_{mn})$ von v als auch die mn-te Unterteilung $(w_1, \ldots, w_{mn})$ von w zulässig bezüglich $\mathcal{U}$. Also ist damit auch die $2mn$-te Unterteilung $(v_1, \ldots, v_{mn}, w_1, \ldots, w_{mn})$ von $v \cdot w$ zulässig bezüglich $\mathcal{U}$. Zu $r = 1, \ldots, mn$ gibt es $\mu(r) \in \{1, 2\}$ mit $v_r[0, 1] \subset X_{\mu(r)}$ und entsprechend zu $s = 1, \ldots, mn$ einen Index $\nu(s) \in \{1, 2\}$ mit $w_s[0, 1] \subset X_{\nu(s)}$. Nach Definition von g gilt nun

$$\begin{aligned} g(v \cdot w) &= \left(\prod_{r=1}^{mn} \gamma_{\mu(r)}[v_r^{\mu(r)}]\right)\left(\prod_{s=1}^{mn} \gamma_{\nu(s)}[w_s^{\nu(s)}]\right) \\ &= g(v) \cdot g(w), \end{aligned}$$

  womit der Nachweis erbracht ist. $\diamondsuit$

- <u>Verträglichkeit von g mit der Wegehomotopie $\simeq$.</u>

  Seien $x, y \in X$ sowie $v, w \in PX(x, y)$ äquivalente Wege $v, w : [0, 1] \to X$. Wähle eine Homotopie

$$\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$$

  von v nach w. Dann ist

$$\mathcal{U}_{I \times I} := \left\{\varphi^{-1}(\mathring{X}_1), \varphi^{-1}(\mathring{X}_2)\right\}$$

  eine offene Überdeckung des kompakten metrischen Raumes $I \times I = [0, 1] \times [0, 1]$. Sei $\varepsilon > 0$ eine Lebesguesche Zahl von $\mathcal{U}_{I \times I}$ und $n \in \mathbb{N}$ derart, daß die Diagonale der Quadrate

$$Q_{r,m} := \left[\frac{r-1}{n}, \frac{r}{n}\right] \times \left[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}\right], \quad r, m = 1, \ldots, n$$

  kleiner ist als ε, i.e.

$$\operatorname{diag}(Q_{r,m}) = \frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon.$$

  Definiere nun Wege φ_i und ψ_k für $i, k = 0, \ldots, n$ durch

$$\varphi_i : [0, 1] \longrightarrow X, \quad \varphi_i(s) := \varphi\left(s, \frac{i}{n}\right)$$

  und

$$\psi_k : [0, 1] \longrightarrow X, \quad \psi_k(t) := \varphi\left(\frac{k}{n}, t\right).$$

  Die n-ten Unterteilungen $(\varphi_{i,1}, \ldots, \varphi_{i,n})$ und $(\psi_{k,1}, \ldots, \psi_{k,n})$ von φ_i und ψ_k sind dann zulässig bezüglich $\mathcal{U}_X := \mathcal{U} = \{X_1, X_2\}$. Betrachte nun für $k = 0, \ldots, n-1$ das Quadrat $Q_{k+1,i+1}$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\varphi_{i+1,k+1}"] & {} \\ {} \arrow[u, "\psi_{k,i+1}"] \arrow[r, "\varphi_{i,k+1}"'] & {} \arrow[u, "\psi_{k+1,i+1}"'] \end{tikzcd}$$

und finde $\nu \in \{1,2\}$ mit $\varphi(Q_{k+1,i+1}) \subset X_\nu$. Es gilt nun für die durch Einschränken induzierten Wege in X_ν

$$\varphi^\nu_{i,k+1} \cdot \psi^\nu_{k+1,i+1} \simeq \psi^\nu_{k,i+1} \cdot \varphi^\nu_{i+1,k+1}.$$[11]

Es folgt

$$\begin{aligned} g(\varphi_{i,k+1}) \cdot g(\psi_{k+1,i+1}) &= \gamma_\nu[\varphi^\nu_{i,k+1}] \cdot \gamma_\nu[\psi^\nu_{k+1,i+1}] \\ &= \gamma_\nu[\varphi^\nu_{i,k+1} \cdot \psi^\nu_{k+1,i+1}] \\ &= \gamma_\nu[\psi^\nu_{k,i+1} \cdot \varphi^\nu_{i+1,k+1}] \\ &= \gamma_\nu[\psi^\nu_{k,i+1}] \cdot \gamma_\nu[\varphi^\nu_{i+1,k+1}] \\ &= g(\psi_{k,i+1}) \cdot g(\varphi_{i+1,k+1}), \end{aligned}$$

also gilt für $i, k = 0, \dots, n-1$

$$g(\varphi_{i,k+1}) \cdot g(\psi_{k+1,i+1}) = g(\psi_{k,i+1}) \cdot g(\varphi_{i+1,k+1}).$$

Hiermit erhält man

$$\begin{aligned} \left(\prod_{k=1}^{n} g(\varphi_{i,k})\right) \cdot g(\psi_{n,i+1}) &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} g(\varphi_{i,k})\right) \cdot g(\varphi_{i,n}) \cdot g(\psi_{n,i+1}) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} g(\varphi_{i,k})\right) \cdot g(\psi_{n-1,i+1}) \cdot g(\varphi_{i+1,n}) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-2} g(\varphi_{i,k})\right) \cdot g(\psi_{n-2,i+1}) \cdot \left(\prod_{k=n-1}^{n} g(\varphi_{i+1,k})\right) \\ &\ \ \vdots \\ &= g(\varphi_{i,1}) \cdot g(\psi_{1,i+1}) \cdot \left(\prod_{k=2}^{n} g(\varphi_{i+1,k})\right) \\ &= g(\psi_{0,i+1}) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} g(\varphi_{i+1,k})\right). \end{aligned}$$

Da $\psi_{n,i+1}$ und $\psi_{0,i+1}$ konstante Wege in den Punkten x bzw. y sind, gilt

$$g(\psi_{n,i+1}) = 1 = g(\psi_{0,i+1}).$$

Wegen (B)[1] ist

$$g(\varphi_i) = \prod_{k=1}^{n} g(\varphi_{i,k})$$

und ebenso

$$g(\varphi_{i+1}) = \prod_{k=1}^{n} g(\varphi_{i+1,k}),$$

[11]Hinter diesem Schluß verbirgt sich das **Lemma**: Sei X ein topologischer Raum und $\psi : I \times I \to X$ stetig. Seien weiterhin $\psi_t, \psi^s : I \to X$ für $s, t \in I$ die durch

$$\psi_t(s) := \psi^s(t) := \psi(s,t)$$

gegebenen Wege in X. Dann gilt $\psi^1 \cdot \psi_0 \simeq \psi_1 \cdot \psi^0$.

also nach obigem Ergebnis

$$g(\varphi_i) = g(\varphi_{i+1}), \quad i = 0, \dots, n-1,$$

und schließlich wegen $\varphi_0 = v$ und $\varphi_n = w$

$$g(v) = g(\varphi_0) = g(\varphi_n) = g(w),$$

womit die Verträglichkeit von g mit der durch die Homotopie von Wegen gegebenen Äquivalenzrelation gezeigt ist. $\diamondsuit$

[3] Definition der Abbildung $\gamma : \pi X(x,y) \to \mathcal{G}(\gamma x, \gamma y)$.

Seien $x, y \in X$ und $[w] \in \pi X(x,y)$. Setze

$$\gamma[w] := g(w)$$

und erhalte nach soeben Gezeigtem eine Abbildung

$$\gamma : \pi X(x,y) \to \mathcal{G}(\gamma x, \gamma y).$$

Es bleibt noch zu zeigen:

- $\gamma : \pi X \to \mathcal{G}$ *ist ein Funktor und erfüllt* $\gamma(\pi j_\nu) = \gamma_\nu$, $\nu = 1, 2$.

  Seien $x, y, z \in X$, $[v] \in \pi X(x,y)$, $[w] \in \pi X(y,z)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \gamma([v] \cdot [w]) &= \gamma[v \cdot w] \\ &= g(v \cdot w) \\ &= g(v) \cdot g(w) \\ &= \gamma[v] \cdot \gamma[w], \end{aligned}$$

  also ist γ ein Funktor. Seien nun $x, y \in X_\nu$ sowie $[u] \in \pi X_\nu(x,y)$ für $\nu = 1, 2$. Betrachte den Weg

$$w := j_\nu u : [0,1] \longrightarrow X.$$

  Dann ist $[w] \in \pi X(x,y)$. Wegen

$$w[0,1] = u[0,1] \subset X_\nu$$

  ist die erste Unterteilung w von w zulässig bezüglich $\mathcal{U} = \{X_1, X_2\}$. Für die Einschränkung $w^\nu : [0,1] \to X_\nu$ von w gilt $w^\nu = u$. So erhält man

$$\begin{aligned} \gamma(\pi j_\nu)[u] &= \gamma[j_\nu u] = \gamma[w] \\ &= g(w) = \gamma_\nu[w^\nu] \\ &= \gamma_\nu[u], \end{aligned}$$

  womit zuletzt auch die Relationen

$$\gamma(\pi j_\nu) = \gamma_\nu$$

  nachvollzogen sind ($\diamondsuit$)

und damit der Satz von Brown erfreulich vollständig bewiesen ist. $\square$

Wir ziehen jetzt eine Folgerung aus dem Satz von Brown, für die folgende Notation festgelegt wird:

Notation. Sei X ein toplogischer Raum und A eine Menge, die nicht notwendigerweise eine Teilmenge von X sein muß. Mit $\pi_A X$ bezeichnen wir das volle Teilgruppoid des Fundamentalgruppoids πX mit Objektmenge $X \cap A$, also $\pi_A X = \pi X(X \cap A) \subset \pi X$. Die Funktoren $\pi_A i_\nu$ und $\pi_A j_\nu$ seien für $\nu = 1, 2$ definiert durch Einschränkung der Funktoren πi_ν und πj_ν, also gegeben durch

$$\pi_A i_\nu := \pi i_\nu|_{\pi_A X_0} : \pi_A X_0 \longrightarrow \pi X_\nu \supset \pi_A X_\nu$$

und

$$\pi_A j_\nu := \pi j_\nu|_{\pi_A X_\nu} : \pi_A X_\nu \longrightarrow \pi X \supset \pi_A X.$$

Satz 3.2. *Sei X ein topologischer Raum, und seien $X_0, X_1, X_2 \subset X$ Teilräume mit $X = \mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2$ und $X_0 = X_1 \cap X_2$. Weiterhin sei $A \subset X$ eine Teilmenge, die für $\mu = 0, 1, 2$ jede Wegzusammenhangskomponente von X_μ trifft, i.e. $A \cap W_{X_\mu} \neq \emptyset$ für alle $W_{X_\mu} \in \pi_0 X_\mu$. Dann ist das Quadrat $\Pi_A = (\pi_A i_1, \pi_A i_2, \pi_A j_1, \pi_A j_2)$*

$$\begin{tikzcd}
\pi_A X_0 \arrow[r, "\pi_A i_2"] \arrow[d, "\pi_A i_1"'] \arrow[dr, phantom, "\Pi_A"] & \pi_A X_2 \arrow[d, "\pi_A j_2"] \\
\pi_A X_1 \arrow[r, "\pi_A j_1"'] & \pi_A X
\end{tikzcd}$$

ein Pushout in der Kategorie der Gruppoide.

Beweis. Die Idee des Beweises ist es, eine Retraktion $R : \Pi \to \Pi_A$ in der Kategorie $Gd_\square$ der kommutativen Quadrate in der Kategorie Gd der Gruppoide zu konstruieren. Da die Funktoren $\pi_A i_\nu$ und $\pi_A j_\nu$ für $\nu = 1, 2$ als Einschränkung der Funktoren πi_ν und πj_ν definiert sind, sind in

$$\begin{tikzcd}
\pi X_0 \arrow[rrr, "\pi i_2"] \arrow[ddd, "\pi i_1"'] & & & \pi X_2 \arrow[ddd, "\pi j_2"] \\
& \pi_A X_0 \arrow[ul, "k_0"'] \arrow[r, "\pi_A i_2"] \arrow[d, "\pi_A i_1"'] & \pi_A X_2 \arrow[ur, "k_2"'] \arrow[d, "\pi_A j_2"] & \\
& \pi_A X_1 \arrow[dl, "k_1"] \arrow[r, "\pi_A j_1"'] & \pi_A X \arrow[dr, "k"] & \\
\pi X_1 \arrow[rrr, "\pi j_1"'] & & & \pi X,
\end{tikzcd}$$

alle Teilquadrate kommutativ. Dabei sind $k_\mu : \pi_A X_\mu \to \pi X_\mu$, $\mu = 0, 1, 2$, und $k : \pi_A X \to \pi X$ Inklusionen von Teilgruppoiden. Also ist durch

$$K := (k_0, k_1, k_2, k) : \Pi_A \longrightarrow \Pi$$

ein Morphismus in $Gd_\square$ gegeben. Im Folgenden wird die Konstruktion eines Morphismus

$$R = (r_0, r_1, r_2, r) : \Pi \longrightarrow \Pi_A$$

in $Gd_\square$ durchgeführt mit der Retraktionseigenschaft

$$RK = 1_{\Pi_A}.$$

Dabei sind für $\mu = 0, 1, 2$ die Abbildungen r_μ und r Funktoren mit

$$r_\mu : \pi X_\mu \longrightarrow \pi_A X_\mu \quad \text{bzw.} \quad r : \pi X \longrightarrow \pi_A X.$$

1. Zuerst wähle für jedes $a \in X_0$
$$r_0(a) \in X_0 \cap A \quad \text{und} \quad \tau_a^0 \in \pi X_0(a, r_0(a)),$$
was möglich ist, da A voraussetzungsgemäß jede Wegzusammenhangskomponente von X_0 trifft. Die Wahl wird so getroffen, daß im Falle $a \in X_0 \cap A$
$$r_0(a) = a \quad \text{sowie} \quad \tau_a^0 = 1_a \in \pi X_0(a, a)$$
gilt.

2. Für jedes $a \in X_\nu$, $\nu = 1, 2$, wähle mit analoger Begründung
$$r_\nu(a) \in X_\nu \cap A \quad \text{und} \quad \tau_a^\nu \in \pi X_\nu(a, r_\nu(a)),$$
so daß für $a \in X_0 = X_1 \cap X_2$ gilt
$$r_\nu(a) = r_0(a) \quad \text{und} \quad \tau_a^\nu = (\pi i_\nu)\tau_a^0$$
sowie für $a \in X_\nu \cap A$
$$r_\nu(a) = a \quad \text{und} \quad \tau_a^\nu = 1_a \in \pi X_\nu(a, a)$$
erfüllt ist.

3. Für jedes $a \in X$ wähle
$$r(a) \in A \quad \text{und} \quad \tau_a \in \pi X(a, r(a)),$$
so daß im Falle $a \in X_\nu$
$$r(a) = r_\nu(a) \quad \text{und} \quad \tau_a = (\pi j_\nu)\tau_a^\nu$$
gilt. Diese Festlegung ist wohldefiniert, da für $a \in X_0$ nach (2)
$$r_1(a) = r_0(a) = r_2(a)$$
und wegen $(\pi j_1)(\pi i_1) = (\pi j_2)(\pi i_2)$
$$\begin{aligned} (\pi j_1)\tau_a^1 &= (\pi j_1)(\pi i_1)\tau_a^0 \\ &= (\pi j_2)(\pi i_2)\tau_a^0 \\ &= (\pi j_2)\tau_a^2 \end{aligned}$$
ist. Ferner ist für $a \in A$
$$r(a) = a \quad \text{und} \quad \tau_a = 1_a \in \pi X(a, a).$$
Hiermit sind die Funktoren r_μ und r auf Objekten definiert.

4. Es steht noch die Definition dieser Funktoren auf Morphismen aus. Diese geben wir durch
$$r_\mu : \pi X_\mu(a, b) \longrightarrow \pi_A X_\mu(r_\mu(a), r_\mu(b)) = \pi X_\mu(r_\mu(a), r_\mu(b)), \quad r_\mu(\xi) := (\tau_a^\mu)^{-1} \cdot \xi \cdot \tau_b^\mu$$
und
$$r : \pi X(a, b) \longrightarrow \pi_A X(r(a), r(b)) = \pi X(r(a), r(b)), \quad r(\xi) := \tau_a^{-1} \cdot \xi \cdot \tau_b$$
für $a, b \in X$ und $\xi \in \pi X(a, b)$.

5. Es bleibt nachzuweisen, daß r_μ und r tatsächlich Funktoren sind. Seien $a, b, c \in X$, $\xi \in \pi X(a, b)$ und $\eta \in \pi X(b, c)$. Es gilt

$$\begin{aligned} r(\xi \cdot \eta) &= \tau_a^{-1} \cdot (\xi \cdot \eta) \cdot \tau_c \\ &= \tau_a^{-1} \cdot \xi \cdot 1_b \cdot \eta \cdot \tau_c \\ &= \tau_a^{-1} \cdot \xi \cdot (\tau_b \cdot \tau_b^{-1}) \cdot \eta \cdot \tau_c \\ &= (\tau_a^{-1} \cdot \xi \cdot \tau_b) \cdot (\tau_b^{-1} \cdot \eta \cdot \tau_c) \\ &= r(\xi) \cdot r(\eta) \end{aligned}$$

Der Nachweis der Funktoreigenschaft von r_μ verläuft analog.

6. Zuletzt ist zu zeigen, daß durch $R := (r_0, r_1, r_2, r) : \Pi \longrightarrow \Pi_A$ ein Morphismus in $Gd_\Box$ gegeben ist mit $RK = 1_{\Pi_A}$. Es muß also nachgewiesen werden, daß in

$$\begin{tikzcd}
\pi_A X_0 \arrow[rrr, "\pi_A i_2"] \arrow[ddd, "\pi_A i_1"'] & & & \pi_A X_2 \arrow[ddd, "\pi_A j_2"] \\
& \pi X_0 \arrow[ul, "r_0"'] \arrow[r, "\pi i_2"] \arrow[d, "\pi i_1"'] & \pi_A X_2 \arrow[ur, "r_2"] \arrow[d, "\pi j_2"] & \\
& \pi X_1 \arrow[r, "\pi r_1"'] \arrow[dl, "r_1"] & \pi X \arrow[dr, "r"'] & \\
\pi_A X_1 \arrow[rrr, "\pi_A j_1"'] & & & \pi_A X
\end{tikzcd}$$

alle Teilquadrate kommutativ sind. Wir betrachten das Quadrat $\mathcal{Q}_1 := (\pi i_1, r_0, \pi_A i_1, r_1)$. Seine Kommutativität ist gleichbedeutend mit der Identität $r_1(\pi i_1) = (\pi_A i_1) r_0$. Zunächst überprüft man die Gleichung für Objekte. Sei dazu a ein Objekt von πX_0, also $a \in X_0$. Wegen $r_1(a) = r_0(a)$ gilt dann

$$(r_1(\pi i_1))(a) = r_1(a) = r_0(a) = ((\pi_A i_1) r_0)(a).$$

Nun betrachten wir Morphismen. Seien $a, b \in X_0$, und sei $\xi \in \pi X_0(a, b)$ ein Morphismus von πX_0, dann ergibt sich mit $\tau_a^1 = (\pi i_1)\tau_a^0$ und $\tau_b^1 = (\pi i_1)\tau_b^0$

$$\begin{aligned} r_1(\pi i_1)\xi &= (\tau_a^1)^{-1} \cdot (\pi i_1)\xi \cdot \tau_b^1 \\ &= ((\pi i_1)\tau_a^0)^{-1} \cdot (\pi i_1)\xi \cdot (\pi i_1)\tau_b^0 \\ &= (\pi i_1)((\tau_a^0)^{-1} \cdot \xi \cdot \tau_b^0) \\ &= (\pi i_1) r_0(\xi) \\ &= (\pi_A i_1) r_0(\xi), \end{aligned}$$

womit die Kommutativität von $\mathcal{Q}_1$ vollständig bewiesen ist. Entsprechend geht beim Nachweis der Kommutativität der Quadrate

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_2 &:= (\pi i_2, r_0, \pi_A i_2, r_2), \\ \mathcal{Q}_3 &:= (\pi j_1, r_1, \pi_A j_1, r), \\ \mathcal{Q}_4 &:= (\pi j_2, r_2, \pi_A j_2, r) \end{aligned}$$

vor, und findet, daß alle Teilquadrate in der Tat kommutativ sind. Schließlich bleibt nur noch die Beziehung

$$RK = (r_0 k_0, r_1 k_1, r_2 k_2, r k) = (1_{\pi_A X_0}, 1_{\pi_A X_1}, 1_{\pi_A X_2}, 1_{\pi_A X}) = 1_{\Pi_A}$$

nachzuweisen. Exemplarisch wird hier die Gleichung $rk = 1_{\pi_A X}$ nachgerechnet. Zunächst für Objekte. Sei dazu a ein Objekt von $\pi_A X$, also $a \in A$, dann ist wegen $r(a) = a$

$$(rk)(a) = r(a) = a.$$

Nun für Morphismen. Seien $a, b \in A$, und sei $\xi \in \pi_A X(a,b) = \pi X(a,b)$ ein Morphismus von $\pi_A X$. Dann gilt wegen $\tau_a = 1_a$ und $\tau_b = 1_b$

$$\begin{aligned} (rk)(\xi) &= r(\xi) \\ &= \tau_a^{-1} \cdot \xi \cdot \tau_b \\ &= 1_a \cdot \xi \cdot 1_b \\ &= \xi. \end{aligned}$$

Entsprechend sind zur Vervollständigung des Beweises die Gleichungen

$$r_\mu k_\mu = 1_{\pi_A X_\mu}$$

nachzuprüfen.

Es ist nun gezeigt, daß durch

$$R = (r_0, r_1, r_2, r) : \Pi \longrightarrow \Pi_A$$

eine Retraktion in der Kategorie $Gd_\square$ der kommutativen Quadrate gegeben ist. Da Π nach dem vorangehenden **Satz von Brown** ein Pushout ist und Pushouts unter Retraktion und erhalten bleiben, folgt, daß auch Π_A ein Pushout in der Kategorie der Gruppoide ist. $\square$

4 Der Satz von Seifert-van Kampen

Während der Satz von Brown eine Aussage über das Fundamentalgruppoid $\pi(X_1 \cup X_2)$ einer Vereinigung zweier topologischer Räume X_1, X_2 macht, behandelt der Satz von Seifert-van Kampen in analoger Weise die Fundamentalgruppe einer solchen Vereinigung, verlangt jedoch weitere Voraussetzungen der beteiligten Räume, nämlich ihren Wegzusammenhang. Der Satz von Seifert-van Kampen soll nun auf zwei verschiedene Weisen bewiesen werden: zunächst wird gezeigt, daß er auf natürliche Weise eine Konsequenz des Satzes von Brown ist (vgl. [5]), indem man das im vorigen Abschnitt durchgeführte Retraktionsargument verwendet und dann zu den Objektgruppen übergeht (im Fall der Fundamentalgruppoide handelt es sich dabei ja gerade um die Fundamentalgruppen). Im Anschluß bietet sich der rein topologische Beweis (nach [2]), der mit verallgemeinerten Wegen arbeitet, als Alternative zum nun folgenden kategorientheoretischen Beweis des Satzes von Seifert-van Kampen an.

4.1 Der kategorientheoretische Beweis

Wir vollziehen den erwähnten Übergang zu den Objektgruppen.

Satz 4.1. *Sei $\mathcal{Q} := (i_1, i_2, j_1, j_2)$, gegeben durch das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{Q}"] & \mathcal{G}_2 \arrow[d, "j_2"] \\
\mathcal{G}_1 \arrow[r, "j_1"'] & \mathcal{G},
\end{tikzcd}$$

ein Pushout in der Kategorie der Gruppoide, so daß $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}$ jeweils genau ein Objekt $*$ besitzen. Dann ist das durch $\mathcal{Q}$ induzierte Quadrat $\mathcal{Q}'$ von Gruppenhomomorphismen zwischen den Objektgruppen

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_0(*) \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{Q}"] & \mathcal{G}_2(*) \arrow[d, "j_2"] \\
\mathcal{G}_1(*) \arrow[r, "j_1"'] & \mathcal{G}(*)
\end{tikzcd}$$

ein Pushout in der Kategorie der Gruppen.

Beweis. Das Quadrat $\mathcal{Q}'$ ist kommutativ. Es bleibt die Pushouteigenschaft nachzuweisen: Für eine Gruppe H und ein Paar von Gruppenhomomorphismen $g_\nu : \mathcal{G}_\nu(*) \to H$, $\nu = 1, 2$, mit $g_1 i_1 = g_2 i_2$ gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus $g : \mathcal{G}(*) \longrightarrow H$

mit $gj_\nu = g_\nu$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_0(*) \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & \mathcal{G}_2(*) \arrow[d, "j_2"] \arrow[ddr, bend left, "g_2"] & \\
\mathcal{G}_1(*) \arrow[r, "j_1"'] \arrow[drr, bend right, "g_1"'] & \mathcal{G}(*) \arrow[dr, dotted, "g"] & \\
 & & H
\end{tikzcd}$$

Sei $\mathcal{H}$ das Gruppoid mit $\mathrm{Ob}(\mathcal{H}) := \{*\}$ und $\mathcal{H}(*) := H$. Betrachte das Diagramm in der Kategorie der Gruppoide

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & \mathcal{G}_2 \arrow[d, "j_2"] \arrow[ddr, bend left, "g_2"] & \\
\mathcal{G}_1 \arrow[r, "j_1"'] \arrow[drr, bend right, "g_1"'] & \mathcal{G} \arrow[dr, dotted, "\gamma"] & \\
 & & \mathcal{H}.
\end{tikzcd}$$

Definiere g_1 und g_2 auf Objekten durch $g_1(*) = *$ und $g_2(*) = *$ und auf Morphismen durch die Gruppenhomomorphismen $g_\nu : \mathcal{G}_\nu \to H$. Da $\mathcal{Q}$ ein Pushout ist, existiert genau ein Funktor $\gamma : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ mit $\gamma j_\nu = g_\nu$. Der zu γ gehörende Gruppenhomomorphismus $g : \mathcal{G}(*) \longrightarrow \mathcal{H}(*) = H$ erfüllt dann die Beziehung $gj_\nu = g_\nu$. Die Eindeutigkeit von γ überträgt sich auf g. Es folgt, daß das Quadrat $\mathcal{Q}'$ ein Pushout in der Kategorie der Gruppen ist. $\square$

Mithilfe der letzten beiden Sätze kann der Satz von Seifert-van Kampen problemlos bewiesen werden.

Satz 4.2. (Seifert-van Kampen) *Sei X ein topologischer Raum, und seien $X_0, X_1, X_2 \subset X$ wegzusammenhängende Teilräume mit $X = \mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2$ und $X_0 = X_1 \cap X_2$. Weiterhin seien $i_{1_*}, i_{2_*}, j_{1_*}, j_{2_*}$ die von den Inklusionen*

$$\begin{aligned} i_\nu : &\quad X_0 \hookrightarrow X_\nu \\ j_\nu : &\quad X_\nu \hookrightarrow X, \quad \nu = 1, 2 \end{aligned}$$

induzierten Homomorphismen der Fundamentalgruppen. Dann ist für jedes $x_0 \in X_0$ das Quadrat $\Pi_1 = (i_{1_*}, i_{2_*}, j_{1_*}, j_{2_*})$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X_0, x_0) \arrow[r, "i_{2_*}"] \arrow[d, "i_{1_*}"'] \arrow[dr, phantom, "\Pi_1"] & \pi_1(X_2, x_0) \arrow[d, "j_{2_*}"] \\
\pi_1(X_1, x_0) \arrow[r, "j_{1_*}"'] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

ein Pushout in der Kategorie der Gruppen.

Beweis. Sei $x_0 \in X_0$ und $A := \{x_0\} \subset X$. Da die Teilräume X_μ, $\mu = 0, 1, 2$, voraussetzungsgemäß wegzusammenhängend sind, trifft A jede Wegekomponente von X_μ, nämlich jeweils X_μ selbst, denn es ist $A \cap X_\mu = \{x_0\} \neq \emptyset$. Mit der Folgerung aus dem Satz von Brown ergibt sich, daß das Quadrat

$$\begin{tikzcd}
\pi_A X_0 \arrow[r, "\pi_A i_2"] \arrow[d, "\pi_A i_1"'] \arrow[dr, phantom, "\Pi_A"] & \pi_A X_2 \arrow[d, "\pi_A j_2"] \\
\pi_A X_1 \arrow[r, "\pi_A j_1"'] & \pi_A X
\end{tikzcd}$$

ein Pushout in der Kategorie der Gruppoide ist. Nun gilt aber

$$\pi_A X_\mu = \pi X_\mu(X_\mu \cap A) = \pi X_\mu(A) = \pi X_\mu(\{x_0\})$$

und entsprechend

$$\pi_A X = \pi X(\{x_0\}),$$

d.h.

$$\mathrm{Ob}(\pi_A X_\mu) = \mathrm{Ob}(\pi_A X) = A = \{x_0\}\,.$$

Die zugehörigen Objektgruppen sind die Fundamentalgruppen

$$\pi_A X_\mu(x_0) = \pi X_\mu(x_0) = \pi_1(X_\mu, x_0)$$

und

$$\pi_A X(x_0) = \pi_1(X, x_0).$$

Nach dem vorangehenden Satz folgt nun, daß das Quadrat Π_1

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X_0, x_0) \arrow[r, "i_{2_*}"] \arrow[d, "i_{1_*}"'] \arrow[dr, phantom, "\Pi_1"] & \pi_1(X_2, x_0) \arrow[d, "j_{2_*}"] \\
\pi_1(X_1, x_0) \arrow[r, "j_{1_*}"'] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

ein Pushout in der Kategorie der Gruppen ist. □

4.2 Der topologische Beweis

Um den Beweis zu vereinfachen, verwenden wir einen allgemeineren Begriff von Wegen, nicht wie zuvor ausschließlich Einheitswege (d.h. solche von Länge 1 bzw. durch das Einheitsintervall $[0, 1]$ parametrisierte).

Definition 4.3. Sei X ein topologischer Raum. Ein *Moore-Weg* w in X der Länge $\|w\| \geq 0$ ist eine stetige Abbildung $w : [0, \|w\|] \to X$. w heißt *Moore-Schleife*, falls $w(0) = w(\|w\|)$ gilt.[12] Für einen Moore-Weg $w : [0, \|w\|] \to X$ definiert man den *normalisierten Einheitsweg* $\hat{w} : [0, 1] \longrightarrow X$ durch $\hat{w}(t) := w(\|w\|\, t)$.

Wir beginnen mit dem Beweis einer Teilaussage des Satzes von Seifert-van Kampen.

[12]Der Vorteil dieser Verallgemeinerung des Wegebegriffs liegt in der Komposition dieser Wege, da keine Unterteilung des Einheitsintervalls nötig ist. Im Folgenden werden ausschließlich Moore-Wege benutzt, die jedoch schlicht als Wege bezeichnet werden.

Lemma 4.4. *Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ wird durch die Bilder von j_{1_*} und j_{2*} erzeugt; mit anderen Worten: die Bildgruppen $j_{1_*}(\pi_1(X_1, x_0))$ und $j_{2_*}(\pi_1(X_2, x_0))$ erzeugen $\pi_1(X_1 \cup X_2, x_0)$.*

Beweis. Sei $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ nicht-trivial und $a : [0, \|a\|] \to X$ eine α repräsentierende Schleife in X zum Grundpunkt $x_0 \in X_0$. Wegen $\alpha \neq 1$ gilt $\|a\| > 0$ (d.h. a ist nicht der identische Weg in x_0). Da $X = X_1 \cup X_2$ ist, ist $\mathcal{U}_X := \{a^{-1}(X_1), a^{-1}(X_2)\}$ eine offene Überdeckung des kompakten metrischen Raumes $[0, \|a\|]$. Nach dem Lemma von Lebesgue gibt es eine Unterteilung

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = [0, \|a\|]$$

des Intervalls $[0, \|a\|]$, so daß jedes Teilintervall $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ in einem der Urbilder $a^{-1}(X_j)$ für $j = 1, 2$ enthalten ist. Wähle eine geeignete Indexfunktion $\mu : \{1, \ldots, n\} \to \{1, 2\}$ mit

$$a\,[t_{i-1}, t_i] \subset X_{\mu(i)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Für jeden Punkt t_i der Unterteilung wähle einen Weg b_i in X mit den Eigenschaften

(1) $b_i(0) = x_0$, $b_i(\|b_i\|) = a(t_i)$, i.e. b_i verbindet die Punkte x_0 und $a(t_i)$ in X.

(2) Falls $a(t_i) = x_0$, dann gilt $b_i(t) = x_0$ für alle $t \in [0, \|b_i\|]$, i.e. b_i ist der konstante Weg in x_0.

(3) $b_i(t) \in X_{\mu(i)} \cap X_{\mu(i+1)}$ für alle $t \in [0, \|b_i\|]$ und $i = 1, \ldots, n-1$, womit sichergestellt ist, daß b_i stets in einer der Mengen X_1 oder X_2 verläuft.

Da für jedes zulässige i immer $X_{\mu(i)} \cap X_{\mu(i+1)} \in \{X_0, X_1, X_2\}$ ist und alle Mengen als wegweise zusammenhängend vorausgesetzt sind, existiert in jedem Fall ein b_i dieser Art. Insbesondere sind nach (2) b_0 und b_n konstante Wege in x_0, denn es gilt $a(t_0 = 0) = x_0 = a(t_n = \|a\|)$.
Betrachte nun für $i = 1, \ldots, n$ die Wege a_i, gegeben durch

$$a_i : [0, t_i - t_{i-1}] \longrightarrow X, \quad a_i(t) := a(t + t_{i-1}).$$

Es gilt dann

$$a_i\,[0, t_i - t_{i-1}] = a\,[t_{i-1}, t_i]\,,$$

denn man hat $a_i(0) = a(t_{i-1})$ sowie $a_i(\|a_i\| = t_i - t_{i-1}) = a(t_i)$. Somit ist auch

$$a_i\,[0, \|a_i\|] = a\,[t_{i-1}, t_i] \subset X_{\mu(i)}.$$

Wegen $a_{i-1}(\|a_{i-1}\|) = a(t_{i-1})$ und $a_{i+1}(0) = a(t_i)$, also

$$\begin{aligned} a_{i-1}(\|a_{i-1}\|) &= a_i(0) \\ a_i(\|a_i\|) &= a_{i+1}(0) \end{aligned}$$

ist das Produkt $\prod_{i=1}^n a_i$ definiert, und es ist

$$a = \prod_{i=1}^n a_i.$$

Aufgrund der Identitäten

$$b_{i-1}(\|b_{i-1}\|) = a(t_{i-1}) = a_i(0), \quad i = 1, \ldots, n$$

sowie

$$a_i(\|a_i\|) = a(t_i) = b_i^{-1}(0), \quad i = 1, \ldots, n$$

sind auch die Produkte

$$b_{i-1} \cdot a_i \cdot b_i^{-1}$$

für alle $i = 1, \ldots, n$ definiert und bilden wegen (1) Schleifen mit Grundpunkt x_0, die nach (3) ganz in $X_{\mu(i)}$ verlaufen. Daher repräsentieren sie die Schleifenhomotopieklassen $j_{\mu(i)_*}\alpha_i$ für gewisse $\alpha_i \in \pi_1(X_{\mu(i)}, x_0)$. Da b_0 und b_n konstante Wege in x_0 sind, gilt

$$a \simeq \prod_{i=1}^{n} b_{i-1} \cdot a_i \cdot b_i^{-1} \simeq \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Damit ergibt sich schließlich

$$\alpha = \prod_{i=1}^{n} j_{\mu(i)_*}\alpha_i = \prod_{i=1}^{n} \left[b_{i-1} \cdot a_i \cdot b_i^{-1}\right] = \prod_{i=1}^{n} j_{\mu(i)_*} \left[b_{i-1} \cdot a_i \cdot b_i^{-1}\right]_{\mu(i)} \text{[13]},$$

womit gezeigt ist, daß die Bilder von j_{1_*} und j_{2_*} die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ erzeugen. □

Hiermit erfolgt nun der Beweis des Satzes von Seifert-van Kampen.

Beweis. (Seifert-van Kampen) Die Kommutativität des Quadrates Π_1 bedarf keiner näheren Betrachtung, da sie durch die Inklusionsabbildungen unmittelbar ersichtlich ist. Es ist also die Pushout-Eigenschaft von Π_1 nachzuweisen: Ist G eine beliebige Gruppe und $\psi_i : \pi_1(X_i, x_0) \to G$ für $i = 1, 2$ ein Paar von Gruppenhomomorphismen mit $\psi_1 i_{1_*} = \psi_2 i_{2_*}$, dann existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus

$$\phi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow G \text{ mit } \psi_i = \phi j_{i_*}, \quad i = 1, 2.$$

Folgendes Diagramm veranschaulicht die Situation

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X_0, x_0) \arrow[r, "i_{2_*}"] \arrow[d, "i_{1_*}"'] & \pi_1(X_2, x_0) \arrow[d, "j_{2_*}"] \arrow[ddr, bend left, "\psi_2"] & \\
\pi_1(X_1, x_0) \arrow[r, "j_{1_*}"'] \arrow[drr, bend right, "\psi_1"'] & \pi_1(X, x_0) \arrow[dr, dotted, "\phi"] & \\
 & & G
\end{tikzcd}$$

Wir zeigen die Existenz nach der Eindeutigkeit.

[13] Dabei soll $\left[b_{i-1} \cdot a_i \cdot b_i^{-1}\right]_{\mu(i)}$ bedeuten, daß es sich bei dieser Homotopieklasse um ein Element aus $\pi_1(X_{\mu(i)}, x_0)$ handelt. Ohne Index ist $\left[b_{i-1} \cdot a_i \cdot b_i^{-1}\right]$ als Element von $\pi_1(X, x_0)$ zu verstehen und $\left[b_{i-1} \cdot a_i \cdot b_i^{-1}\right]_0$ entsprechend als Homotopieklasse in $\pi_1(X_0, x_0)$.

I EINDEUTIGKEIT VON ϕ.
Die Eindeutigkeit ist im wesentlichen eine Folgerung aus dem vorangehenden Lemma. Angenommen, es existieren zwei verschiedene Homomorphismen $\phi, \phi' : \pi_1(X, x_0) \to G$ mit den gewünschten Eigenschaften. Nach obigem Lemma hat man für ein beliebiges Element $\alpha = [a] \in \pi_1(X, x_0)$ die Darstellung

$$\alpha = \prod_{i=1}^{n} j_{\mu(i)_*}\alpha_i = \prod_{i=1}^{n} \left[b_{i-1} \cdot a_i \cdot b_i^{-1}\right].$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) &= \phi\left(\prod_{i=1}^{n} j_{\mu(i)_*}\alpha_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \phi j_{\mu(i)_*}\alpha_i \\ &= \prod_{i=1}^{n} \psi_{\mu(i)}\alpha_i = \prod_{i=1}^{n} \phi' j_{\mu(i)_*}\alpha_i \\ &= \phi'\left(\prod_{i=1}^{n} j_{\mu(i)_*}\alpha_i\right) \\ &= \phi'(\alpha), \end{aligned}$$

womit die Eindeutigkeit von ϕ gezeigt ist.

II EXISTENZ VON ϕ.
Für ein beliebiges Element $\alpha = [a] \in \pi_1(X, x_0)$ mit $\alpha = \prod_{i=1}^{n} j_{\mu(i)_*}\alpha_i$ definiere

$$\boxed{\phi(\alpha) := \prod_{i=1}^{n} \psi_{\mu(i)}\alpha_i} \quad .$$

Zur Versicherung der Wohldefiniertheit von ϕ sind zunächst drei Unabhängigkeiten zu prüfen.

- Unabhängigkeit von der Wahl der Wege b_i

  Sei $\widetilde{b}_i$ ein anderer Weg, der x_0 und $a(t_i)$ verbindet und ganz in $X_{\mu(i)} \cap X_{\mu(i+1)}$ verläuft. Dann ist $w_i := b_i \cdot \widetilde{b}_i^{-1}$ eine Schleife in x_0. Ersetze nun in der obigen Definition von $\phi(\alpha)$ die Homotopieklasse $\alpha_i = \left[b_{i-1} \cdot a_i \cdot b_i^{-1}\right]_{\mu(i)}$ durch $\widetilde{\alpha}_i := \left[b_{i-1} \cdot a_i \cdot \widetilde{b}_i^{-1}\right]_{\mu(i)}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}_i &= \left[b_{i-1} \cdot a_i \cdot (b_i^{-1} \cdot b_i) \cdot \widetilde{b}_i^{-1}\right]_{\mu(i)} \\ &= \left[b_{i-1} \cdot a_i \cdot b_i^{-1}\right]_{\mu(i)} \cdot \left[b_i \cdot \widetilde{b}_i^{-1}\right]_{\mu(i)} \\ &= \alpha_i \cdot [w_i]_{\mu(i)}. \end{aligned}$$

  Analog setze $\widetilde{\alpha}_{i+1} := \left[\widetilde{b}_i \cdot a_{i+1} \cdot b_{i+1}\right]_{\mu(i+1)}$, womit gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}_{i+1} &= \left[\widetilde{b}_i \cdot (b_i^{-1} \cdot b_i) \cdot a_{i+1} \cdot b_{i+1}\right]_{\mu(i+1)} \\ &= \left[\widetilde{b}_i \cdot b_i^{-1}\right]_{\mu(i+1)} \cdot \left[b_i \cdot a_{i+1} \cdot b_{i+1}\right]_{\mu(i+1)} \\ &= \left[w_i^{-1}\right]_{\mu(i+1)} \cdot \alpha_{i+1}. \end{aligned}$$

Ersetzte also den Faktor $\psi_{\mu(i)}\alpha_i$ durch

$$\psi_{\mu(i)}\widetilde{\alpha}_i = \psi_{\mu(i)}\left(\alpha_i \cdot [w_i]_{\mu(i)}\right) = \left(\psi_{\mu(i)}\alpha_i\right)\left(\psi_{\mu(i)}[w_i]_{\mu(i)}\right).$$

Entsprechend muß $\psi_{\mu(i+1)}\alpha_{i+1}$ mit

$$\begin{aligned}\psi_{\mu(i+1)}\widetilde{\alpha}_{i+1} &= \psi_{\mu(i+1)}\left(\left[w_i^{-1}\right]_{\mu(i+1)} \cdot \alpha_{i+1}\right)\\ &= \left(\psi_{\mu(i+1)}\left[w_i^{-1}\right]_{\mu(i+1)}\right)\left(\psi_{\mu(i+1)}\alpha_{i+1}\right)\end{aligned}$$

ausgetauscht werden. Die anderen Faktoren von $\phi(\alpha)$ bleiben unverändert. Ist nun $\mu(i) = \mu(i+1)$, so haben diese Änderungen keinerlei Auswirkungen, da $[w_i]_{\mu(i)}$ und $\left[w_i^{-1}\right]_{\mu(i+1)}$ Inverse sind, also gilt

$$\begin{aligned}&\left(\psi_{\mu(i)}\widetilde{\alpha}_i\right)\left(\psi_{\mu(i+1)}\widetilde{\alpha}_{i+1}\right)\\ = &\left(\psi_{\mu(i)}\alpha_i\right)\underbrace{\left(\psi_{\mu(i)}[w_i]_{\mu(i)}\right)\left(\psi_{\mu(i+1)}\left[w_i^{-1}\right]_{\mu(i+1)}\right)}_{=1}\left(\psi_{\mu(i+1)}\alpha_{i+1}\right)\\ = &\left(\psi_{\mu(i)}\alpha_i\right)\left(\psi_{\mu(i+1)}\alpha_{i+1}\right).\end{aligned}$$

Ist andernfalls $\mu(i) \neq \mu(i+1)$, sei also oBdA $\mu(i) = 1$ und $\mu(i+1) = 2$, so ist wegen der Voraussetzung $\psi_1 i_{1*} = \psi_2 i_{2*}$

$$\left(\psi_1 [w_i]_1\right)\left(\psi_2\left[w_i^{-1}\right]_2\right) = \left(\psi_1 i_{1*}[w_i]_0\right)\left(\psi_2 i_{2*}\left[w_i^{-1}\right]_0\right) = 1.$$

Also bleibt $\phi(\alpha)$ auch in diesem Fall unverändert und ist damit unabhängig von der Wahl der Wege b_i. $\diamondsuit$

- Unabhängigkeit von der Wahl des Indexes $\mu(i)$

  Falls es eine Wahl für $\mu(i)$ gibt, so muß a_i ganz in $X_0 = X_1 \cap X_2$ verlaufen. Dann kann man auch b_{i-1} und b_i so wählen, daß deren Spur vollständig in X_0 enthalten ist. $b_{i-1} \cdot a_i \cdot b_i$ ist somit eine Schleife in X_0. Voraussetzungsgemäß gilt

$$\begin{aligned}\psi_1\left[b_{i-1} \cdot a_i \cdot b_i\right]_1 &= \psi_1 i_{1*}\left[b_{i-1} \cdot a_i \cdot b_i\right]_0\\ &= \psi_2 i_{2*}\left[b_{i-1} \cdot a_i \cdot b_i\right]_0\\ &= \psi_2\left[b_{i-1} \cdot a_i \cdot b_i\right]_2,\end{aligned}$$

  womit $\phi(\alpha)$ unverändert bleibt. $\diamondsuit$

- Unabhängigkeit von der Unterteilung des Intervalls $[0, \|a\|]$

  Um zwei beliebige Unterteilungen des Intervalls $[0, \|a\|]$ zu vergleichen, genügt es, die Auswirkungen eines weiteren Punktes t_+ mit $t_{i-1} < t_+ < t_i$ zu verfolgen. Zerlege den Weg a_i, der ganz in $X_{\mu(i)}$ verläuft, in zwei Wege a_i' und a_i'', also $a_i = a_i' \cdot a_i''$, deren Spur dann ebenfalls ganz in $X_{\mu(i)}$ liegt. Wähle nun einen Weg b_+ in $X_{\mu(i)}$, der x_0 und $a(t_+)$ verbindet. Wir ersetzen $\psi_{\mu(i)}\alpha_i$ durch

$$\left(\psi_{\mu(i)}\left[b_{i-1} \cdot a_i' \cdot b_+^{-1}\right]_{\mu(i)}\right)\left(\psi_{\mu(i)}\left[b_+ \cdot a_i'' \cdot b_i^{-1}\right]_{\mu(i)}\right),$$

aber es gilt

$$\begin{aligned} & \left(\psi_{\mu(i)}\left[b_{i-1}\cdot a_i'\cdot b_+^{-1}\right]_{\mu(i)}\right)\left(\psi_{\mu(i)}\left[b_+\cdot a_i''\cdot b_i^{-1}\right]_{\mu(i)}\right) \\ = \ & \psi_{\mu(i)}\left(\left[b_{i-1}\cdot a_i'\cdot b_+^{-1}\right]_{\mu(i)}\cdot\left[b_+\cdot a_i''\cdot b_i^{-1}\right]_{\mu(i)}\right) \\ = \ & \psi_{\mu(i)}\left[b_{i-1}\cdot a_i'\cdot b_+^{-1}\cdot b_+\cdot a_i''\cdot b_i^{-1}\right]_{\mu(i)} \\ = \ & \psi_{\mu(i)}\left[b_{i-1}\cdot\underbrace{a_i'\cdot a_i''}_{=a_i}\cdot b_i^{-1}\right]_{\mu(i)} \\ = \ & \psi_{\mu(i)}\alpha_i, \end{aligned}$$

womit auch die dritte und letzte Unabhängigkeit gezeigt ist. $\diamondsuit$

Damit ist die Wohldefiniertheit von ϕ erwiesen. Wir betrachten nun das neutrale Element $\alpha = 1 \in \pi_1(X, x_0)$ der Fundamentalgruppe von X, haben also

$$\prod_{i=1}^{r} j_{\mu(i)_*}\alpha_i = 1,$$

und wählen Repräsentanten a_i der Schleifenhomotopieklassen α_i für $i = 1, \ldots, r$, also

$$\alpha_i = [a_i], \quad i = 1, \ldots, r.$$

Das Produkt

$$a = \prod_{i=1}^{r} j_{\mu(i)} a_i$$

ist dann homotop zum identischen Weg in x_0. Es gibt somit eine Homotopie von Wegen (bezüglich Anfangs- und Endpunkt) der Länge $\|a\|$

$$h : [0, \|a\|] \times [0, 1] \longrightarrow X$$

mit

$$h(t, 0) = a(t), \quad t \in [0, \|a\|]$$

und

$$h(0, s) = h(t, 1) = h(\|a\|, s) = x_0, \quad s \in I, \ t \in [0, \|a\|].$$

Setze $R := [0, \|a\|] \times [0, 1]$. Dann ist

$$\mathcal{U}_R := \left\{h^{-1}(X_1), h^{-1}(X_2)\right\}$$

eine offene Überdeckung des kompakten metrischen Raumes R, und die vertikalen Linien $t_i := \sum_{k=1}^{i} \|a_k\|$, $i = 1, \ldots, r$ bilden eine Unterteilung des Rechtecks R. Nach dem Lemma von Lebesgue existiert eine Verfeinerung dieser Unterteilung

$$\begin{aligned} 0 &= t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \|a\| \\ 0 &= s_0 < s_1 < \ldots < s_{m-1} < s_m = 1 \end{aligned}$$

in Unterrechtecke

$$R_{ij} := [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j], \quad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m$$

so daß jedes Rechteck R_{ij} in mindestens einer der Urbildmengen $h^{-1}(X_1)$ oder $h^{-1}(X_2)$ enthalten ist. Somit gibt es eine Indexfunktion ν derart, daß

$$h(R_{ij}) \subset X_{\nu(i,j)}.$$

Wähle nun zu jedem Gitterpunkt (t_i, s_j) einen Weg e_{ij} in X mit folgenden Eigenschaften

(4) $e_{ij}(0) = x_0$, $e_{ij}(\|e_{ij}\|) = h(t_i, s_j)$, e_{ij} verbindet also x_0 und $h(t_i, s_j)$.

(5) Falls $h(t_i, s_j) = x_0$, dann gilt $e_{ij}(t) = x_0$ für alle $t \in [0, \|e_{ij}\|]$, i.e. e_{ij} ist der konstante Weg in x_0.

(6) $e_{ij}[0, \|e_{ij}\|] \subset X_{\nu(i,j)} \cap X_{\nu(i+1,j)} \cap X_{\nu(i,j+1)} \cap X_{\nu(i+1,j+1)}$ (hierbei sei $X_{\nu(i,j)} = X$, falls $i \in \{0, n+1\}$ oder $j \in \{0, m+1\}$).

(7) Falls $\sum_{k=1}^{j-1} \|a_k\| \leq t_{i-1} < t_i \leq \sum_{k=1}^{j} \|a_k\|$ ist, dann gilt $e_{i0}[0, \|e_{i0}\|] \subset X_{\mu(j)}$.

Definiere nun Wege

$$\begin{aligned} c_{ij} : [0, t_i - t_{i-1}] \longrightarrow \quad X \quad &, \quad c_{ij}(t) := h(t + t_{i-1}, s_j) \\ d_{ij} : [0, s_j - s_{j-1}] \longrightarrow \quad X \quad &, \quad d_{ij}(s) := h(t_i, s + s_{j-1}), \end{aligned}$$

d.h.

$$\mathrm{im}\,(c_{ij}) = \mathrm{im}\left(h|_{[t_{i-1},t_i]\times\{s_j\}}\right) \quad \text{und} \quad \mathrm{im}\,(d_{ij}) = \mathrm{im}\left(h|_{\{t_i\}\times[s_{j-1},s_j]}\right).$$

Insbesondere gilt

$$\mathrm{im}(c_{ij}), \mathrm{im}(c_{i,j-1}), \mathrm{im}(d_{ij}), \mathrm{im}(d_{i-1,j}) \subset h(R_{ij}) \subset X_{\nu(i,j)}.$$

Setze nun

$$\begin{aligned} a_{ij} \quad &:= \quad e_{i-1,j} \cdot c_{ij} \cdot e_{ij}^{-1} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \text{ und } j = 0, \ldots, m \\ b_{ij} \quad &:= \quad e_{i,j-1} \cdot d_{ij} \cdot e_{ij}^{-1} \quad \text{für } i = 0, \ldots, n \text{ und } j = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Die Familien von Wegen $\{a_{ij}\}_{i,j}$ und $\{b_{ij}\}_{i,j}$ sind Familien wohldefinierter Schleifen, und nach (6) verlaufen die Schleifen $a_{ij}, b_{ij}, a_{i,j-1}, b_{i-1,j}$ vollständig in $X_{\nu(i,j)}$. Deshalb defineren sie Gruppenelemente

$$\alpha_{ij} := [a_{ij}],\ \beta_{ij} := [b_{ij}],\ \alpha'_{ij} := [a_{i,j-1}],\ \beta'_{ij} := [b_{i-1,j}]$$

von $\pi_1(X_{\nu(i,j)}, x_0)$. Das Schleifenprodukt $a_{i,j-1} \cdot b_{ij} \cdot a_{ij}^{-1} \cdot b_{i-1,j}^{-1}$ ist kontrahierbar, denn

$$\begin{aligned} & a_{i,j-1} \cdot b_{ij} \cdot a_{ij}^{-1} \cdot b_{i-1,j}^{-1} \\ = \quad & (e_{i-1,j-1} \cdot c_{i,j-1} \cdot e_{i,j-1}^{-1}) \cdot (e_{i,j-1} \cdot d_{i,j} \cdot e_{i,j}^{-1}) \cdot (e_{i,j} \cdot c_{i,j}^{-1} \cdot e_{i-1,j}^{-1}) \cdot (e_{i-1,j} \cdot d_{i-1,j}^{-1} \cdot e_{i-1,j-1}^{-1}) \\ \simeq \quad & e_{i-1,j-1} \cdot c_{i,j-1} \cdot d_{ij} \cdot c_{ij}^{-1} \cdot d_{i-1,j}^{-1} \cdot e_{i-1,j-1}^{-1} \\ \simeq \quad & e_{x_0}, \end{aligned}$$

d.h. es ist homotop zum identischen Weg e_{x_0} in x_0. Da sowohl $h(R_{ij})$ als auch die Bilder der vier Schleifen $a_{ij}, b_{ij}, a_{i,j-1}, b_{i-1,j}$ in $X_{\nu(i,j)}$ enthalten sind, ist das Produkt $a_{i,j-1} \cdot b_{ij} \cdot a_{ij}^{-1} \cdot b_{i-1,j}^{-1}$ sogar in $X_{\nu(i,j)}$ kontrahierbar. Dies impliziert

$$(*) \qquad \boxed{\alpha'_{ij}\beta_{ij}\alpha_{ij}^{-1}(\beta'_{ij})^{-1} = 1 \in \pi_1(X_{\nu(i,j)}, x_0)} \ .$$

Für den Fortgang des Beweises ist das folgende Lemma von zentraler Bedeutung.

Lemma 4.5. *Falls Gruppenelemente $\alpha \in \pi_1(X_i, x_0)$ und $\beta \in \pi_1(X_j, x_0)$ für $i, j = 1, 2$ einen gemeinsamen Schleifenrepräsentanten besitzen, so gilt $\psi_i\alpha = \psi_j\beta \in G$.*

Beweis. Da $X_i \cap X_j = X_k$ für ein $k \in \{0, 1, 2\}$ ist, ist jede der beiden Inklusionsabbildungen η_1, η_2

$$X_i \xleftarrow{\eta_1} X_k \xrightarrow{\eta_2} X_j$$

entweder eine Identitätsabbildung oder gleich i_{1_*} bzw. i_{2_*}. Folglich kommutieren die durch η_1, η_2 induzierten Homomorphismen η_{1_*}, η_{2_*} der Fundamentalgruppen

$$\pi_1(X_i, x_0) \xleftarrow{\eta_{1*}} \pi_1(X_k, x_0) \xrightarrow{\eta_{2*}} \pi_1(X_j, x_0)$$

mit den Gruppenhomomorphismen ψ_1 und ψ_2, also

$$\psi_i\eta_{1_*} = \psi_j\eta_{2_*}.$$

Da α und β voraussetzungsgemäss einen gemeinsamen Schleifenrepräsentanten besitzen, gibt es eine Schleife o in X_k mit $\eta_1 o \in \alpha$ und $\eta_2 o \in \beta$. Setze $\gamma := [o] \in \pi_1(X_k, x_0)$. Dann gilt

$$\eta_{1_*}\gamma = [\eta_1 o] = \alpha \quad \text{und} \quad \eta_{2_*}\gamma = [\eta_2 o] = \beta,$$

und so ergibt sich schließlich

$$\psi_1\alpha = \psi_i i_{1_*}\gamma = \psi_j i_{2_*}\gamma = \psi_j\beta,$$

was zu zeigen war. $\diamondsuit$

Wegen

$$\alpha_{ij} = [a_{ij}] = \alpha'_{i,j+1} \quad \text{und} \quad \beta_{ij} = [b_{ij}] = \beta'_{i+1,j},$$

was gerade bedeutet, daß $\alpha_{ij}, \alpha'_{i,j+1}$ und $\beta_{ij}, \beta'_{i+1,j}$ jeweils einen gemeinsamen Repräsentanten (nämlich a_{ij} bzw. b_{ij}) besitzen, gilt nach dem soeben bewiesenen Hilfssatz das Gleichungspaar

$$(**) \qquad \boxed{\psi_{\nu(i,j)}\alpha_{ij} = \psi_{\nu(i,j+1)}\alpha'_{i,j+1} \quad \text{und} \quad \psi_{\nu(i,j)}\beta_{ij} = \psi_{\nu(i+1,j)}\beta'_{i+1,j}}\ .$$

Wendet man nun den Homomorphismus $\psi_{\nu(i,j)}$ auf Gleichung $(*)$ an, so erhält man

$$\begin{aligned} \psi_{\nu(i,j)}(\alpha'_{ij}\beta_{ij}\alpha_{ij}^{-1}(\beta'_{ij})^{-1}) &= \psi_{\nu(i,j)}(\alpha'_{ij})\psi_{\nu(i,j)}(\beta_{ij})\psi_{\nu(i,j)}(\alpha_{ij})^{-1}\psi_{\nu(i,j)}(\beta'_{ij})^{-1} \\ &= \psi_{\nu(i,j)}(1) = 1. \end{aligned}$$

Umläuft man also unter Anwendung von $\psi_{\nu(i,j)}$ das Rechteck R_{ij} im Gegenuhrzeigersinn (d.h. mathematisch positiv), so erhält man die Identität in G. Das Paar von Gleichungen $(**)$ bedeutet, daß die Seiten angrenzender Rechtecke sich aufheben, womit induktiv folgt, daß das Umranden des gesamten Rechtecks R ebenso die Identität $1 \in G$ liefert. Aufgrund der Daten der Homotopie h

$$h(t, 0) = a(t), \quad t \in [0, \|a\|]$$

und

$$h(0, s) = h(t, 1) = h(\|a\|, s) = x_0, \quad s \in I, \ t \in [0, \|a\|].$$

sind lediglich die Elemente entlang der unteren Rechtecksseite ($s = 0$) nichttrivial. Schließe daher, daß

$$\prod_{i=1}^{n} \psi_{\nu(i,1)}\alpha'_{i1} = \prod_{i=1}^{n} \psi_{\nu(i,1)}\,[a_{i0}] = 1$$

ist. Da für $j = 1, \dots, r$ stets $\sum_{k=1}^{j} \|a_k\| \in \{t_1, \dots, t_n\}$ ist, gibt es eine Indexfunktion $i = i(j)$ mit $i(0) = 0$ derart, daß

$$t_{i(j)} = \sum_{k=1}^{j} \|a_k\|\,,\ j = 1, \dots, r$$

gilt. Aus den Bedingungen (4) und (5) erhält man nun

$$\prod_{i=i(j-1)+1}^{i(j)} a_{i0} \simeq j_{\mu(j)} a_j, \quad j = 1, \dots, r.$$

Die Eigenschaft (7) versichert, daß diese Äquivalenz in $X_{\mu(j)}$ gilt. Somit bestimmt jede Schleife a_{i0}, $i = i(j-1)+1, \dots, i(j)$ eine Homotopieklasse $\alpha'_i = [a_{i0}] \in \pi_1(X_{\mu(j)}, x_0)$, und man hat

$$\prod_{i=i(j-1)+1}^{i(j)} \alpha'_i = \alpha_j = [a_j] \in \pi_1(X_{\mu(j)}, x_0).$$

Wegen $\alpha'_{i1} = [a_{i0}] = \alpha'_i$, was bedeutet, daß α'_{i1} und α'_i einen gemeinsamen Repräsentanten besitzen, liefert obiges Lemma

$$\psi_{\mu(j)} \alpha'_i = \psi_{\nu(i,1)} \alpha'_{i1}, \quad i = i(j-1)+1, \dots, i(j).$$

Hiermit ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} 1 &= \prod_{j=1}^{r} \left(\prod_{i=i(j-1)+1}^{i(j)} \psi_{\nu(i,1)} \alpha'_{i1} \right) \\ &= \prod_{j=1}^{r} \left(\prod_{i=i(j-1)+1}^{i(j)} \psi_{\mu(j)} \alpha'_i \right) \\ &= \prod_{j=1}^{r} \psi_{\mu(j)} \left(\prod_{i=i(j-1)+1}^{i(j)} \alpha'_i \right) \\ &= \prod_{j=1}^{r} \psi_{\mu(j)} \alpha_j, \end{aligned}$$

womit die Implikation

$$\prod_{i=1}^{r} j_{\mu(i)_*} \alpha_i = 1 \quad \Longrightarrow \quad \prod_{i=1}^{r} \psi_{\mu(i)} \alpha_i = 1$$

und damit gleichbedeutend die Existenz von ϕ nachgewiesen ist.

Damit ist der Satz von Seifert-van Kampen vollständig bewiesen. □

Bemerkung 4.6. Es ist möglich, die Voraussetzungen dieses Satzes weiter abzuschwächen. Die Räume X_1 und X_2 müssen nicht notwendig offen sein: es genügt, wie der Beweis des Satzes von Brown zeigt, daß $\mathcal{U}_X = \{X_1, X_2\}$ eine *innere* Überdeckung von X ist, d.h. $X = \mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2$. Der Beweis bleibt dabei unverändert.

An dieser Stelle drängt sich als unmittelbare Folgerung aus dem Erzeugungslemma der nachstehende (keineswegs tiefsinnige) Korollar auf.

Korollar 4.7. *Seien X_1 und X_2 den Voraussetzungen des Satzes von Seifert-van Kampen genügende Mengen. Sind X_1 und X_2 einfach zusammenhängend, so ist auch deren Vereinigung einfach zusammenhängend.*

Beweis. Seien X_1 und X_2 einfach zusammenhängend, also $\pi_1(X_1, x_0) = \pi_1(X_2, x_0') = 1$ für alle $x_0 \in X_1$ und $x_0' \in X_2$. Dann sind auch die Bildgruppen $j_{1_*}(\pi_1(X_1, x_0))$ und $j_{2_*}(\pi_1(X_2, x_0'))$ trivial und erzeugen deshalb lediglich die triviale Gruppe 1. Es folgt, daß

$$\pi_1(X_1 \cup X_2, x_0'') = 1$$

für alle $x_0'' \in X_1 \cup X_2$, womit auch $X_1 \cup X_2$ einfach zusammenhängend ist. □

Den Abschluß bildet eine allgmeinere Fassung des Satzes von Seifert-van Kampen.[14] Anstatt lediglich die Vereinigung zweier Mengen X_1 und X_2 zu betrachten, erlaubt es diese unter gewissen Voraussetzungen, eine Aussage über die Fundamentalgruppe einer Vereinigung einer Familie wegzusammenhängender offener Mengen X_i, $i \in I$, wobei I eine beliebige Indexmenge bedeutet, zu machen. Der Beweis verläuft überraschenderweise analog zu dem oben präsentierten und wird hier nicht ausformuliert.

Satz 4.8. *Sei X ein topologischer Raum und $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie wegzusammenhängender offener Mengen mit beliebiger Indexmenge I, die unter endlichen Schnitten abgeschlossen ist und die $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ sowie $\bigcap_{i\in I} X_i \neq \emptyset$ erfüllt. Sei $x_0 \in \bigcap_{i\in I} X_i$, und seien*

$$i_{kl_*} : \pi_1(X_k, x_0) \longrightarrow \pi_1(X_l, x_0) \qquad (X_k \subset X_l)$$

und

$$j_{k_*} : \pi_1(X_k, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

die von den Inklusionen induzierten Homomorphismen der Fundamentalgruppen. Dann erzeugen die Bildgruppen $j_{k_*}(\pi_1(X_k, x_0))$ die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$, und zu einer beliebigen Gruppe G und einem Paar von Homomorphismen $\psi_k : \pi_1(X_k, x_0) \to G$ mit $\psi_k = \psi_l i_{kl_*}$ gibt es genau einen Homomorphismus $\phi : \pi_1(X, x_0) \to G$ mit $\psi_k = \phi j_{k_*}$.

[14] Eine weitere Formulierung, die freie Produkte verwendet, hält [4] bereit.

5 Anwendungen

In diesem letzten Abschnitt werden ausgewählte Anwendungen des Satzes von Seifert-van Kampen vorgeführt. Hierzu zählen die Bestimmung der Fundamentalgruppe der n-Sphäre S^n für $n \geq 2$ sowie der Einpunktvereinigung $S^1 \vee S^1$ zweier Kreise. Zum Abschluß bietet es sich an, die Tatsache, daß die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ eines punktierten topologischen Raumes (X, x_0) im Gegensatz zu seinen höheren Homotopiegruppen $\pi_k(X, x_0)$, $k > 1$, im Allgemeinen nicht abelsch ist, am Beispiel der freien Gruppe $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ zu belegen.

5.1 Die Fundamentalgruppe der n-Sphäre S^n

Wir betrachten die n-Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und vereinbaren die Bezeichnungen

$$N := (0, \dots, 0, 1) \in S^n \qquad \text{Nordpol}$$

und entsprechend

$$S := (0, \dots, 0, -1) \in S^n \qquad \text{Südpol.}$$

Ohne Beweis setzen wir folgendes Lemma voraus, welches die wichtigsten Eigenschaften von S^n bereithält:

Lemma 5.1. *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

(1) S^n ist wegzusammenhängend

(2) $S^n \setminus \{N\}, S^n \setminus \{S\} \cong \mathbb{R}^n$ (stereographische Projektion)

(3) $S^n \setminus \{N, S\} \cong S^{n-1} \times]-1, 1[$.

Auskunft über die Fundamentalgruppe von S^n für $n \geq 2$ zu einem beliebigen Grundpunkt $x_0 \in S^n$ gibt

Satz 5.2. *Für $n \geq 2$ ist S^n einfach zusammenhängend, d.h. $\pi_1(S^n, x_0) = 1$ für alle $x_0 \in S^n$.*

Beweis. Da S^n nach dem vorangehenden Lemma für $n \geq 2$ wegweise zusammenhängend ist, sind die Fundamentalgruppen $\pi_1(S^n, x_0)$ in den einzelnen Punkten $x_0 \in S^n$ zueinander isomorph. Wähle als Grundpunkt $x_0 := (1, 0, \dots, 0) \in S^n$ und setze

$$\begin{aligned} X_1 &:= S^n \setminus \{N\} \\ X_2 &:= S^n \setminus \{S\} \\ X_0 &:= X_1 \cap X_2 = S^n \setminus \{S, N\}. \end{aligned}$$

Dann sind X_1 und X_2 offen, und es gilt $S^n = X_1 \cup X_2$. Da X_1 und X_2 jeweils homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ sind, folgt, daß X_1 und X_2 auch wegzusammenhängend sind. Der Wegzusammenhang von X_0 ergibt sich aus der Homöomorphie $X_0 \cong S^{n-1} \times]-1, 1[$. Die Voraussetzungen des Satzes von Seifert-van Kampen sind damit erfüllt, und es folgt mit ihm, daß

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X_0, x_0) \arrow[r, "i_{2*}"] \arrow[d, "i_{1*}"'] \arrow[dr, phantom, "\Pi_1"] & \pi_1(X_2, x_0) \arrow[d, "j_{2*}"] \\ \pi_1(X_1, x_0) \arrow[r, "j_{1*}"'] & \pi_1(S^n, x_0) \end{tikzcd}$$

ein Pushout in der Kategorie der Gruppen ist. Wegen $X_1, X_2 \cong \mathbb{R}^n$ sind X_1 und X_2 zusammenziehbar, haben also triviale Fundamentalgruppe:

$$\pi_1(X_1, x_0) = \pi_1(X_2, x_0) = 1.$$

Es folgt, daß auch die Bildgruppen $j_{1_*}(\pi_1(X_1, x_0))$ und $j_{2_*}(\pi_1(X_2, x_0))$ trivial sind, und da diese $\pi_1(S^n, x_0)$ erzeugen, ist schließlich

$$\pi_1(S^n, x_0) = 1,$$

womit die $n \geq 2$-Sphäre einfach zusammenhängend ist. □

An diesem Beispiel demonstriert der Satz von Brown seine Stärke gegenüber des Satzes von Seifert-van Kampen. Mit letztgenanntem ist es (in der hier behandelten Formulierung) nicht möglich, die Fundamentalgruppe des Kreises S^1 zu bestimmen (man findet keine offene Überdeckung des Kreises, deren Schnitt nichtleer und wegzusammenhängend ist). MIt dem Satz von Brown hingegen (der keinen Wegzusammenhang voraussetzt) kann das Fundamentalgruppoid des Kreises berechnet werden: hieraus kann dann die Fundamentalgruppe des Kreises - wie schon bekannt ist $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ für alle 1-Sphären Punkte x_0 - gewonnen werden.

5.2 Die Fundamentalgruppe der Einpunktvereinigung $S^1 \vee S^1$ zweier Kreise

Seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte topologische Räume mit Grundpunkten x_0 und y_0. Die Einpunktvereinigung oder punktierte Summe $X \vee Y$ ist gegeben durch den Quotientenraum $X + Y/\{x_0, y_0\}$, entsteht also aus der topologischen Summe $X + Y = X \coprod Y$ (d.h. die disjunkte Vereinigung), indem die beiden Grundpunkte identifiziert werden. Die punktierte Summe ist dabei die kategorientheoretische Summe in der Kategorie Top^o der punktierten topologischen Räume. Hier befassen wir uns mit der Einpunktvereinigung zweier Kreise.

Fasse den Raum $S^1 \vee S^1$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ auf. Definiere

$$K_1 := \left\{x \in \mathbb{R}^2 | \ |x - 1| = 1\right\}$$

und

$$K_{-1} := \left\{x \in \mathbb{R}^2 | \ |x + 1| = 1\right\}.$$

Dann gilt $K_1, K_{-1} \cong S^1$ und $K_1 \cap K_{-1} = \{0\}$. Setze nun $S^1 \vee S^1 := K_1 \cup K_{-1} \subset \mathbb{R}^2$ und $x_0 := 0$.

Satz 5.3. $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Beweis. Zunächst definiere Teilräume X_1, X_2 durch

$$X_1 := K_{-1} \cup \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \ x \in K_1 \ \wedge \ 0 \leq x_1 < 1\right\}$$

sowie

$$X_2 := K_1 \cup \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \ x \in K_{-1} \ \wedge \ -1 < x_1 \leq 0\right\}.$$

Dann sind $X_1, X_2 \subset S^1 \vee S^1$ offen, und es gilt $S^1 \vee S^1 = X_1 \cup X_2$. Weiterhin sind X_1, X_2 sowie ihr Schnitt $X_0 := X_1 \cap X_2$ wegzusammenhängend mit $x_0 \in X_0$. Somit sind auch hier die

Voraussetzungen des Satzes von Seifert-van Kampen erfüllt, man erhält durch das Quadrat

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X_0,x_0) \arrow[r, "i_{2_*}"] \arrow[d, "i_{1_*}"'] \arrow[dr, phantom, "\Pi_1"] & \pi_1(X_2,x_0) \arrow[d, "j_{2_*}"] \\
\pi_1(X_1,x_0) \arrow[r, "j_{1_*}"'] & \pi_1(S^1 \vee S^1, x_0)
\end{tikzcd}$$

ein Pushout in der Kategorie der Gruppen. Für den einpunktigen Raum X_0 hat man $\pi_1(X_0,x_0)=1$. Da die Teilräume X_1 und X_2 homotopieäquivalent zu K_{-1} bzw. K_1 ($X_1 \simeq K_{-1}$, $X_2 \simeq K_1$) und K_{-1} und K_1 jeweils homöomorph zu S^1 sind, gilt

$$\pi_1(X_1,x_0) \cong \pi_1(X_2,x_0) \cong \pi_1(S^1,x_0) \cong \mathbb{Z}.$$ [15]

Dies liefert ein Pushout der Form

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\
\mathbb{Z} \arrow[r] & \pi_1(S^1 \vee S^1, x_0)
\end{tikzcd}$$

und aus der Eindeutigkeit bis auf Isomorphie folgt nun

$$\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Die Fundamentalgruppe der Einpunktvereinigung zweier Kreise ist demnach isomorph zur freien Gruppe mit zwei Erzeugenden. □

Dieses Resultat läßt sich verallgemeinern. Darüber berichtet (beweislos)

Satz 5.4. *Die Fundamentalgruppe der punktierten Summe von n Kreisen ist isomorph zur freien Gruppe mit n Erzeugenden: $\pi_1(\bigvee_1^n S^1, *) \cong \mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}$.*

Jedem punktierten Raum (X,x_0) wird eine Familie von Homotopiegruppen $\pi_k(X,x_0)$ zugeordnet. Diese werden definiert durch $\pi_k(X,x_0) := \left[I^k/\partial I^k, X\right]^o$, wobei $\left[I^k/\partial I^k, X\right]^o$ die Menge der punktierten Homotopieklassen von Abbildungen $I^k/\partial I^k \to X$ bedeutet und I^k den k-dimensionalen Würfel bezeichnet. Die k-te Homotopiegruppe beruht also letztlich auf Abbildungen der Art $S^k \to X$. Dabei ist $\pi_0(X,x_0)$ die Menge der Wegzusammenhangskomponenten, und für $k=1$ erhält man die Fundamentalgruppe von (X,x_0). Für $k \geq 1$ definiert man eine Verknüpfung auf $\pi_k(X,x_0)$ und erhält eine Gruppenstruktur. Für $k \geq 2$ sind alle diese Gruppen abelsch.[16] Daß die Fundamentalgruppe eines Raumes im Allgemeinen nicht abelsch ist, belegt der abschließende

Satz 5.5. *Die Gruppe $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ist nicht abelsch.*

[15] Hier wird Gebrauch von dem folgenden hier unbewiesenen **Lemma** gemacht: Ist $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz von topologischen Räumen, so ist der induzierte Homomorphismus der Fundamentalgruppen

$$f_* : \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,f(x))$$

für alle $x \in X$ ein Isomorphismus.

[16] Näheres zu höheren Homotopiegruppen ist in [6] zu finden.

Beweis. Setze $G := \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Dann ist das Quadrat $\mathcal{Q}$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{Q}"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "j_2"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "j_1"'] & \pi_1(S^1 \vee S^1, x_0)
\end{tikzcd}$$

ein Pushout in der Kategorie der Gruppen. Wähle nicht-abelsche Gruppe H (z.B. S_3) und Elemente $h_1, h_2 \in H$ mit $h_1 \cdot h_2 \neq h_2 \cdot h_1$ (z.B. $(1)(23), (2)(13)$). Seien

$$\gamma_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow H, \quad \gamma_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow H$$

die eindeutig bestimmten[17] Gruppenhomomorphismen mit

$$\gamma_1(1) = h_1, \quad \gamma_2(1) = h_2.$$

Da $\mathcal{Q}$ ein Pushout in Gr ist, existiert genau ein Gruppenhomomorphismus

$$\gamma : G \longrightarrow H$$

mit $\gamma j_1 = \gamma_1$ und $\gamma j_2 = \gamma_2$.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d, "j_2"] \arrow[ddr, bend left, "\gamma_2"] & \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "j_1"'] \arrow[drr, bend right, "\gamma_1"'] & G \arrow[dr, dotted, "\gamma"] & \\
 & & H
\end{tikzcd}$$

Wir machen die Annahme, daß $j_1(1) \cdot j_2(1) = j_2(1) \cdot j_1(1)$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}
h_1 \cdot h_2 &= \gamma_1(1) \cdot \gamma_2(1) = \gamma j_1(1) \cdot \gamma j_2(1) \\
&= \gamma(j_1(1) \cdot j_2(1)) = \gamma(j_2(1) \cdot j_1(1)) \\
&= \gamma j_2(1) \cdot \gamma j_2(1) = \gamma_2(1) \cdot \gamma_1(1) \\
&= h_2 \cdot h_1,
\end{aligned}$$

was im Widerspruch zu $h_1 \cdot h_2 \neq h_2 \cdot h_1$ steht. Es folgt, daß $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ und damit $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0)$ nicht abelsch ist. $\square$

[17] Hier findet das nachstehende **Lemma** Anwendung: Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $a \in G$. Dann gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus

$$\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow G$$

mit $\alpha(1) = a$. (Dieser ist gegeben durch $\alpha(n) := a^n,\ n \in \mathbb{Z}$.)

Literatur

[1] Brown, R.: *Topology: A Geometric Account of General Topology, Homotopy Types and the Fundamental Groupoid.* Ellis Horwood, Chichester, 1988.

[2] Crowell, R.H. und Fox, R.H.: *Introduction to Knot Theory.* New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[3] Fischer, G. und Sacher, R.: *Einführung in die Algebra.* Stuttgart: Teubner, 1983.

[4] Hatcher, A.: *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.

[5] Kamps, K.H.: *Gruppoide.* FernUniversität-Gesamthochschule-Hagen, 1992.

[6] tom Dieck, T.: *Topologie.* Berlin-New York: De Gruyter, 2000.